

سلسلة ملخصات شوم

نظريات ومسابائل فى

بحوث العمليات

تأليف

الأستاذ الدكتور/ ريتشارد برونسون

أستاذ الرياضه وعلوم الحاسب

جامعة ديكنسون الأمريكية

ترجمة

الأستاذ الدكتور/ حسن حسنى الفبارى

قسم هندسة الإنتاج الصناعى

كلية الهندسة - جامعة المنصورة

مراجعة

الأستاذ الدكتور/ محمد إبراهيم يونس

أستاذ ومدير برنامج الحاسبات

بالجامعة الأمريكية بالقاهرة

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية

مصر

حقوق النشر

الطبعة الأجنبية : حقوق التأليف © ١٩٨٢ ، دار ماكجروهيل للنشر ، إنك ،

جميع الحقوق محفوظة

OPERATIONS RESEARCH

Richard Bronson

الطبعة العربية الأولى : حقوق الطبع والنشر © ١٩٨٨ ، جميع الحقوق محفوظة

الطبعة العربية الثانية : حقوق الطبع والنشر © ٢٠٠٢ ، جميع الحقوق محفوظة للناشر

المدار الدولية للاستثمارات الثقافية

٨ ش ابراهيم العرابي - النزهة الجديدة - القاهرة

ص.ب : ٥٥٩٩ هليوبوليس غرب - القاهرة

ت : ٢٩٥٧٦٥٥ - ٢٩٧٢٣٤٤

تلكس : ٢٠٨١٥ PBCRUN

فاكس : ٠٠٢٠٢/٢٩٥٧٦٥٥

لا يجوز نشر أي جزء من الكتاب أو اختزان مادته بطريقة الاسترجاع أو

نقله على أي نحو أو بأي طريقة سواء كانت إلكترونية أو ميكانيكية أو بخلاف ذلك

إلا بموافقة الناشر على هذا كتابة ومقماً .

ISBN - 07 - 0848130

مقدمة الناشر

المعرفة هي أصل الحضارة ،
والكلمة هي أصل المعرفة ،
والكلمة المطبوعة هي أهم مكون في هذا المصدر .

وقد كانت الكلمة المطبوعة ولا تزال أهم وسائل الثقافة والإعلام وأوسعها انتشاراً وأبقاها أثراً ، حيث حملت إلينا حضارات الأمم عبر آلاف السنين لتتولى الأجيال المتلاحقة صياغة حضارتها وإضاءة الطريق بنور العلم والمعرفة .
والكلمة تبقى مجرد فكرة لدى صاحبها حتى تنجح لها فرصة نشرها وترجمتها إلى لغات الآخرين ، ثم توزيعها ، وذلك وحده هو الذي يكفل لها أداء رسالتها .

وعالم الكتب العلمية عالم رحب ممتد الآفاق ، متسع الجنبات ، والعلم لا وطن له ولا حدود ، ويوم يحظى القارئ العربي بأحدث الكتب العلمية باللغة العربية هو اليوم الذي تتطلع له الأمة العربية جمعاء .
والدار الدولية للاستثمارات الثقافية تشعر بالرضا عن مساهمتها في هذا المجال بتقديم الطبعات العربية للكتب العلمية الصادرة عن دار ماكجروهيل للنشر بموجب الاتفاق المبرم معها ، مستهدفة توفير إحتياجات القارئ العربي أستاذاً وباحثاً وممارساً .
ومن جانب آخر فنحن نمد يدنا إلى الجامعات العربية والمراكز العلمية والمؤسسات والهيئات الثقافية للتعاون معنا في إصدار طبعات عربية حديثة من الكتب والمراجع العلمية نخدم التقدم العلمي والحضارى للقارئ العربي .

والله ولي التوفيق ،،،

محمد وفائي كامل

مدير عام

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية

مقدمة الطبعة العربية

يتميز العصر الحالى بتعدد المشكلات وتضخم الموارد البشرية والمادية المتاحة وتعدد البدائل المختلفة لحل المشكلات . لذلك فقد ظهرت علوم بحوث العمليات لتقدم الصيغ العلمية والرياضية لمحاولة إيجاد الحلول المثلى لهذه المشكلات . ولقد ظهر العديد من المراجع والكتب باللغة الإنجليزية وغيرها تتناول موضوعات وطرق وأساليب بحوث العمليات ، إلا أن المكتبة العربية كانت إلى وقت قريب تفتقر إلى مثل هذه الكتب مما جعل بحوث العمليات مقصورة على قارئى اللغة الإنجليزية فقط .

لذلك فقد رأينا أن نقوم بمحاولة تقديم كتاب شامل باللغة العربية يهم الطلاب كما يهم المتخصصين الذين يرغبون فى التزود بهذه الموضوعات لاستخدامها فى إيجاد الحلول لمشكلات أعمالهم . وقد اخترنا هذا الكتاب ليكون ترجمة عربية كاملة لعلها تحقق الهدف الذى نسعى إليه . وقد حاولنا خلال الترجمة أن نلتزم قدر المستطاع بالترجمات العربية التى وضعت من قبل للكثير من الاصطلاحات الإنجليزية كما حاولنا إيجاد ترجمات معبرة ومفهومة لبعض الاصطلاحات التى لم تكن قد ترجمت من قبل .

وإننا لننوجه بالشكر للزملاء الذين عاونوا فى إبداء رأى العلمى فى الترجمات المستخدمة وكذلك الزملاء فى مؤسسة ماكجروهيل والسادة الدار الدولية للاستثمارات الثقافية بالقاهرة على جهودهم الكبيرة لإخراج هذا الكتاب بهذه الصورة المشرفة .
واخيراً نسأل الله أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل المتواضع لخدمة القارئ العربى فى كل مكان .

حسن حسنى الغبارى

القاهرة

يناير ١٩٨٨

مقدمة الطبعة الأجنبية

تعتبر بحوث العمليات = التى مهمم بالتخصيص الأمثل للموارد النادرة = فناً وعلماً على السواء . يتمثل الفن فى القدرة على التعبير عن مفاهيم الكفاءة والندرة فى نموذج رياضى محدداً تحديداً جيداً بالنسبة لموقف معين ، أما العلم فيتمثل فى اشتقاق الطرق الحسابية لحل هذه النماذج الرياضية . وهذا الكتاب يقدم للقراء كلاً من جانبي هذا المجال .

ينقسم كل فصل من فصول الكتاب إلى ثلاثة أجزاء . يتناول الجزء الأول عامة الطرق ، باستثناء الفصل الأول الذى يهتم بالاختصار على مفاهيم البرمجة الرياضية ، ويحوى الجزء الثانى من كل فصل مسائل كاملة محلوله ، بالإضافة إلى توضيح الأساليب المقدمة فى الجزء الأول ، وقد تزيد هذه المسائل على هذه الأساليب المقدمة كما قد تقدم نماذج لحالات عملية لفهم طرق البرمجة . أما الجزء الثالث والأخير من كل فصل فيحتوى على مسائل وحلولها النهائية ، حيث يمكن للقارئ من خلالها الحكم على مدى تمكنه من المادة العلمية المقدمة .

أما الكتاب نفسه فينقسم إلى جزئين أساسيين هما :

البرمجة الرياضية ، والطرق الاحتمالية . يتكون الجزء الأول من الفصل الأول وحتى الفصل الخامس عشر ويتناول الطرق المؤكدة للبرمجة الخطية ، الغير خطية ، الأعداد الصحيحة والديناميكية ، بالإضافة إلى فصل عن تحليل الشبكات . وتعتبر الخلفية الرياضية عن جبر المصفوفات كافية لفهم المادة العلمية لهذا الجزء ، بالرغم من الاحتياج لبعض أساليب التفاضل والمعادلات التفاضلية التى تحتاجها أساليب البحث غير الخطية . ويتكون الجزء الثانى من الفصل السادس عشر وحتى الفصل الرابع والعشرون ويتناول موضوعات البرمجة الديناميكية التصادفية ، نظرية الأشكال البيانية ، نظرية القرارات ، سلاسل ماركوف ، ونظرية الصفوف . وكما هو واضح من عنوان هذا الفصل فإنه يحتاج إلى إلمام مبدئى بنظرية الاحتمالات .

ولما كان التخصيص الأمثل للأموال ، القوى البشرية ، والطاقة أو أى عامل من العوامل الأخرى النادرة هو من الأهمية بالنسبة لمتخذى القرارات فى أى نظام ، لذلك فإن المادة العلمية لهذا الكتاب ستكون مفيدة للعديد من الأفراد فى التخصصات المتنوعة . لهذا فقد صمم هذا الكتاب ليكون كتاباً للطلاب الباحثين عن مقدمة فى بحوث العمليات وكدليل ومرجع يحصل منه المتخصصين على طرق وأساليب محددة .

وأود أن أقدم الشكر لكل من ساعدوا فى جعل هذا الكتاب حقيقة ملموسة . وأخص بالتقدير الاقتراحات القيمة لـ ناتالى روبر و دونالد بين فيما يختص بالفصلين الثالث عشر والتاسع عشر على التوالى ، وبالمثل فإننى أشكر مشاركة فائى كلين لكتابة الطبعة الأولى من الكتاب . وكذلك دافيد بيكويت من هيئة شوم حيث شارك فى كثير من مواقع الكتاب فى تقديم الطرق وحل المسائل بالإضافة إلى إعداد الكتاب .

ريتشارد برونسون

المحتويات

الصفحة

١٥	الجزء الأول : البرمجة الرياضية
١٥	الفصل الأول : البرمجة الرياضية
	مشكلات الأمثلة ، البرامج الخطية ، برامج الأعداد الصحيحة ، البرامج التريعية ، صياغة ، المشكلة ، الحل التقليدي .
٣٧	الفصل الثاني : البرمجة الخطية : الصيغة القياسية
	شروط اللاسلبية ، المتغيرات المساعدة والمتغيرات الزائدة ، إيجاد حل أولى ممكن ، التكلفة الجزائية ، الصيغة القياسية .
٤٥	الفصل الثالث : البرمجة الخطية ، نظرية الحلول
	الاعتماد والاستقلال الخطي ، التكوينات المحدبة ، الفئات المحدبة ، حلول النقاط الطرفية ، الحلول الأساسية الممكنة .
٥٧	الفصل الرابع : البرمجة الخطية : طريقة السمبلكس
	جدول السمبلكس ، تبسيط الجدول ، طريقة السمبلكس ، تعديل البرنامج باستخدام المتغيرات الصناعية .
٧٣	الفصل الخامس : البرمجة الخطية : الإزدواجية
	الإزدواجيات المتماثلة ، حلول الإزدواج ، الإزدواجيات غير المتماثلة .
٨٥	الفصل السادس : طريقة التفريع والتحديد : برمجة الأعداد الصحيحة
	التقريب الأول ، التفريع ، التحديد ، الاعتبارات الحسابية .
٩٥	الفصل السابع : برمجة الأعداد الصحيحة : طرق القطع
	طريقة جوموري ، الاعتبارات الحسابية .
١٠٣	الفصل الثامن : برمجة الأعداد الصحيحة : طريقة النقل
	الصيغة القياسية ، طريقة النقل ، حل أساسي أول ، اختبار الأمثلة ، تحسين الحل ، الانحراف .
١١٩	الفصل التاسع : برمجة الأعداد الصحيحة : نماذج الجدولة
	مشاكل الإنتاج ، مشاكل النقل بالشحن ، مشكلات التعمين ، مشكلة البحار المسافر .
١٣٥	الفصل العاشر : البرمجة غير الخطية : المتغير الواحد الأمثل
	المشكلة ، الأمثلة المحلية الشاملة ، النتائج من التفاضل والتكامل ، أساليب البحث التتابعي (التسلسلي) بحث فترة الثلاث نقط ، بحث فيوناكس ، بحث المتوسط الذهبي ، الدوال المقعرة .

١٥٣	الفصل الحادى عشر :	البرمجة غير الخطية : أمثلة متعددة المتغيرات بدون قيود
		الحدود العظمى المحلية والشاملة ، المتجه المتدرج ومصفوفة هسى ، النتائج من التفاضل والتكامل ، طريقة أقصى ميل صعود ، طريقة نيوتن — رافسون ، طريقة فلتشر — بويل ، بحث نمط هوك — جيف ، بحث النمط المعدل ، إختيار التقريب الأولى ، الدوال المحدبة .
١٧٥	الفصل الثانى عشر :	البرمجة غير الخطية : أمثلة متعددة المتغيرات ذو قيود
		الصيغة القياسية ، مضروبوات لاجرانج ، طريقة نيوتن رافسون ، الدوال الجزائية ، شروط كون ، توكر ، طريقة الاتجاهات الممكنة .
١٩٥	الفصل الثالث عشر :	البرمجة التربيعية
		الصيغة القياسية ، نظام كون — توكر ، طريقة فرانك وولف ، تطبيق تحليل بورتفوليو (محفظة الورق) .
٢٠٧	الفصل الرابع عشر :	البرمجة الديناميكية الثابتة (المؤكدة)
		عمليات القرارات المتعددة المراحل ، البرنامج الرياضي ، البرمجة الديناميكية ، البرمجة الديناميكية مع الخصم .
٢٢٥	الفصل الخامس عشر :	تحليل الشبكات
		الشبكات ، مسائل النطاق الأدنى ، مسائل أقصر طريق ، مسائل التدفق الأعلى ، إيجاد مسار التدفق الموجب .

٢٤١	الجزء الثانى: الطرق الاحتمالية
٢٤١	الفصل السادس عشر :
	نظرية المباريات
	المباريات ، الاستراتيجيات ، المباراة المستقرة ، المباريات غير المستقرة ، الحل بواسطة البرمجة الخطية ، السيطرة .
٢٥٧	الفصل السابع عشر :
	نظرية القرار
	عمليات القرار ، مقياس القرار الساذج ، المقياس السابق ، المقياس اللاحق ، أشجار القرار ، المنفعة ، لعب الحظ (اليانصيب) ، وحدات المنفعة لفون نيومان .
٢٧٥	الفصل الثامن عشر :
	البرمجة الديناميكية التصادفية
	عمليات القرار التصادفية المتعددة المراحل ، جداول السياسة .
٢٨٩	الفصل التاسع عشر :
	سلاسل ماركوف المحدودة
	عمليات ماركوف ، قوى المصفوفات التصادفية ، المصفوفات التصادفية النهائية ، المصفوفات العادية .

٣٠١	الفصل العشرون : الآفاق الغير محدودة
	السياسات المثلى فى ظل السكون ، الخصم ، العمليات الثابتة مع الخصم ، سلاسل ماركوف مع الخصم ■ العائد المتوقع لكل فترة .
٣٢٥	الفصل الواحد والعشرون : عمليات الميلاد والموت لماركوف
	عمليات نمو المجتمع ، عمليات الميلاد والموت العامة لماركوف ■ عمليات الميلاد الخطية لماركوف ، عمليات الموت الخطية لماركوف ، عمليات الميلاد والموت الخطية لماركوف ، عمليات الميلاد لبواسون ■ عمليات الموت لبواسون ، عمليات الميلاد والموت لبواسون .
٣٣٧	الفصل الثانى والعشرون : نظم الصفوف
	مقدمه ، خصائص الصف ، أنماط الوصول ، أنماط الخدمة ■ طاقة النظام ، نظم الصفوف ، رموز كندال .
٣٤٥	الفصل الثالث والعشرون : نظم م / م / ١
	خصائص النظام ، نموذج مار
٣٤٥	الفصل الثالث والعشرون : نظم م / م / ١
	خصائص النظام ، نموذج ماركوف ، حلول الحالة الساكنة (المستقرة) ، مقاييس الفاعلية .
٣٥٥	الفصل الرابع والعشرون : النظم الأخرى بمدخلات من نوع بواسون
	عمليات الحالة المعتمدة ، صيغ ليتل ، التزاحم والتخطي ، نظم م / م / س ، نظم م / م / ١ / ك ، نظم م / م / س / ك .
٣٧١	إجابات المسائل المكملية
	قائمة بأهم المصطلحات العلمية
٤٠٢	

(الجزء الأول : البرمجة الرياضية) PART I: Mathematical Programming

الفصل الأول

البرمجة الرياضية Mathematical Programming

مشكلات الأمثلية OPTIMIZATION PROBLEMS

يبحث الفرد في مشكلات الأمثلية عن تعظيم أو تصغير كمية معينة تسمى « الهدف » الذي يعتمد على عدد محدد من المتغيرات كمدخلات . وقد تكون هذه المتغيرات مستقلة عن بعضها البعض ، أو متعلقة ببعضها من خلال أحد أو مجموعة قيود .

مثال ١ - ١ المشكلة

$$\begin{aligned} z = x_1^2 + x_2^2 & : \text{ تصغير} \\ x_1 - x_2 = 3 & : \text{ علماً بأن} \\ x_2 \geq 2 & \end{aligned} \quad (1-1)$$

هي مشكلة أمثلية للهدف z . وتعتبر المتغيرات من المدخلات x_1 ، x_2 مقيدة من ناحيتين : يجب أن تزيد على x_2 بـ 3 ، أيضاً x_2 يجب أن تكون أكبر من أو تساوى 2 . والمطلوب إيجاد قيم للمتغيرات من المدخلات التي تجعل مجموع مربعاتها أقل ما يمكن ، والمتوقعة على الحدود المفروضة بواسطة القيود .

البرنامج الرياضى : هو مشكلة أمثلية ، يمثى فيها الهدف والقيود في صورة دوال رياضية ، وعلاقات (كما في مثال ١ - ١) . والبرامج الرياضية المعالجة في هذا الكتاب من الصيغة

$$\begin{aligned} z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) & : \text{ إيجاد أمثل} \\ \left. \begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \right\} & = \begin{cases} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{cases} \end{aligned}$$

علماً بأن :

وتحتوى كل علاقة قيود m في (١ - ١) على إحدى العلامات $\leq, =, \geq$. وتغطى البرامج الرياضية غير المقيدة بالمعادلات (١ - ١) إذا كانت كل دالة g_i لها قيمة صفر ، وكذلك كل ثابت b_i له قيمة صفر .

البرامج الخطية LINEAR PROGRAMS

يكون البرنامج الرياضى خطياً (١ - ١) إذا كان $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ وكل من $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ حيث $(i = 1, 2, \dots, m)$ خطياً في حد ذاته ، بمعنى أنه إذا كان

$$(2-1) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

و

$$(3-1) \quad g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$$

حيث يكون c_j ، a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) ثوابت معطاه .
وأي برنامج رياضي آخر يكون غير خطي . لذلك فإن مثال (1-1) يصف برنامجاً غير خطي بالنظر إلى صيغة Z

برامج الأعداد الصحيحة INTEGER PROGRAMS

تعتبر برامج الأعداد الصحيحة من البرامج الخطية ، بالإضافة إلى أن المتغيرات من المدخلات تكون أعداداً صحيحة . وليس من الضروري أن تكون معاملات (1-1) ، (2-1) ، (3-1) ، والثوابت في (1-1) أعداداً صحيحة ، ولكنها غالباً ما تكون كذلك .

البرامج التربيعية QUADRATIC PROGRAMS

تعتبر البرامج التربيعية من البرامج الرياضية التي تكون فيها القيود خطية — بمعنى أن دوال القيود تكون من الصيغة (1-3) — ولكن الهدف يكون من الصيغة

$$(4-1) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^n d_i x_i$$

حيث يكون c_{ij} ، d_i ثوابت معطاه .

ويعتبر المثال المعطى في (1-1) تربيعياً ، لأن كلاً من القيدين خطي ، والهدف من الصيغة (4-1) باعتبار $n = 2$ (متغيرين) ،
 $d_1 = d_2 = 0$ ، $c_{11} = 1$ ، $c_{12} = c_{21} = 0$ ، $c_{22} = 1$

صيغة المشكلة FORMULATION

تقرر مشكلات الأمثلية غالباً في صورة كلامية . وتحدد طريقة الحل في تصوير المشكلة في صورة نموذج لبرنامج رياضي ، ثم بعد ذلك حل هذا البرنامج بالأساليب الموصوفة في الفصول من 2 حتى 10 . ويوصى باستخدام المدخل التالي في تحويل المشكلة من الصورة الكلامية إلى البرنامج الرياضي .

الخطوة 1 : حدد الكميات التي تحتاج إلى القيم المثلى ، وعبر عنها بدوال رياضية . يساعد هذا الإجراء في تحديد المدخلات من المتغيرات .

الخطوة 2 : عرف المطالب ، والقيود ، والحدود ، وعبر عنها رياضياً . وتكون هذه المطالب القيود المفروضة .

الخطوة 3 : عبر عن أي ظروف أخرى غير ظاهرة ، ومثل هذه الظروف لم يشترط عليها بالقطع في المشكلة ، ولكنها تكون ظاهرة من الصورة الطبيعية في الحالة التي يُصمم لها النموذج . وبوجه عام .. فإنها تتضمن عدم وجود القيمة السلبية ، أو الالتزام بالأعداد الصحيحة في المدخلات من المتغيرات .

نبحث في كثير من البرامج الرياضية عن « حل ». وفي حالة وجود حلول مثل متساوية « فإن أحدها يكفي . ولا يوجد تفضيل بين هذه الحلول المثل المتساوية إذا لم تكن هناك قيود تفضيلية مشروطة .

مسائل محلولة

Solved Problems

١ - ١ يقوم محل الجزيرة بالقربة بعمل شطائر اللحم التقليدية بتكوين من لحم البقر ولحم الماعز . يحتوي لحم البقر على ٨٠ في المئة من اللحم ، و ٢٠ في المئة من الدهون . ويكلف المحل ٨٠ سنتاً لكل رطل ، ويحتوي لحم الماعز على ٦٨ في المئة من اللحم ، و ٣٢ في المئة من الدهون . ويكلف المحل ٦٠ سنتاً لكل رطل . ما هي كمية اللحم من كل نوع التي يجب أن يستخدمها المحل في كل رطل من شطائر اللحم إذا كان المطلوب تصغير التكلفة إلى الحد الأدنى ، والحفاظ على نسبة الدهون . بحيث لا تزيد عن ٢٥ في المئة ؟

الهدف هو تصغير التكلفة (بالسنت) ، z ، لكل رطل من شطائر اللحم حيث $z = 80$ ضعفاً وزن لحم البقر المستخدم ، بالإضافة إلى ٦٠ ضعفاً وزن لحم الماعز المستخدم .
وبتعريف

x_1 = وزن لحم البقر المستخدم في كل رطل من شطائر اللحم
 x_2 = وزن لحم الماعز المستخدم في كل رطل من شطائر اللحم

فيمكن تعريف الهدف كما يلي :

(١) $z = 80x_1 + 60x_2$: تصغير

سيحتوي كل رطل من شطائر اللحم على $0.20x_1$ رطل من الدهون من لحم البقر ، وكذلك على $0.32x_2$ رطل من الدهون من لحم الماعز . ويجب ألا يزيد المحتوى الكلي من الدهون في كل رطل من شطائر اللحم عن ٠.٢٥ رطلاً .
لذلك ،

(٢) $0.20x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25$

ويجب أن يكون وزن لحم البقر والماعز مجتمعين في كل رطل من شطائر اللحم هو رطلاً واحداً . لذلك فإن

(٣) $x_1 + x_2 = 1$

وفي النهاية فإن محل الجزيرة يجب ألا يستخدم كميات سالبة لكلا النوعين من اللحم ، كذلك فإن القيد غير الظاهري هما $x_1 \geq 0$ ، $x_2 \geq 0$. ويتجميع هذه الشروط مع (١) ، (٢) ، (٣) محصل على

(٤) $z = 80x_1 + 60x_2$: تصغير
 $0.20x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25$: علماً بأن
 $x_1 + x_2 = 1$

مع اعتبار أن كل المتغيرات ليست سالبة

يعتبر البرنامج (٤) برنامجاً خطياً . ولما كانت المتغيرات اثنين فقط ، فإنه يمكن الحل بالرسم .

٢ - ١ حل البرنامج الخطي (٤) للمسألة (١ - ١) بالرسم

انظر شكل (١ - ١) . المنطقة الممكنة — فئة النقط (x_1, x_2) يحققون جميع القيود بما فيها شروط اللاسلبية — هي المنطقة الممثلة بالخط الثقيل في الشكل . ولتحديد z^* ، أصغر قيمة لـ z ، فإننا نأخذ قيمة اختيارية لـ z ونرسم الرسم البياني بهذه القيمة . فباختيار $z = 70$ ثم $z = 75$ نحصل على الأهداف

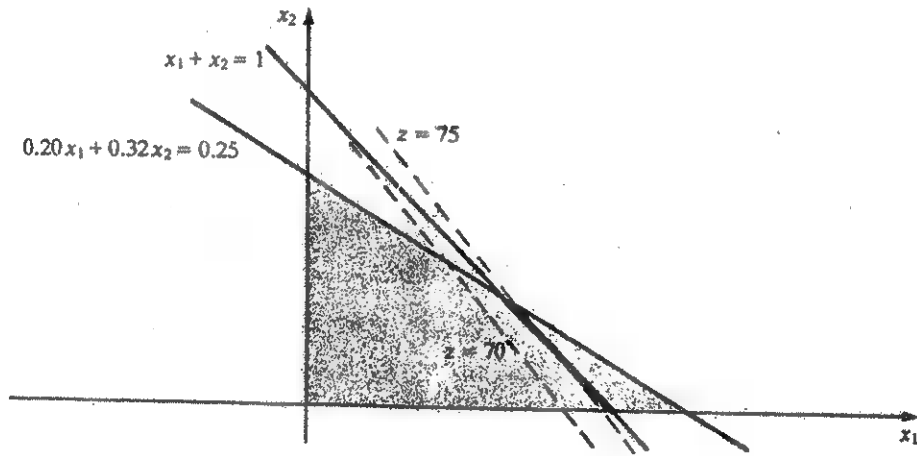
$$70 = 80x_1 + 60x_2 \quad \text{و} \quad 75 = 80x_1 + 60x_2$$

على التوالي . وهذه الرسومات البيانية هي الخطوط المنقطعة في الشكل (١ - ١) . ومن الملاحظ أن z^* ستُفرض عند أعلى نقطة في المنطقة الممكنة ، وهي تقاطع الخطين :

$$0.20x_1 + 0.32x_2 = 0.25 \quad \text{و} \quad x_1 + x_2 = 1$$

وبحل هذين المعادلتين آنياً ينتج $x_1^* = 7/12$ ، $x_2^* = 5/12$

$$z^* = 80(7/12) + 60(5/12) = 71.67$$



(شكل ١ - ١)

٣ - ١ يمتلك أحد صناع الأثاث 6 وحدات من الخشب ، و 28 ساعة من الوقت يستغلها في صنع شاشات ديكور . وقد باع نوعين منها في الماضي ، ولذلك فإنه سيقيد نفسه بهما . ويقدر أن النوع الأول يحتاج إلى وحدتين من الخشب و7 ساعات « بينما يحتاج النوع الثاني وحدة واحدة من الخشب و8 ساعات . وتقدر أثمان النوعين بـ 120 دولاراً ، و80 دولاراً على التوالي . كم عدد شاشات الديكور من كل نوع يجب أن يقوم بتصنيعها إذا أراد تعظيم العائد من المبيعات .

الهدف هو تعظيم عائد المبيعات (بالدولار) والذي يرمز له بالرمز z :
 $z \equiv 120$ ضعفاً العدد من النوع الأول من شاشات الديكور المنتجة ، بالإضافة إلى 80 ضعفاً العدد من النوع الثاني من الشاشات المنتجة .

إذا كانت :

العدد من النوع الأول من الشاشات المنتجة $x_1 \equiv$

العدد من النوع الثاني من الشاشات المنتجة $x_2 \equiv$

نمبر عن الهدف كما يلي

$$(1) \quad z = 120x_1 + 80x_2 \quad \text{تعظيم}$$

ويقع على الصانع قيد في كمية الخشب . ونظراً لاحتياج كل شاشة من النوع الأول إلى وحدتين من الخشب ، فإن $2x_1$ وحدة خشب يجب أن تخصص لهم ، وبالمثل ، $1x_2$ وحدة خشب يجب أن تخصص لكل شاشة من النوع الثاني .

من ثم فإن قيد الخشب يكون :

$$(2) \quad 2x_1 + x_2 \leq 6$$

كما يتعرض الصانع إلى قيد الزمن ، تستهلك شاشات النوع الأول $7x_1$ ساعة ، وشاشات النوع الثاني $8x_2$ ساعة ، لذلك :

$$(3) \quad 7x_1 + 8x_2 \leq 28$$

ومن الواضح أنه لا يمكن إنتاج كميات سالبة من الشاشات ، لذلك فإن القيدين غير الظاهرين هما $x_1 \geq 0$ و $x_2 \geq 0$. وحيث إنه لا يوجد أى عائد من الاستكمال الجزئي للشاشات ، فإن هناك قيداً آخر غير واضح هو أن x_1 و x_2 تكونان أعداداً صحيحة .

وبتجميع هذه القيود غير الواضحة مع (1) ، (2) ، و (3) نحصل على البرنامج الرياضي :

$$(4) \quad \begin{aligned} z &= 120x_1 + 80x_2 & \text{تعظيم} \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 & \text{علماً بأن :} \\ 7x_1 + 8x_2 &\leq 28 \end{aligned}$$

باعتبار أن كل المتغيرات غير سلبية وأعداد صحيحة .

يعتبر البرنامج (4) برنامجاً للأعداد الصحيحة . ولما كان هناك متغيران فقط ، فإنه يمكن الحل بالرسم .

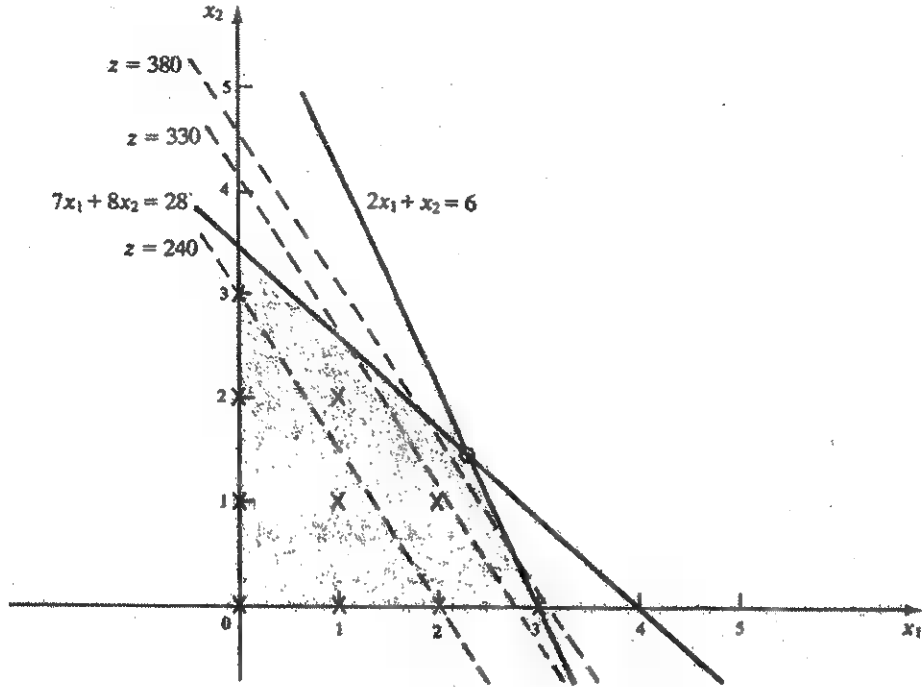
أوجد الحل بالرسم لبرنامج الأعداد الصحيحة في المسألة ١ - ٣

انظر شكل (١ - ٢) . تحدد المنطقة الممكنة مجموعة نقاط الأعداد الصحيحة (الموضحة بعلامة \times) داخل المنطقة المظلمة . وتبين المنطقة المنقطة خطوط الدالة الهدفية عندما تكون z اختيارية ، وتعطى القيم 240, 330, 380 . ومن الملاحظ أن خط z عند النقطة (3, 0) سيعطى الحد الأعلى المطلوب . لذلك فإن صانع الأثاث يجب أن يصنع 3 وحدات من النوع الأول فقط ، ولا يصنع أى وحدة من النوع الثاني للحصول على أكبر عائد .

$$z^* = 120(3) + 80(0) = \$360$$

من الملاحظ أن هذا الحل الأمثل لا يمكن تحقيقه بحل المسألة كبرنامج خطي (نفس المسألة دون اعتبار قيد الأعداد الصحيحة) ، ثم إيجاد أقرب نقطة أعداد صحيحة ممكنة . وفي الحقيقة فإن المنطقة الممكنة للمسألة كبرنامج خطي تظهر مظلمة في

الشكل (٢ - ١) . لذلك فإن الحل الأمثل يحدث عند نقطة الدائرة الركنية « ولكن أقرب نقطة أعداد صحيحة هي (2, 1) ، وقيمة الدالة الهدفية $z = 120(2) + 80(1) = \$320$ ، أو أقل من النقطة الحقيقية .
تعطى المسألة رقم (٧ - ٨) حلاً آخر للمسألة (٣ - ١) .



شكل (٢ - ١)

٥ - ١ تقوم شركة مناجم بتشغيل ثلاثة مناجم بفرجينيا . ويُفصل الخام من كل منجم إلى درجتين قبل الشحن . وبين الجدول التالي الطاقة الإنتاجية اليومية للمناجم ، وكذلك التكلفة اليومية

	خام عالي الجودة طن / يوم	خام قليل الجودة طن / يوم	تكلفة التشغيل ١٠٠٠ دولار / يوم
I منجم	4	4	■
II منجم	6	4	22
III منجم	1	6	18

وقد التزمت الشركة بتسليم 54 طناً من الخام العالي الجودة ، و 65 طناً من القليل الجودة في نهاية كل أسبوع . كما أن للشركة تعاقدات مع العمال تضمن لها تواجد العمال بطول اليوم أو جزء من اليوم أثناء فتح المنجم . وحدد عدد الأيام التي يجب أن يعملها كل منجم خلال الأسبوع المقبل للوفاء بالتزامات الشركة بأقل تكلفة ممكنة ؟

افرض x_1, x_2, x_3 على التوالي تمثل عدد الأيام التي سيعمل فيها المناجم رقم ١ ، ٢ ، ٣ خلال الأسبوع المقبل ، لذلك

فإن الهدف (مقاساً بوحدة ألف دولار) هو

$$(1) \quad z = 20x_1 + 22x_2 + 18x_3 \quad \text{تعظيم}$$

المطلوب من الخام العالي الجودة هو :

$$(2) \quad 4x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 54$$

والمطلوب من الخام القليل الجودة هو :

$$(3) \quad 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 65$$

ولما كان أى من المناجم سيعمل عدداً سالباً من الأيام ، فإن هناك ثلاثة قيود غير واضحة هي :
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ ، بالإضافة إلى ذلك .. لما كان أى من المناجم لا يعمل أكثر من سبعة أيام ، فإن هناك ثلاثة قيود غير واضحة هي : $x_1 \leq 7, x_2 \leq 7, x_3 \leq 7$. وفى النهاية فإنه بالنظر إلى عقود العمال ، فإن الشركة لا تجد أى فائدة من تشغيل العمال أجزاء من اليوم ، وبالتالي فإن : x_1, x_2, x_3 من المطلوب أن تكون أعداداً صحيحة . ويتجميع هذه القيود غير الواضحة مع (1) ، (2) ، (3) نحصل على البرنامج الرياضى :

$$z = 20x_1 + 22x_2 + 18x_3 \quad \text{تصغير}$$

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 54 \quad \text{علماً بأن :}$$

$$4x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 65$$

$$x_1 \leq 7$$

$$x_2 \leq 7$$

$$x_3 \leq 7$$

كل المتغيرات غير سالبة وأعداد صحيحة .

ويعتبر النموذج (4) نموذجاً للأعداد الصحيحة . ويحدد أسلوب حله فى المسألة (٧ - ٤) .

٦ - ١ يبدأ أحد الصناع الأسبوع الأخير من الإنتاج فى تصنيع صناديق خشبية لأجهزة التلفزيون موديلات I, II, III, IV . وكل منها يجب أن يُجمع ثم يعمل له الديكور اللازم . وتحتاج هذه الموديلات إلى ٥ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ساعات على التوالي للتجميع ، وكذلك ٢ ، ١.٥ ، ٣ ، ٣ ساعات على التوالي لعمل الديكورات . وتقدر الأرباح من الموديلات المختلفة بـ ٧ ، ٦ ، ٩ دولارات على التوالي . والوقت المتاح للصانع لتجميع هذه المنتجات هو ٣٠ ٠٠٠ ساعة (٧٥٠ عامل تجميع يعملون ٤٠ ساعة / أسبوع) وكذلك ٢٠ ٠٠٠ ساعة وقت متاح لعمل الديكورات (٥٠٠ عامل ديكور يعملون ٤٠ ساعة / أسبوع) . ماهو العدد الذى ينتجه الصانع خلال هذا الأسبوع الأخير لتعظيم الربح ؟ مع افتراض أن كل الوحدات المنتجة ستباع .

الهدف هو تعظيم الربح (بالدولار) ، والذي يرمز له بالرمز z ، مع اعتبار أن :

$$x_1 = \text{العدد من الموديل رقم I المنتج فى الأسبوع}$$

$$x_2 = \text{العدد من الموديل رقم II المنتج فى الأسبوع}$$

$$x_3 = \text{العدد من الموديل رقم III المنتج فى الأسبوع}$$

العدد من الموديل رقم IV المنتج في الأسبوع x_4

ويمكن صياغة الهدف على النحو التالي :

(١) $z = 7x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 9x_4$: تعظيم

وتوجد قيود على الوقت المتاح الكلي للتجميع « وأيضاً لعمل الديكورات يمكن أن نضعها في النموذج :

(٢) $4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 30\,000$

(٣) $2x_1 + 1.5x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 20\,000$

وحيث إنه لا يمكن إنتاج كميات سالبة ، فإن هناك أربعة قيود غير واضحة هي : $x_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) . وبالإضافة إلى ذلك « حيث إن هذا الأسبوع هو الأخير في الإنتاج ، فإن المنتجات غير المنتجة في نهاية الأسبوع ستظل بدون تحقيق أى عائد . ولتجنب هذه الاحتمالات ، فإنه من المطلوب تحديد قيمة صحيحة لكل متغير . وبجميع هذه القيود غير الواضحة مع (١) ، (٢) ، (٣) نحصل على البرنامج الرياضي :

تعظيم : $z = 7x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 9x_4$

(٤) علماً بأن : $4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 30\,000$

$2x_1 + 1.5x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 20\,000$

كل المتغيرات غير سلبية وأعداد صحيحة .

النموذج (٤) نموذج أعداد صحيحة ؛ وحله محدد في المسألة رقم ٦ - ٤ .

١ - ٧ تنتج شركة أزيك للتقطير نوعين من الجازولين عادى وممتاز ، وتيمهما لسلسلة مراكز الخدمة بها بسعر 12 ، 14 دولاراً للبرميل على التوالي . ويخلط النوعان من مستودعات الشركة لزيوت الخدمة ومستودعات الزيوت الأخرى لمقابلة المواصفات التالية :

	أقل طلب برميل / أسبوع	أعلى طلب برميل / أسبوع	رقم أكيك القل	ضغط البخار الأعلى
العادى	50 000	100 000	88	23
الممتاز	5 000	20 000	93	23

خصائص الزيوت في المستودعات هي :

البيكلمه برميل ■	الخزون برميل	رقم الأكبيك	ضغط البخار
8	40 000	87	25
15	60 000	98	15

مستودعات زيوت الخدمة
مستودعات زيوت أخرى

ماهى الكميات من نوعى الزيوت التى يجب أن تخلطها الشركة مع نوعى الجازولين لتعظيم الربح الأسبوعى ؟

اعتبر أن :

$x_1 \equiv$ عدد براميل زيت الخدمة المخلوطة مع الجازولين العادى

$x_2 \equiv$ عدد براميل الزيوت الأخرى المخلوطة مع الجازولين العادى

$x_3 \equiv$ عدد براميل زيت الخدمة المخلوطة مع الجازولين الممتاز

$x_4 \equiv$ عدد براميل الزيوت الأخرى المخلوطة مع الجازولين الممتاز

يمكن إنتاج كمية $x_1 + x_2$ من الجازولين العادى تحقق عائداً $12(x_1 + x_2)$ ؛ ويمكن إنتاج كمية $x_3 + x_4$ وذلك من الجازولين الممتاز تحقق عائداً $14(x_3 + x_4)$. وتستخدم كمية زيت خدمة $x_1 + x_3$ بتكلفة $8(x_1 + x_3)$ وكمية زيوت أخرى $x_2 + x_4$ بتكلفة $15(x_2 + x_4)$. الربح الكلى z يقدر بالعائد الكلى ، مطروحة منه التكلفة :

$$(1) \quad z = 12(x_1 + x_2) + 14(x_3 + x_4) - 8(x_1 + x_3) - 15(x_2 + x_4) \\ = 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4$$

وهناك قيوداً مفروضة على الإنتاج مثل الطلب ، إمكانية الامداد ومواصفات الخلط . وعن حالة الطلب :

$$(2) \quad x_1 + x_2 \leq 100\,000 \quad (\text{أعلى طلب للعادى}) \\ (3) \quad x_3 + x_4 \leq 20\,000 \quad (\text{أعلى طلب للممتاز}) \\ (4) \quad x_1 + x_2 \geq 50\,000 \quad (\text{أقل طلب للعادى}) \\ (5) \quad x_3 + x_4 \geq 5\,000 \quad (\text{أقل طلب للممتاز})$$

وعن إمكانية الإمداد :

$$(6) \quad x_1 + x_3 \leq 40\,000 \quad (\text{زيوت خدمة}) \\ (7) \quad x_2 + x_4 \leq 60\,000 \quad (\text{زيوت أخرى})$$

تحدد مكونات الخلط رقم الأكتين ، طبقاً لنسبتها المئوية بالوزن ، وبالمثل بالنسبة لضغط البخار ، لذلك فإن رقم الأكتين للعادى هو :

$$87 \frac{x_1}{x_1 + x_2} + 98 \frac{x_2}{x_1 + x_2}$$

والمطلب ليكون هذا الرقم هو ٨٨ على الأقل يؤدي إلى :

$$(8) \quad x_1 - 10x_2 \leq 0$$

وبالمثل ؛ نحصل على :

$$(9) \quad 6x_3 - 5x_4 \leq 0 \quad (\text{قيد رقم أكتين الممتاز}) \\ (10) \quad 2x_1 - 8x_2 \leq 0 \quad (\text{قيد ضغط البخار للعادى}) \\ (11) \quad 2x_3 - 8x_4 \leq 0 \quad (\text{قيد ضغط البخار للممتاز})$$

بضم القيود من (١) حتى (١١) مع الأربعة قيود اللاسلبية (غير الواضحة) للمتغيرات الأربعة ، نحصل على البرنامج الرياضى :

$$\begin{aligned}
 z &= 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 & \text{تعظيم} \\
 x_1 + x_2 &\leq 100\,000 & \text{علماً بأن :} \\
 x_3 + x_4 &\leq 20\,000 \\
 x_1 + x_3 &\leq 40\,000 \\
 x_2 + x_4 &\leq 60\,000 \\
 x_1 - 10x_2 &\leq \blacksquare \\
 6x_3 - 5x_4 &\leq 0 \\
 2x_1 - 8x_2 &\leq 0 \\
 2x_3 - 8x_4 &\leq 0 \\
 x_1 + x_2 &\geq 50\,000 \\
 x_3 + x_4 &\geq 5\,000 \\
 &\text{كل المتغيرات غير سلبية}
 \end{aligned}$$

(١٢)

النموذج (١٢) برنامج خطي وحله قد حُدد في المسألة (٤ - ٧)

٨ - ١ يعتزم أحد الرحالة القيام برحلة إلى معسكر ، ويرغب الرحالة في أخذ « أشياء معه » ولكن مجموعها يزيد على ٦٠ رطلاً ، وهو الوزن الذي يستطيع حمله . وللمساعدة في حل هذه المشكلة فقد رتب الأشياء ترتيباً تصاعدياً طبقاً لأهميتها بالنسبة له :

الشيء	1	2	3	4	5
الوزن بالرطل	52	23	35	15	7
القيمة	100	60	70	15	15

ماهى الأشياء التى يجب أن يأخذها معه لتعظيم القيمة الإجمالية ، دون زيادة الوزن الكلى عن المحدد .

افرض x_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) تمثل الكمية من i التى يأخذها معه . يمكن صياغة الهدف على النحو التالى :

$$z = 100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4 + 15x_5 \quad \text{تعظيم} \quad (١)$$

قيّد الوزن هو :

$$52x_1 + 23x_2 + 35x_3 + 15x_4 + 7x_5 \leq 60 \quad (٢)$$

ولما كان أى شيء من الأشياء سيؤخذ أولاً يؤخذ كلية ، فإن قيمة أى متغير ستكون صفراً أو واحداً . ويطبق هذا الشرط إذا كانت قيم المتغيرات لاسلبية « وليست أكبر من واحد » وتكون أعداداً صحيحة . يضم هذه القيود مع (١) ، (٢) نحصل على البرنامج الرياضى :

$$\begin{aligned}
 z &= 100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4 + 15x_5 & \text{تعظيم} \\
 52x_1 + 23x_2 + 35x_3 + 15x_4 + 7x_5 &\leq 60 & \text{علماً بأن :} \\
 x_1 &\leq 1 \\
 x_2 &\leq 1 \\
 x_3 &\leq 1 \\
 x_4 &\leq 1 \\
 x_5 &\leq 1 \\
 &\text{كل المتغيرات لاسلبية وصحيحة}
 \end{aligned}$$

(٣)

النموذج (٣) برنامج أعداد صحيحة ، وحله مُحدد في المسألة (٦ - ٧) ، ومرة أخرى في المسألة (١٤ - ١٦) .

٩ - ١ سوق تجارى يعمل ٢٤ ساعة يحتاج الأعداد التالية من عاملى الخزينة كحد أدنى

الفترة	1	2	3	4	5	6
الوقت من اليوم ساعة ٢٤	3-7	7-11	11-15	15-19	19-23	23-3
العدد المطلوب حد أدنى	7	20	14	20	10	5

تتبع الفترة رقم 6 الفترة رقم 1 مباشرة . يعمل كل عامل خزينة ٨ ساعات متتالية ابتداءً من أى فترة من الفترات الست .
حدد ورقة تشغيل موظفين يومية بأقل عدد ممكن منهم وقضى بالمتطلبات .

افرض x_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) لتساوى عدد عاملى الخزينة الذين يبدأون العمل فى أول الفترة i . يمكن صياغة المشكلة فى البرنامج الرياضى .

$$\begin{aligned}
 z &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & : \text{تصغير} \\
 x_1 + x_6 &\geq 7 & : \text{علماً بأن} \\
 x_1 + x_2 &\geq 20 \\
 x_2 + x_3 &\geq 14 \\
 x_3 + x_4 &\geq 20 \\
 x_4 + x_5 &\geq 10 \\
 x_5 + x_6 &\geq 5
 \end{aligned}$$

(١) كل المتغيرات لاسلبية وصحيحة

النموذج (١) برنامج أعداد صحيحة ، وحله محدد فى المسألة (٦ - ٣) .

١٠ - ١ يمتلك محل جبن 20 رطلاً من خليط الفواكه ، و 60 رطلاً من الجبن الفالى الثمن سيقوم باستخدامها فى تصنيع نوعين من الجبن ، نوع ممتاز وآخر عادى ، وذلك أثناء أسبوع العيد .

يتكون كل رطل من الجبن الممتاز من 0.2 رطلاً من خليط الفواكه ، و 0.8 رطلاً من الجبن الممتاز ، بينما يتكون كل رطل من الجبن العادى من 0.2 رطلاً من خليط الفواكه ، و 0.3 رطلاً من الجبن الممتاز ، وكذلك 0.5 رطلاً من جبن آخر أرخص ثمناً ومتوافر بالسوق . وقد وجد المحل من سياسات التسعير السابقة أن الاحتياج من كل نوع من الجبن المنتج هو :

$$D_1 = 190 - 25P_1 \quad \text{and} \quad D_2 = 250 - 50P_2$$

حيث إن D ترمز إلى الاحتياج (بالرطل) ، و P ترمز إلى السعر (دولار لكل رطل) ، والرموز 2,1 تدل على الممتاز والعادى على التوالى . ماهى كمية الجبن من كل نوع يقوم بإعدادها المحل ، وما هو الثمن المحدد إذا أراد زيادة الدخل إلى الحد الأعلى ، دون ترك أى منتج بالخزن فى نهاية أسبوع العيد ؟

افرض إنتاج x_1 رطلاً من الجبن الممتاز ، و x_2 رطلاً من العادي ، ومع افتراض بيع كل الإنتاج « فإن الهدف يكون :

$$(1) \quad z = P_1x_1 + P_2x_2 \quad \text{تعظيم}$$

والآن فإن كل الإنتاج المطلوب سيباع (ولن تبقى أى كمية فى المخزن) إذا كان الإنتاج لن يزيد عن الاحتياج ، بمعنى أنه إذا كانت $x_1 \leq D_1$ و $x_2 \leq D_2$ ، وهذا يعطى القيود :

$$(2) \quad x_1 + 25P_1 \leq 190 \quad \text{و} \quad x_2 + 50P_2 \leq 250$$

من كميات خليط الفواكة المتاحة :

$$(3) \quad 0.2x_1 + 0.2x_2 \leq 20$$

ومن كميات الجبن الغالى الثمن المتاحة

$$(4) \quad 0.8x_1 + 0.3x_2 \leq 60$$

ليس هناك أى قيد على كميات الجبن الآخر الأرخص ثمناً ، حيث يمتلك المحل كل الكميات المطلوبة ، وفى النهاية فإن كلاً من الإنتاج والأثمان لا يمكن أن تكون سالبة ، لذلك فإن أربعة قيود غير واضحة هي : $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, P_1 \geq 0, P_2 \geq 0$.
بتجميع هذه الشروط من (1) حتى (4) نحصل على البرنامج الرياضى :

$$(5) \quad \begin{array}{ll} z = P_1x_1 + P_2x_2 & : \text{تعظيم} \\ 0.2x_1 + 0.2x_2 & \leq 20 \quad \text{علماً بأن :} \\ 0.8x_1 + 0.3x_2 & \leq 60 \\ x_1 + 25P_1 & \leq 190 \\ x_2 + 50P_2 & \leq 250 \end{array}$$

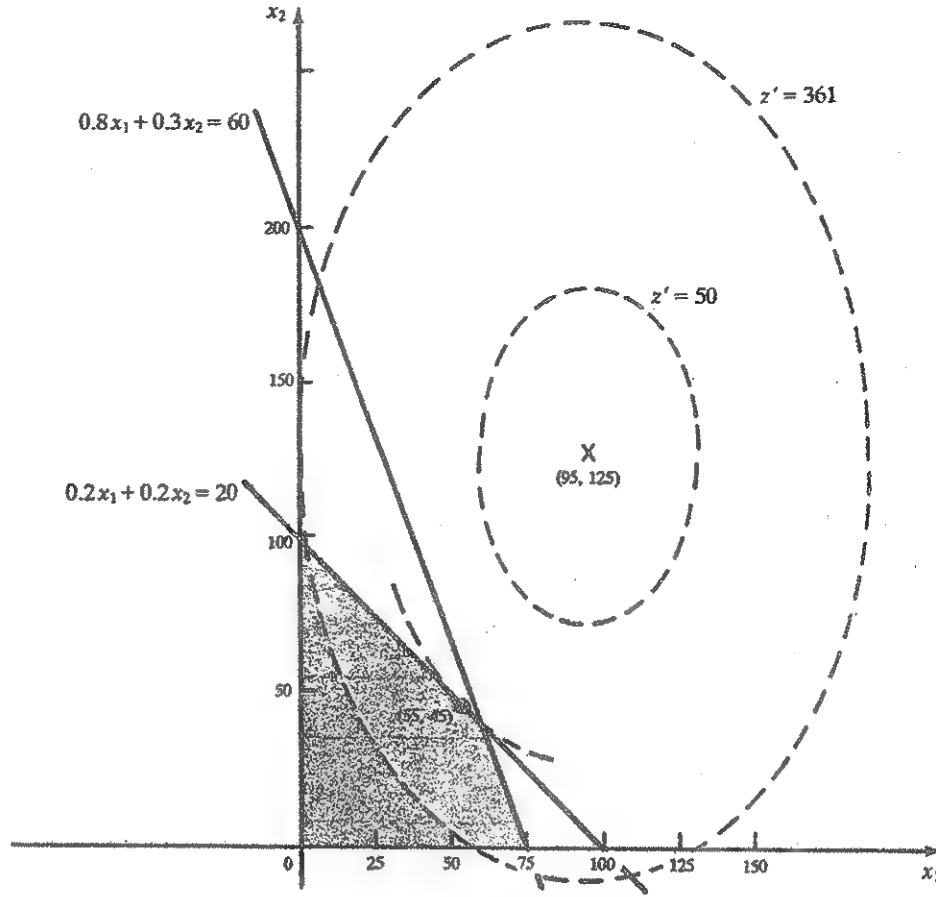
كل المتغيرات لاسلبية

النموذج (5) برنامج تربيعى فى المتغيرات x_1, x_2, P_1, P_2 ، ويمكن تبسيطه إذا علمنا أن لأى قيمة ثابتة موجبة x_2 و x_1 تزيد الدالة الهدفية كلما زاد P_1 أو P_2 ، لذلك للحصول على أكبر قيمة P_1 P_2 يجب أن يصبح الشرط (2) معادلة ، وبذلك يمكن حذف x_1 و x_2 من الدالة الهدفية . نحصل بعد ذلك على برنامج تربيعى فى

$$(6) \quad \begin{array}{ll} z = (7.6 - 0.04x_1)x_1 + (5 - 0.02x_2)x_2 & : \text{تعظيم} \\ 0.2x_1 + 0.2x_2 \leq 20 & : \text{علماً بأن :} \\ 0.8x_1 + 0.3x_2 \leq 60 \end{array}$$

حيث x_1 و x_2 متغيرات لاسلبية

حيث يمكن حله بسهولة بواسطة الرسم



شكل ١ - ٣

١١ - ١ حل بالرسم البرنامج التربيعي (٦) في المسألة ١ - ١٠

لأغراض الرسم « فإنه من المناسب استكمال المربع في الدالة الهدفية

$$z = 673.5 - 0.04(x_1 - 95)^2 - 0.02(x_2 - 125)^2 \quad \text{تعظيم}$$

وهذا يكافئ :

$$(١) \quad z' = 0.04(x_1 - 95)^2 + 0.02(x_2 - 125)^2 \quad \text{تصغير}$$

ولما كانت القيود خطية « فإن المنطقة المحددة تكون محدودة بخطوط مستقيمة ، وتظهر مظللة في الشكل (١ - ٣) . ولأى قيمة محددة z' تحدد المعادلة (١) شكلاً بيضاوياً مركزة (٩٥ ، ١٢٥) ، وشكلين بيضاويين يظهران في الشكل (١ - ٣) كمنحنيات منقطة . القيمة الصغرى z' تناظر هذا المنحنى البيضاوي المحدد بالمعادلة (١) الذي يلامس الخط :

$$(٢) \quad 0.2x_1 + 0.2x_2 = 20$$

لإيجاد نقطة التلامس . يمكن مساواة الميل للخط والبيضاوي

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -1 \quad \text{and} \quad \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{2(x_1 - 95)}{x_2 - 125}$$

وبالتفاضل الضمني لـ (١) ، (٢) على التوالي نحصل على :

$$x_2 = 2x_1 - 65$$

(٣)

وبحل (٢) ، (٣) آتياً نحصل على الحل الأمثل للمسألة ١ - ١٠

$$x_1^* = 55 \text{ (رطل جين ممتاز)}$$

$$x_2^* = 45 \text{ (رطل جين عادى)}$$

١٢ - ١ يمتلك صانع بلاستيك 1200 صندوق من المادة الشفافة في المخزن في أحد المصانع « و 1000 صندوق في مصنع آخر . تلقى الصانع طلبات إنتاج من ثلاثة عملاء بالكميات 1000, 700, 500 صندوق على التوالي . تكلفة نقل الوحدة الواحدة (سنت / صندوق) من المصانع إلى العملاء هي كما على :

	عميل ١	عميل ٢	عميل ٣
مصنع ١	14	13	11
مصنع ٢	13	13	12

حدد جدول تكلفة النقل الصغرى التي تفي بالطلبات من المخازن الحالية .

بكتابة x_{ij} ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3$) للدلالة على عدد الصناديق المنقولة من المصنع i إلى العميل j نحصل على الهدف (بالسنت)

$$z = 14x_{11} + 13x_{12} + 11x_{13} + 13x_{21} + 13x_{22} + 12x_{23} \text{ تصغير}$$

ولما كانت الكميات المنقولة من المصانع لا تزيد عن الموجودات

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1200 \text{ (منقولات من مصنع ١)}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1000 \text{ (منقولات من مصنع ٢)}$$

بالإضافة إلى ذلك .. فإن الكميات الكلية المرسلة إلى العملاء يجب أن تفي باحتياجاتهم « ومن ثم :

$$x_{11} + x_{21} = 1000 \text{ (منقولات إلى عميل ١)}$$

$$x_{12} + x_{22} = 700 \text{ (منقولات إلى عميل ٢)}$$

$$x_{13} + x_{23} = 500 \text{ (منقولات إلى عميل ٣)}$$

وحيث إن الموجودات الكلية هي 1200 + 1000 مساوية للاحتياج 1000 + 700 + 500 ، وكل متباينة من القيود يمكن تحويلها إلى متساوية . وبهذا ، وباعتبار الشروط غير الواضحة أنه لا توجد منقولات سالبة ، وأنه لا يمكن فصل صندوق منفرد للنقل ، فإننا نحصل على البرنامج الرياضى :

$$z = 14x_{11} + 13x_{12} + 11x_{13} + 13x_{21} + 13x_{22} + 12x_{23} \quad \text{تصغير}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1200 \quad \text{علماً بأن :}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1000$$

$$x_{11} + x_{21} = 1000$$

$$x_{12} + x_{22} = 700$$

$$x_{13} + x_{23} = 500$$

(١)

كل المتغيرات لا سلبية وصحيحة

النموذج (١) برنامج أعداد صحيحة ، وحله محدد في المسألة ٧ - ٣ ، ومرة أخرى في المسألة ٨ - ٦ .

١٣ - ١ يحتاج فريق سباحة ٤٠٠ متر تتابع إلى أربعة سباحين يسمح كل منهم ١٠٠ متر ظهر ، صدر ، وفراشة ، وحرّة . يتوفر لدى المدرب ستة سباحين مسرعين يسمحون بأزمنة متوقعة (بالثواني) منفردين كما في الجدول (١ - ١)

	سباحة منفردة ١ ظهر	سباحة منفردة ٢ صدر	سباحة منفردة ٣ فراشة	سباحة منفردة ٤ حرّة
السباح ١	65	73	63	57
السباح ٢	67	70	65	58
السباح ٣	68	72	69	55
السباح ٤	67	75	70	59
السباح ٥	71	69	75	57
السباح ٦	69	71	66	59

جدول (١ - ١)

كيف يمكن للمدرب تعيين الأربعة سباحين للسباق لتصغير مجموع زمن السباق ؟

الهدف هو تصغير زمن السباق الكلى الذى يرمز له بالرمز z ، باستخدام المتغيرات الثنائية الترميز x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, 3, 4$) للدلالة على عدد المرات التى يعين فيها السباح i فى السباحة j يمكن صياغة الهدف كما يلى :

$$z = 65x_{11} + 73x_{12} + 63x_{13} + 57x_{14} + 67x_{21} + \dots + 66x_{63} + 59x_{64} \quad \text{تصغير}$$

وحيث إنه لا يمكن تعيين أى سباح لأكثر من سباحة واحدة :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} \leq 1$$

وحيث إن كل سباحة منفردة ينحصر لها سباح واحد فقط ، نحصل على :

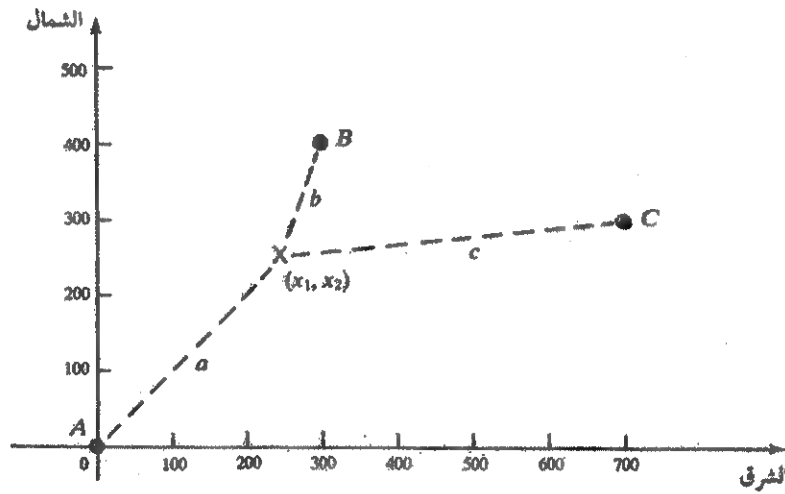
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} + x_{64} = 1$$

باجتماع هذه العشرة قيود مع الهدف والشروط غير الواضحة ، وهي أن المتغيرات لاسلبية وصحيحة يتكون برنامج أعداد صحيحة ، يتحدد حله في المسألة ٩ - ٤ .

١٤ - ١

ترغب إحدى شركات البترول في بناء محطة تكرير يتم إمدادها من ثلاثة موانئ . يقع الميناء ■ ٣٠٠ كم شرقاً ، و ٤٠٠ كم شمالاً من الميناء A ، بينما يقع الميناء C ٤٠٠ كم شرقاً ، و ١٠٠ كم جنوباً من الميناء ■ . حدد موقع محطة التكرير ■ بحيث تكون الكمية الكلية من الأنابيب المطلوبة للتوصيل بين محطة التكرير وهذه الموانئ أقل ما يمكن .



شكل ١ - ٤

الهدف هو جعل مجموع المسافات بين محطة التكرير وبين الموانئ الثلاثة أقل ما يمكن . وللمساعدة في حساب هذا المجموع ننشئ نظاماً إحداثياً شكل (١ - ٤) فيه يكون الميناء A هو نقطة الأصل . وفي هذا النظام تكون للميناء ■ الإحداثيات (300, 400) ، والميناء C الإحداثيات (700, 300) .

إذا مثلت (x_1, x_2) الاحداثيات غير المعروفة لمحطة التكرير ، فإن الهدف يكون :

$$z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{(x_1 - 300)^2 + (x_2 - 400)^2} + \sqrt{(x_1 - 700)^2 + (x_2 - 300)^2} \quad \text{تصغير :}$$

ولا توجد قيود على إحداثيات محطة التكرير ، أو أي شروط غير واضحة ، فمثلاً القيمة السالبة للمتغير x_1 تعني فقط أن محطة التكرير يجب أن تقع غرب الميناء A . والمعادلة (١) معادلة غير خطية ، وغير مقيدة ، وتمثل برنامجاً رياضياً . وحلها محدد في المسألة (١١ - ١١) . انظر المسألة (١ - ٢٦) أيضاً .

١٥ - ١

يرغب أحد الأفراد في استثمار مبلغ 4000 دولار ، وأمامه ثلاث فرص لهذا الاستثمار . تحتاج كل فرصة منهم لدفع تأمين 1000

دولار . ويمكن للمستثمر أن يخصص كل نقوده لفرصة استثمار واحدة ، أو يجزئ النقود بينهم جميعاً . والجدول التالي يبين العائد المتوقع :

	الدولارات المستثمرة				
	0	1000	2000	3000	4000
العائد من الفرصة رقم ١	0	2000	5000	6000	7000
العائد من الفرصة رقم ٢	0	1000	3000	6000	7000
العائد من الفرصة رقم ٣	0	1000	4000	5000	8000

ما هي كمية النقود التي يجب استثمارها في كل فرصة ، حتى يمكن الحصول على أكبر عائد ممكن ؟

الهدف هو تعظيم العائد الكلي الذي يرمز له بالرمز z ، وهو عبارة عن مجموع العائد من كل فرصة . وتقيّد كل الاستثمارات بأنها مضروبيات أعداد صحيحة للقيمة ١٠٠٠ دولار . إذا افترضنا $f_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) تمثل العائد (بالآلاف دولار) للفرصة i عندما يستثمر x من النقود فيها ، فيمكن إعادة كتابة جدول العائد كما في الجدول (١ - ٢)

$x \backslash f$	0	1	2	3	4
$f_1(x)$	0	2	5	6	7
$f_2(x)$	0	1	3	6	7
$f_3(x)$	0	1	4	5	8

جدول (١ - ٢)

بتعريف x_i ($i = 1, 2, 3$) بأنه عدد وحدات النقود المستثمرة في الفرصة i ، فإنه يمكن صياغة الهدف كما يلي :

$$(١) \quad z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \quad : \quad \text{تعظيم}$$

وحيث إن المستثمر عنده ٤ وحدات من النقود فقط ليستثمرها :

$$(٢) \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

وبإضافة (١) ، (٢) إلى القيود غير الواضحة x_1, x_2, x_3 ، وهي غير سالبة وأعداد صحيحة ، نحصل على البرنامج الرياضي :

$$(٣) \quad \begin{aligned} z &= f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) & : & \text{تعظيم} \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 4 & : & \text{علماً بأن} \end{aligned}$$

كل المتغيرات غير سالبة وصحيحة

برسم $f_i(x)$ مع x لكل دالة سيعطى رسماً بيانياً ليس بالخط المستقيم ، لذلك فإن النموذج (٣) هو برنامج غير خطي ، وحله محدد في المسألة (١٤ - ١)

مسائل مكتملة

Supplementary Problems

ضع صيغة البرامج الرياضية للمسائل من (١ - ١٦) إلى (١ - ٢٥) ولا تحلها .

١٦ - ١

صمم فاي كلاين لعبتين يدويتين للكبار يبيعهما للمحلات في بلده . وبالرغم من أن الاحتياج لهذه الألعاب يزيد عن طاقة إنتاجه ، فقد استمر فاي كلاين العمل وحده في حدود ٥٠ ساعة كل أسبوع . تأخذ اللعبة الأولى ٣٥ ساعة للإنتاج ، وتدر ربحاً قدره ٢٨ دولاراً ، بينما اللعبة الثانية تحتاج إلى ٤ ساعات و تدر ربحاً قدره ٣١ دولاراً . كم لعبة من كل نوع يجب أن ينتجها السيد كلاين أسبوعياً حتى يحقق أكبر ربح ممكن ؟

١٧ - ١

قرر محل لبيع وتربية الحيوانات أن كل حيوان يجب أن يحصل على ٧٠ وحدة من البروتين ، و ١٠٠ وحدة من الكربوهيدرات و ٢٠ وحدة من الدهون يومياً . وإذا كان المحل عنده ستة أنواع من الغذاء موضحة في الجدول (١ - ٣) ، فما هو خليط أنواع الغذاء الذي يفي بمتطلبات أقل تكلفة للمحل ؟

الغذاء	بروتين وحدة / أوقية	كربوهيدرات وحدة / أوقية	دهون أوقية / وحدة	تكلفة سنت/أوقية
A	20	50	4	2
B	30	30	9	3
C	40	20	11	5
D	40	25	10	6
E	45	50	9	8
F	30	20	10	8

جدول (١ - ٣)

١٨ - ١

تنتج إحدى الشركات الصناعية المحلية أربعة منتجات معدنية ، يحتاج كل منها إلى تشغيل ، وتلميع ، وتجميع . كما يحتاج كل منها إلى الأزمنة (بالساعات) الموضحة :

	التجميع بالساعة	التلميع بالساعة	التشغيل بالساعة
المنتج ١	2	1	3
المنتج ٢	1	1	2
المنتج ٣	2	2	2
المنتج ٤	1	3	4

ويقدر الوقت المتاح بالشركة للتشغيل 480 ساعة أسبوعياً كالاتي : 400 ساعة للتلميع ، و 400 ساعة للتجميع . وأرباح الشركة من الوحدة الواحدة هي 6 دولارات ، 4 دولارات ، 6 دولارات ، ١٠٠ وحدة من أي مجموعة من المنتجات ٢ ، ٣ كل أسبوع . ومع عميل آخر تستطيع الشركة بيع أي كميات منتجة من المنتجات ١ ، ٢ ، ٣ ، ولكن بحد أقصى 25 وحدة فقط من المنتج ٤ . كم عدد الوحدات من كل منتج يجب أن تنتجها الشركة كل أسبوع لمواجهة الالتزامات التعاقدية بجانب تعظيم الربح الكلي ؟ مع افتراض أن أي منتجات غير كاملة سيتم استكمالها في الأسبوع المقبل .

٩ - ٩٩ يقوم أحد المتعهدين بإعداد خمسة مشروبات كمصير فواكه من مستودع به 500 جالون يحتوى على 20 في المئة من عصير البرتقال ، و 10 في المئة من الجريب فروت ، و 5 في المئة عصير التوت . إذا كانت بيانات المستودع كما هو موضح بأسفل ، كم في المئة يجب أن يستخدمها المتعهد من كل نوع من العصير للحصول على المكونات المطلوبة بأقل تكلفة ؟

	عصير برتقال %	جريب فروت %	عصير توت %	الموجودات جالون	التكلفة \$/جالون
A مشروب	40	40	0	200	1.50
B مشروب	5	10	20	400	0.75
C مشروب	100	0	0	100	2.00
D مشروب	0	100	0	50	1.75
E مشروب	0	0	0	800	0.25

١ - ٢٠ خصصت أحد المدن ميزانية قدرها 250 000 دولار لتطوير مساحة للتخلص من القمامة . وهناك سبع مساحات ممكنة لذلك — موضح بأسفل الطاقات المتاحة لكل منها وتكلفتها — أى موقع منها يجب أن تختاره المدينة ؟

الموقع	A	B	C	D	E	F	G
الطاقة طن / اسبوع	20	17	15	15	10	8	5
التكلفة بالآلاف دولار	145	92	70	70	84	14	47

١ - ٢٩ تقوم إحدى الشركات التى تصنع الأجزاء الكهربائية بإنتاج أحد المنتجات من الجوامد ، وإمداد أربعة صناع للتليفزيون بها . يمكن إنتاج هذا الجزء فى أى من مصانع الشركة الثلاثة ، بالرغم من اختلاف التكلفة ، وذلك لاختلاف كفاءة كل مصنع عن الآخر . وبالتحديد فإن الجزء يتكلف 1.10 دولاراً فى المصنع A ، و 0.95 دولاراً فى المصنع B ، و 1.03 دولاراً فى المصنع C . طاقات الإنتاج الشهرية للمصانع هى : 7500 ، 10 000 ، 8100 جزء على التوالي . التنبؤات من المبيعات لكل صانع تليفزيونات هى : 4200 ، 8300 ، 6300 ، 2700 أجزاء للصانع أرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ على التوالي . فإذا كانت التكلفة بالدولار لنقل الجزء من المصنع إلى صانع التليفزيون — كما هو موضح بأسفل — فأوجد جدول الإنتاج الذى يفي بكل الاحتياجات المطلوبة بأقل تكلفة ؟

	١	٢	٣	٤
A	0.11	0.13	0.09	0.19
B	0.12	0.16	0.10	0.14
C	0.14	0.13	0.12	0.15

٢٢ - ١ وجد أحد أصحاب محلات بيع اللحوم أن عنده في صباح يوم السبت 200 رطل من لحم الفخذ ، و 800 رطل من لحم الكتف ، و 150 رطل من لحم الضأن مستخدمها في عمل هامبورجر ، وفطائر التزهة ، وشطائر اللحم . ودائماً مايزيد الطلب من هذه الأصناف على طاقة المحل . يجب أن يحتوى الهامبورجر على الأقل على 20 في المئة من لحم الفخذ ، و 50 في المئة من لحم الكتف (بالوزن) ، وفطائر التزهة يجب أن تحتوى على الأقل على 20 في المئة من لحم الضأن ، و 50 في المئة من لحم الكتف ، بينما يجب أن تحتوى شطائر اللحم على 10 في المئة من لحم الفخذ ، و 30 في المئة من لحم الضأن ، و 40 في المئة من لحم الكتف . ما تبقى بعد ذلك يعتبر من المنتجات الرخيصة المتوفرة بالمحل . كم رطلاً من كل منتج يجب أن تصنع إذا كان المدير راعياً في تقليل كمية اللحم المخزنة إلى يوم الأحد ؟

٢٣ - ١ قبلت منشأة قانونية خمس حالات يستطيع أى من أعضائها تناول أى حالة منها . ونظراً لاختلاف الخبرة بين الأعضاء ، فإن الوقت الذى سيستغرقه كل منهم في كل حالة يختلف عن الآخر . وقد قدر هذا الوقت (بالساعات) كما يلي :

	الحالة ١	الحالة ٢	الحالة ٣	الحالة ٤	الحالة ٥
الحامى رقم ١	145	122	130	95	115
الحامى رقم ٢	80	63	■	48	78
الحامى رقم ٣	121	107	93	69	95
الحامى رقم ٤	118	83	116	80	105
الحامى رقم ٥	97	75	120	80	111

حدد التخصيص الأمثل للحالات التى سيتناولها كل محام ، بحيث يقل الوقت الكلى المستغرق إلى الحد الأدنى .

٢٤ - ١ تنتج إحدى شركات السيارات عربات تزهة من نوع جولف ، وعربات النلوج في ثلاثة مصانع . ينتج المصنع A 40 عربة جولف ، و 35 عربة نلج يومياً ، وينتج المصنع B 65 عربة جولف يومياً بدون عربات نلج . كما ينتج المصنع C 53 عربة نلج يومياً بدون عربات جولف . تكلفة تشغيل المصانع A ، B ، C هي : 210 000 ، 190 000 ، 182 000 دولار في اليوم . كم عدد الأيام (بما فيها أيام الأحد والعطلات) التى يجب أن يعملها كل مصنع خلال سبتمبر لاستكمال خطة الإنتاج (1500 عربة جولف ، و 1100 عربة نلج) بأقل تكلفة ، مع افتراض أن تعاقدات العمال تخص على أن يحصل العامل على أجر اليوم الكامل بمجرد فتح المصنع .

٢٥ - ١ تقوم شركة الأسمدة فوتورا بإنتاج نوعين من الأسمدة : فوتورا عادى ، وفوتورا ممتاز . يتكون العادى من 25% إضافات نشطة ، و 75% إضافات خاملة ، بينما يتكون الممتاز من 40% إضافات نشطة ، و 60% إضافات خاملة . تتحدد طاقات التخزين بالشركة في 500 طن من الإضافات النشطة ، و 1200 طن من الإضافات الخاملة تتجدد أسبوعياً .

يتشابه سماد فوتورا العادى مع الأسمدة الأخرى الموجودة بالسوق ويسعر منافس 250 دولار للطن . ولا تجد الشركة أى صعوبة في بيع هذا النوع بهذا الثمن . ومع ذلك ، فإن فوتورا الممتاز ليس له مثيل منافس ، ولذلك فلا توجد قيود على سعره . ومن التجارب السابقة فقد حددت الشركة أن الثمن P (بالدولار) والطلب D (بالطن) ترتبط بالعلاقة $P = 600 - D$. كم

طناً من كل نوع يجب أن تنتجها شركة فوتورا أسبوعياً لزيادة العائد إلى أكبر ما يمكن ؟

١ - ٢٦ اشرح لماذا يمثل الآتي بعد حلاً تناظرياً للمسألة ١ - ١٤ . تصور أن شكل (١ - ٤) يمثل ظهر مائدة طويلة . وقد عملت ثقوب عند النقاط A, B, C بظهر المائدة . تم توصيل ثلاثة خيوط « واتصلت الثلاث نهايات بعقدة واحدة . وأدخلت الأطراف الأخرى للخيوط من الثقوب ، وربطت بأوزان متساوية أسفل المائدة تتدلى من الخيوط . مع افتراض إهمال الاحتكاك « فإن وضع الاتزان للخيوط والأثقال يمثل مكان محطة التكرير الأمثل .

الفصل الثاني

البرمجة الخطية : الصيغة القياسية

Linear Programming: Standard Form

ستُشرح طريقة الحل للبرامج الخطية التي تحتوي على متغيرات كثيرة في الفصل الرابع . ولبدء الطريقة ، يجب تحويل كل متباينات القيود إلى متساويات ، ومعرفة حل واحد ممكن وغير سلبى .

شروط اللاسلبية : NONNEGATIVITY CONDITIONS

يجب إحلال أى متغير غير مقيد بأن يكون غير سلبى بالفرق بين متغيرين جديدين مقيدين . (انظر المسألة ٢ - ٦)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \sim b_i \quad (1-2)$$

حيث إن \sim تمثل إحدى العلاقات $=, \geq, \leq$ (ليس بالضرورة نفس العلامة لكل i) . ونفرض الثوابت b_i دائماً غير سلبية .

مثال ٢ - ١ القيد $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq -5$ عند ضربه في -1 نحصل على $-2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \geq 5$ الذى فيه الطرف الأيمن موجباً .

المتغيرات المساعدة والمتغيرات الزائدة SLACK VARIABLES AND SURPLUS VARIABLES

يمكن تحويل القيد الخطى من النوع $\sum a_{ij}x_j \leq b_i$ إلى متساوية بإضافة متغير جديد غير سلبى إلى الطرف الأيسر للمتباينة . يساوى هذا المتغير — عددياً — الفرق بين الطرفين الأيمن والأيسر للمتباينة ، ويعرف بالمتغير المساعد . ويمثل القاعد المتضمن في هذه المرحلة لنموذج القيد .

مثال ٢ - ٢ القيد الأول في المسألة ٦ - ١ هو :

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 30\,000$$

يصور الطرف الأيسر من هذه المتباينة العدد الكلى للساعات لجميع صناديق التلفزيون ، بينما يصور الطرف الأيمن العدد الكلى للساعات المتاحة . تحول هذه المتباينة إلى المعادلة

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 30\,000$$

بإضافة المتغير المساعد x_5 إلى الطرف الأيسر من المتباينة . تمثل x_5 عدد ساعات التجميع المتاحة للمصانع وغير المستغلة .

يمكن تحويل القيد الخطى من الصيغة $\sum a_{ij}x_j \geq b_i$ إلى متساوية بطرح متغير جديد غير سلبى من الطرف الأيسر من المتباينة . ويساوى هذا المتغير — عددياً — الفرق بين الطرفين الأيسر والأيمن من المتباينة ، ويعرف بالمتغير الزائد . ويمثل الزيادة المدية في هذه المرحلة لنموذج القيد .

مثال ٢ - ٣ القيد الأول في المسألة ١ - ٥ هو :

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 54$$

يمثل الطرف الأيسر لهذه المتباينة التكوين الناتج من الخام العالي الجودة من الثلاثة مناجم ، بينما يمثل الطرف الأيمن الوزن الأدنى بالطمن من الخام المطلوب لمواجهة احتياجات التعاقد . ونحول المتباينة إلى معادلة

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 = 54$$

ب طرح المتغير الزائد x_4 من الطرف الأيسر للمتباينة . تمثل x_4 الكمية من الخام العالي الجودة الزائدة والمطلوبة لاستيفاء التعاقد .

إيجاد حل أولي ممكن GENERATING AN INITIAL FEASIBLE SOLUTION

بعد تحويل كل القيود الخطية (غير السلبية بالأطراف اليمنى) إلى متساويات بإضافة المتغيرات المساعدة والزائدة عند الضرورة ، يضاف متغير جديد يسمى المتغير الصناعي للطرف الأيسر لكل معادلة قيد لا تحتوي على متغير مساعد . ستحتوي إذاً كل معادلة قيد على متغير مساعد واحد أو متغير صناعي واحد .

يمكن الحصول على حل أولي لا سلبى لهذه المجموعة من القيود بمساواة كل متغير مساعد وكل متغير صناعي للطرف الأيمن من المعادلة ، والتي يظهر فيها ، وكذلك مساواة كل المتغيرات الأخرى ، بما فيها المتغيرات الزائدة بالعنصر .

مثال ٢ - ٤ مجموعة القيود :

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$4x_1 + 5x_2 \geq 6$$

$$7x_1 + 8x_2 = 15$$

تحول إلى معادلات بإضافة متغير مساعد x_3 للطرف الأيسر للقيد الأول ، ثم طرح المتغير الزائد x_4 من الطرف الأيسر للقيد الثانى . فنصبح المعادلات الجديدة هي :

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

(٢ - ٢)

$$4x_1 + 5x_2 - x_4 = 6$$

$$7x_1 + 8x_2 = 15$$

إذا أضيفت المتغيرات الصناعية x_5 و x_6 على التوالى إلى الأطراف اليسرى للقيدين الآخرين في (٢ - ٢) ، وهما القيدين اللذان بدون متغير مساعد ، تكون النتيجة :

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$4x_1 + 5x_2 - x_4 + x_5 = 6$$

$$7x_1 + 8x_2 + x_6 = 15$$

يكون الحل اللاسلبى لهذه المجموعة الأخيرة هو $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = 3$ ، $x_4 = 0$ ، $x_5 = 6$ ، $x_6 = 15$ (مع ملاحظة أن $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ليست حلاً للمجموعة الأصلية للقيود) .

وبالنسبة .. فإنه يمكن إيجاد الحل الأولي بسهولة بدون الاستكمال الكلى للمتغيرات للمساعدة والصناعية . مثال ذلك : المسألة (٢ - ٥) .

التكلفة الجزائية PENALTY COSTS

إن إضافة كل من المتغيرات المساعدة أو الزائدة لا تغير من طبيعة المتغيرات أو أهدافها . ولذلك فإن هذه المتغيرات تأخذ معاملات صفيرية في الدالة الهدفية ، ومع ذلك .. فإن المتغيرات الصناعية تُغير من طبيعة القيود . حيث إن هذه المتغيرات تضاف إلى طرف واحد فقط من المتساوية . ولذا فإن النموذج الجديد للقيود يكون مكافئاً للنموذج القديم في حالة واحدة فقط ، وهي أن تكون المتغيرات الصناعية مساوية للصفر . ولضمان هذا في الحل الأمثل (بعكس الحل الأولي) تدخل المتغيرات الصناعية في الدالة الهدفية بمعاملات موجبة كبيرة جداً في برنامج تصغير ، أو بمتغيرات سالبة كبيرة جداً في برنامج تعظيم . ويعبر عن هذه المتغيرات بأى من M ، أو $-M$ تفهم M على أنها عدد موجب كبير يمثل الجزاء (الشديد) الحادث من إعطاء المتغيرات الصناعية وحدة واحدة .

وتترك التكلفة الجزائية في صورة $\pm M$ في حالة الحسابات اليدوية . أما في الحاسبات ، فيجب أن تعطى M قيمة عددية ، وفي الغالب أكبر ثلاث أو أربع مرات من أى عدد آخر في البرنامج .

الصيغة القياسية STANDARD FORM

يكون البرنامج الخطى في صورته القياسية إذا كانت كل القيود في صورة متساويات ، وإذا عرف حل واحد ممكن . وبأسلوب المصفوفات تكون الصيغة القياسية :

$$\begin{aligned} z &= C^T X & : & \text{تعظيم} \\ AX &= B & : & \text{علماً بأن} \\ X &\geq 0 & : & \text{مع} \end{aligned} \quad (2-3)$$

حيث إن X تعبر عن عامود متجه المتغيرات ، بما فيها المتغيرات المساعدة ، الزائدة والصناعية ، و C^T يعبر عن صف متجه التكلفة المقابلة . و A هو معامل المصفوفة لمعادلات القيود ، و B هو عامود متجه الحدود اليمنى لمعادلات القيود . [لاحظ : في بقية هذا الكتاب ستمثل المتجهات عادة بمصفوفة ذات عامود واحد ، وسنقول دائماً « متجه » بدلاً من « عامود متجه » . ونمثل T مقلوب المصفوفة] . إذا مثلت X_0 متجه المتغيرات المساعدة والصناعية فقط ، فإن الحل الأولي الممكن يعطى في صورة $X_0 = B$ ، حيث إنه من المفهوم أن كل المتغيرات في X ، وغير الموجودة في X_0 معطاه قيمة صفيرية .

مسائل محلولة

Solved Problems

٢ - ١ ضع البرنامج التالى في صيغة المصفوفات القياسية :

$$\begin{aligned} z &= x_1 + x_2 & : & \text{تعظيم} \\ x_1 + 5x_2 &\leq 5 & : & \text{علماً بأن} \\ 2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\geq 0 & : & \text{غير سلبين} \end{aligned}$$

بإضافة متغيرين مساعدين x_3 و x_4 على التوالى للطرفين الأيسرين للقيود . وإدخال هذين المتغيرين بمعامل تكلفة يساوى صفراً

في الهدف نحصل على :

$$\begin{aligned} \text{تعظيم : } z &= z_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ \text{علماً بأن : } x_1 + 5x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 4 \end{aligned}$$

كل المتغيرات لاسلبية

ولما كانت كل معادلة قيد تحتوي على متغير مساعد ، لذلك لا يُطلب أى متغير صناعى ، ويكون الحل الأول هو $x_3 = 5, x_4 = 4, x_1 = x_2 = 0$ ، والنموذج (١) يكون الصيغة القياسية (٢ - ٣) إذا عرفنا

$$\begin{aligned} X &= [x_1, x_2, x_3, x_4]^T & C &= [1, 1, 0, 0]^T \\ A &= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} & X_0 &= \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

٢ - ٢ ضع البرنامج التالى في الصيغة القياسية :

$$\begin{aligned} \text{تعظيم : } z &= 80x_1 + 60x_2 \\ \text{علماً بأن : } 0.20x_1 + 0.32x_2 &\leq 0.25 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

x_2, x_1 لا سلبين

لتحويل القيد الأول إلى متساوية ، أضف متغير مساعد x_3 للطرف الأيسر . وحيث إن القيد الثانى معادلة لا تحتوي على متغير مساعد ، أضف متغيراً صناعياً x_4 إلى طرفها الأيسر ، ويضاف المتغيران الجديدان في الدالة الهدفية ، والمتغير المساعد بمعامل تكلفة صفر ، والمتغير الصناعى بمعامل تكلفة سلبى كبير ، يؤول البرنامج إلى :

$$\begin{aligned} \text{تعظيم : } z &= 80x_1 + 60x_2 + 0x_3 - Mx_4 \\ \text{علماً بأن : } 0.20x_1 + 0.32x_2 + x_3 &= 0.25 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

كل المتغيرات لاسلبية

هذا البرنامج من الصيغة القياسية وبحل أولى ممكن هو : $x_3 = 0.25, x_4 = 1, x_1 = x_2 = 0$.

٣ - ٢ أعد المسألة ٢ - ٢ إذ الهدف هو تعظيم .

التغير الوحيد في معاملات التكلفة أن المرتبط المتغير الصناعى يصبح $+M$ بدلاً من $-M$.

٤ - ٢ ضع البرنامج التالى في الصيغة القياسية .

$$\begin{aligned} z &= 5x_1 + 2x_2 & : \text{تعظيم} \\ 6x_1 + x_2 &\geq 6 & : \text{علماً بأن} \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 12 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 4 \end{aligned}$$

x_1 و x_2 غير سالبين

بطرح المتغيرات الزائدة x_3, x_4, x_5 على التوالى من الأطراف اليسرى للقيود « وإدخال كل متغير جديد بقيمة صفرية لمعاملات التكلفة في الهدف نحصل على :

$$\begin{aligned} z &= 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 & : \text{تعظيم} \\ 6x_1 + x_2 - x_3 &= 6 & : \text{علماً بأن} \\ 4x_1 + 3x_2 - x_4 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_5 &= 4 \end{aligned}$$

كل المتغيرات لاسلبية

حيث لا تحتوى أى معادلة قيد على متغير مساعد ، نضيف المتغيرات الصناعية x_6, x_7, x_8 على التوالى للأطراف اليسرى للمعادلات . وندخل هذه المتغيرات بمعاملات تكلفة سالبة كبيرة في الهدف . ويصبح البرنامج :

$$\begin{aligned} z &= 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7 - Mx_8 & : \text{تعظيم} \\ 6x_1 + x_2 - x_3 + x_6 &= 6 & : \text{علماً بأن} \\ 4x_1 + 3x_2 - x_4 + x_7 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_5 + x_8 &= 4 \end{aligned}$$

كل المتغيرات غير سالبة

هذا البرنامج من الصيغة القياسية يحل أولئى يمكن $x_6 = 6, x_7 = 12, x_8 = 4, x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

٢ - ٥ ضع البرنامج التالى في صيغة المصفوفات القياسية

$$\begin{aligned} z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 & : \text{تصغير} \\ 3x_1 + 4x_3 &\leq 5 & : \text{علماً بأن} \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 &= 7 \\ 8x_1 + 9x_3 &\geq 2 \end{aligned}$$

كل المتغيرات لاسلبية

بإضافة متغير مساعد x_4 للطرف الأيسر للقيد الأول « طرح متغير زائد x_5 من الطرف الأيسر للقيد الثالث ، ثم إضافة متغير صناعى x_6 فقط للطرف الأيسر للقيد الثالث نحصل على البرنامج :

$$\begin{aligned}
z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 & : \text{ تصغير} \\
3x_1 &+ 4x_3 + x_4 &= 5 & : \text{ علماً بأن} \\
5x_1 + x_2 + 6x_3 & &= 7 \\
8x_1 &+ 9x_3 - x_5 + x_6 &= 2
\end{aligned}$$

كل المتغيرات لاسلبية

هذا البرنامج في الصيغة القياسية وبحل أولي ممكن $x_4 = 5, x_2 = 7, x_6 = 2, x_1 = x_3 = x_5 = 0$ وبأخذ صورة النموذج (٢ - ٣) إذا عرفنا

$$\begin{aligned}
X &= [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T & C &= [1, 2, 3, 0, 0, M]^T \\
A &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 9 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} & X_0 &= \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

في هذه الحالة يمكن استخدام x_2 لإيجاد الحل الأولي الممكن ، فضلاً عن إضافة المتغير الصناعي للقيد الثاني للحصول على نفس النتيجة . وبوجه عام ، عندما يظهر متغير واحد في معادلة قيد واحدة فقط وبمعامل موجب ، فإنه يمكن استخدام هذا المعامل في إيجاد جزء من الحل الأولي بقسمة معادلة القيد على المعامل الموجب ، ثم وضع المتغير مساوياً للطرف الأيمن للمعادلة . ولا ضرورة لإضافة متغير صناعي للمعادلة .

٦ - ٢ وضع البرنامج التالي في الصيغة القياسية

$$\begin{aligned}
z &= 25x_1 + 30x_2 & : \text{ تصغير} \\
4x_1 + 7x_2 &\geq 1 & : \text{ علماً بأن} \\
8x_1 + 5x_2 &\geq 3 \\
6x_1 + 9x_2 &\geq -2
\end{aligned}$$

حيث إن كلا من x_1, x_2 غير مقيدتين ، نضع $x_1 = x_3 - x_4, x_2 = x_5 - x_6$ ، بحيث تكون كل المتغيرات الجديدة لاسلبية . وبالتعويض عن قيم هذه الكميات في البرنامج المعطى ، ثم ضرب القيد الأخير في -1 لجعل الطرف الأيمن غير سلبى . نحصل على البرنامج المكافئ :

$$\begin{aligned}
z &= 25x_3 - 25x_4 + 30x_5 - 30x_6 & : \text{ تصغير} \\
4x_3 - 4x_4 + 7x_5 - 7x_6 &\geq 1 & : \text{ علماً بأن} \\
8x_3 - 8x_4 + 5x_5 - 5x_6 &\geq 3 \\
-6x_3 + 6x_4 - 9x_5 + 9x_6 &\leq 2
\end{aligned}$$

كل المتغيرات لاسلبية

يحول هذا البرنامج إلى الصيغة القياسية بطرح المتغيرات الزائدة x_7, x_8 على التوالي من الطرف الأيسر لكل من القيدتين الأوليين ، وإضافة متغير مساعد x_9 للطرف الأيسر للقيد الثالث ، ثم إضافة متغير صناعي x_{10}, x_{11} على التوالي للطرف الأيسر لكل من القيدتين الأوليين نحصل على :

$$z = 25x_3 - 25x_4 + 30x_5 - 30x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + Mx_{10} + Mx_{11} \quad : \text{تصغير}$$

$$4x_3 - 4x_4 + 7x_5 - 7x_6 - x_7 + x_{10} = 1 \quad : \text{علماً بأن}$$

$$8x_3 - 8x_4 + 5x_5 - 5x_6 - x_8 + x_{11} = 3$$

$$-6x_3 + 6x_4 - 9x_5 + 9x_6 + x_9 = 2$$

كل المتغيرات لا سلبية

الحل الأولي لهذه المسألة في الصيغة القياسية هو :

$$x_{10} = 1 \quad x_{11} = 3 \quad x_9 = 2 \quad x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0$$

مسائل مكملة

Supplementary Problems

ضع كل من البراجم التالية في صيغة المصفوفات القياسية

$$z = 2x_1 - x_2 + 4x_3 \quad : \text{تصغير}$$

$$5x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq -7 \quad : \text{علماً بأن}$$

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 8$$

x_1 لاسلبية

٧ - ٢

$$z = 10x_1 + 11x_2 \quad : \text{تصغير}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 150 \quad : \text{علماً بأن}$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$6x_1 + x_2 \leq 175$$

x_1, x_2 لاسبيين

٨ - ٢

٩ - ٢ نفس المسألة ٨ - ٢ مع عكس متباينات القيود الثلاثة

$$z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 \quad : \text{تصغير}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 1000 \quad : \text{علماً بأن}$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 7x_4 \geq 1500$$

كل المتغيرات لاسلبية

١٠ - ٢

١١ - ٢

$$z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \quad : \text{تصغير}$$

$$x_1 + 6x_2 + x_3 = 10 \quad : \text{علماً بأن}$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$$

كل المتغيرات لاسلبية

١٢ - ٢

$$z = 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \quad : \text{تعظيم}$$

$$2x_1 + 7x_2 = 7 \quad : \text{علماً بأن}$$

$$5x_1 + 8x_2 + 2x_4 = 10$$

$$x_1 + x_3 = 11$$

لاسلبية x_1, x_2, x_3

١٣ - ٢

$$z = 10x_1 + 2x_2 - x_3 \quad : \text{تصغير}$$

$$x_1 + x_2 \leq 50 \quad : \text{علماً بأن}$$

$$x_1 + x_2 \geq 10$$

$$x_2 + x_3 \leq 30$$

$$x_2 + x_3 \geq 7$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 60$$

كل المتغيرات لاسلبية

$$z = 25x_3 - 25x_4 + 30x_5 - 30x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + Mx_{10} + Mx_{11} \quad : \text{تصغير}$$

$$4x_3 - 4x_4 + 7x_5 - 7x_6 - x_7 + x_{10} = 1 \quad : \text{علماً بأن}$$

$$8x_3 - 8x_4 + 5x_5 - 5x_6 - x_8 + x_{11} = 3$$

$$-6x_3 + 6x_4 - 9x_5 + 9x_6 + x_9 = 2$$

كل المتغيرات لا سلبية

الحل الأولي لهذه المسألة في الصيغة القياسية هو :

$$x_{10} = 1 \quad x_{11} = 3 \quad x_9 = 2 \quad x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0$$

مسائل مكاملة

Supplementary Problems

ضع كل من البرامج التالية في صيغة المصفوفات القياسية

$$z = 2x_1 - x_2 + 4x_3 \quad : \text{تصغير}$$

$$5x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq -7 \quad : \text{علماً بأن}$$

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 8$$

x_1 لاسلبية

٧ - ٢

$$z = 10x_1 + 11x_2 \quad : \text{تصغير}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 150 \quad : \text{علماً بأن}$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$6x_1 + x_2 \leq 175$$

x_1, x_2 لاسبيين

٨ - ٢

٩ - ٢ نفس المسألة ٨ - ٢ مع عكس متباينات القيود الثلاثة

$$z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 \quad : \text{تصغير}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 1000 \quad : \text{علماً بأن}$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 7x_4 \geq 1500$$

كل المتغيرات لاسلبية

١٠ - ٢

١١ - ٢

$$z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 : \text{تصغير}$$

$$x_1 + 6x_2 + x_3 = 10 : \text{علماً بأن}$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$$

كل المتغيرات لاسلبية

١٢ - ٢

$$z = 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 : \text{تعظيم}$$

$$2x_1 + 7x_2 = 7 : \text{علماً بأن}$$

$$5x_1 + 8x_2 + 2x_4 = 10$$

$$x_1 + x_3 = 11$$

لاسلبية x_1, x_2, x_3

١٣ - ٢

$$z = 10x_1 + 2x_2 - x_3 : \text{تصغير}$$

$$x_1 + x_2 \leq 50 : \text{علماً بأن}$$

$$x_1 + x_2 \geq 10$$

$$x_2 + x_3 \leq 30$$

$$x_2 + x_3 \geq 7$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 60$$

كل المتغيرات لاسلبية

الفصل الثالث

البرمجة الخطية : نظرية الحلول

Linear Programming: Theory of Solutions

الاعتماد والاستقلال الخطي LINEAR DEPENDENCE AND INDEPENDENCE

تعتبر فئة المتجهات ذات الأبعاد $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ « معتمدة خطياً » إذا كانت الثوابت $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ لا تساوى صفراً، بمعنى :

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_n P_n = 0 \quad (1-3)$$

مثال ٣ - ١ فئة المتجهات ذات الخمسة أبعاد

$$\{[1, 2, 0, 0, 0]^T, [1, 0, 0, 0, 0]^T, [0, 0, 1, 1, 0]^T, [0, 1, 0, 0, 0]^T\}$$

معتمدة خطياً ، حيث إن

$$-1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نظرية (١ - ٣) تعتبر كل فئة المتجهات ذات الأبعاد $m+1$ أو أكثر من m معتمدة خطياً .

تعتبر فئة المتجهات $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ ذات الأبعاد m مستقلة خطياً إذا كانت الثوابت التي تحقق المعادلة هي فقط $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. (انظر المسألة ١ - ٢ ، والمسألة ٢ - ٣)

التكوينات المحدبة CONVEX COMBINATIONS

يعتبر المتجه p ذو الأبعاد m تكويناً محدباً من المتجهات ذات الأبعاد m ، P_1, P_2, \dots, P_n إذا تواجدت ثوابت لاسلية $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ مجموعها مساوياً واحداً ، بمعنى :

$$p = \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \dots + \beta_n P_n \quad (2-3)$$

مثال ٣ - ٢ يعتبر المتجه ذو البعدين $[5/3, 5/6]^T$ تكويناً محدباً من المتجهات $[1, 1]^T, [3, 0]^T, [1, 2]^T$ ، لأن :

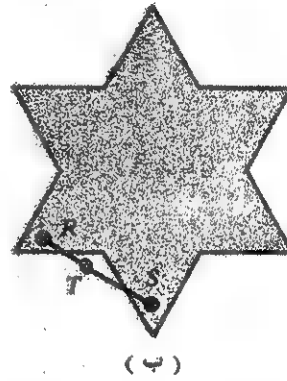
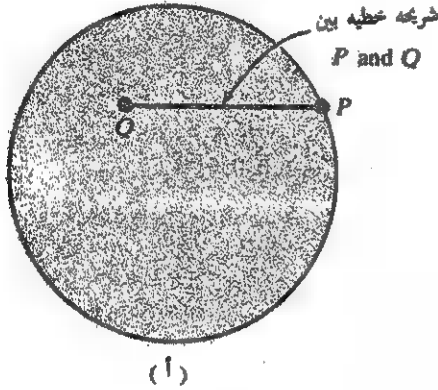
$$\begin{bmatrix} 5/3 \\ 5/6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

إذا أعطينا المتجهين P_1 P_2 ذوى الأبعاد m ، نطلق على هذه الفئة تكوينات محدبة للمتجهات P_1 P_2 « الشريحة الخطية » بين هذين المتجهين ، ويظهر المعنى الهندسى لهذا الاصطلاح في حالة $m = 3$.

الفئات المحدبة CONVEX SETS

تعتبر فئة المتجهات ذات الأبعاد m محدبة ، إذا تبع هذه الفئة متجهان ، وأيضاً الشريحة الخطية بين المتجهين .

مثال ٣ - ٣ يعتبر القرص المظلل في شكل (٣ - ١ - ١) فئة محدبة ، حيث إن الشريحة الخطية بين أى نقطتين فيها (متجهان ذوا بعدين) تقع بالكامل داخل القرص . ولا يعتبر الشكل (٣ - ١ - ٢) محدباً ، بالرغم من تبعية R S للفئة المظلمة ، فإنه توجد نقط مثل T تبعية الشريحة الخطية بين R S الذين لا يعتبران جزءاً من النجمة .



شكل ٣ - ١

يعتبر المتجه P هو نقطة طرفية لفئة محدبة إذا لم يكن في الإمكان التعبير عنه بتكوين محدب من متجهين آخرين في الفئة ، بمعنى أنه لا تقع النقطة الطرفية على الشريحة الخطية بين أى متجهين آخرين في الفئة .

مثال ٣ - ٣ تعتبر أى نقطة على محيط القرص في شكل (٣ - ١ - ١) نقطة طرفية في القرص .

نظرية ٣ - ٢ يمكن التعبير عن أى متجه في فئة مغلقة ومحدبة محدودة ، بها عدد محدد من النقاط الطرفية بأنه تكوين محدب من النقاط الطرفية .

نظرية ٣ - ٣ يعتبر فراغ الحل لفئة المعادلات الخطية الآتية فئة محدبة بها عدد محدد من النقاط الطرفية .

EXTREME-POINT SOLUTIONS حلول النقاط الطرفية

افترض S تمثل فئة كل الحلول الممكنة للبرنامج الخطي من الصيغة القياسية (٣ - ٢) ، بمعنى أن S هي فئة كل المتجهات X التى تحقق $AX = B$ $X \geq 0$. من النظرية ٣ - ٣ وفى الحقيقة .. إن الفئات المحدبة تتقاطع في فئات محدبة أيضاً (المسألة ٣ - ١١) ، ويتبع ذلك أن S تكون فئة محدبة بها عدد محدد من النقاط الطرفية .

ملاحظة ٩ : تحقق الدالة الهدفية قيمتها المثلى (تعظيم أو تصغير) في النقط الطرفية لـ \mathcal{P} ، بافتراض أن هناك حلاً أمثل انظر المسألة (٣ - ١٢)

ملاحظة ١٠ : إذا كانت A أبعادها $m \times n$ (m صف ■ عمود) ، حيث إن $m \leq n$ ، فإن النقط الطرفية لـ \mathcal{P} يكون فيها على الأقل $n - m$ عناصر صفيرية . (انظر المسألة ٣ - ١٣) .

الحلول الأساسية الممكنة BASIC FEASIBLE SOLUTIONS

عبر عن الأعمدة $m \times n$ في مصفوفة المعاملات A في النموذج (٢ - ٢) بـ A_1, A_2, \dots, A_n على التوالي ، لذلك يمكن كتابة مصفوفة معادلات القيود $AX = B$ في صورة متجهات :

$$(3-3) \quad x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = B$$

ونؤكد أن المتجهات A هي من المتجهات ذات الأبعاد m ، والمطلوب إيجاد حلول لاسلبية للمتغيرات x_1, x_2, \dots, x_n وسنفرض أن $m \leq n$ ، ورتبة $A = m$. وذلك يعني أنه توجد على الأقل مجموعة ■ من المتجهات A مستقلة خطياً .

يمكن الحصول على الحل الأساسي الممكن للمعادلة (٣ - ٣) بوضع $n - m$ من المتغيرات x مساوية للصفر ، ثم إيجاد حلول لاسلبية لباقي المتغيرات x ، مع افتراض أن المجموعة m من المتجهات A المرتبطة بالمتغيرات x ، والتي لاتساوى الصفر هي مستقلة خطياً . تسمى مجموعة المتغيرات x التي لم نعط الحل صفراً بـ « المتغيرات الأساسية » . إذا تحول أى من المتغيرات الأساسية إلى الصفر ، فإن الحل الأساسي الممكن « ينحرف » ، وإذا كانت كل المتغيرات الأساسية موجبة ، فإن الحل الأساسي الممكن « لا ينحرف » (انظر المسألة ٣ - ٧ ، ٣ - ٨ ، ٣ - ٩) .

يمكن تقوية الملاحظات ١ ، ٢ كالتالي :

ملاحظة ٩ : تحقق الدالة الهدفية الحل الأمثل عند الحل الأساسي الممكن .

ملاحظة ١٠ : تعتبر النقط الطرفية لـ \mathcal{P} بدقة هي الحلول الأساسية الممكنة (انظر المسائل ٣ - ١٣ ، ٣ - ١٤)

يتبع ذلك أنه يمكن حل البرنامج الخطي القياسي بالبحث بين الحلول الأساسية الممكنة عن الحل أو الحلول المثلى للهدف . ويعطى الفصل الرابع طريقة حسابية فعالة لهذا الحل .

مسائل محلولة

Solved Problems

١ - ٣ حدد إذا كانت $\{[1, 2]^T, [2, 4]^T\}$ مستقلة خطياً .
وسم المتجهين P_1, P_2 من الواضح أن $P_2 = 2P_1$ ، أو

$$2P_1 + (-1)P_2 = 0$$

لذلك فإن فئة المتجهات المعطاه تكون معتمدة خطياً (ليست مستقلة خطياً) .

٢ - ٣ هل $\{[1, 1, 3, 1]^T, [1, 2, 1, 1]^T, [1, 0, 0, 1]^T\}$ مستقلة خطياً ؟

لهذه المتجهات ، فإن (٣ - ١) تصبح

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

في المعادلات الثلاث الأولى (الرابعة زائدة عن الحاجة) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ كحل وحيد . لذلك ، فإن المتجهات المعطاة مستقلة خطياً .

٢ - ٣ المتجه Q هو تكوين خطي من المتجهات Q_1, Q_2, \dots, Q_n إذا وجدت الثوابت $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ بحيث

$$Q = \delta_1 Q_1 + \delta_2 Q_2 + \dots + \delta_n Q_n$$

بين أن فئة المتجهات $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ مستقلة خطياً لو — وقط لو — كان أحد هذه المتجهات تكويناً خطياً من الباقي .

إذا كان $P_i = \delta_1 P_1 + \dots + \delta_{i-1} P_{i-1} + \delta_{i+1} P_{i+1} + \dots + \delta_n P_n$ فيه بعض أو كل δ_i يمكن أن يكون صفراً ، إذا :

$$\delta_1 P_1 + \dots + \delta_{i-1} P_{i-1} + (-1)P_i + \delta_{i+1} P_{i+1} + \dots + \delta_n P_n = 0$$

وبالتالي فإن الفئة تكون معتمدة خطياً

ومن ناحية أخرى .. إذا كانت الفئة معتمدة خطياً ، ضع α_i لتكون أول معامل غير صفري في (٣ - ١) . إذا

$$P_i = 0P_1 + \dots + 0P_{i-1} + \left(\frac{\alpha_{i+1}}{-\alpha_i}\right)P_{i+1} + \dots + \left(\frac{\alpha_n}{-\alpha_i}\right)P_n$$

أي أن P_i هو تكوين خطي من المتجهات المتبقية .

٤ - ٥ حدد إذا كانت $[1, 2, 3]^T$ تكويناً خطياً

$$[1, 2, 1]^T \quad [1, 1, 1]^T \quad [2, 3, 2]^T$$

لا إنها ليست خطية : أي تكوين خطي من ثلاثة متجهات من الضروري أن يتساوى فيه العنصر الأول والثالث . وبوجه عام :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \delta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \delta_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \delta_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{لو} \quad \begin{aligned} \delta_1 + \delta_2 + 2\delta_3 &= 1 \\ 2\delta_1 + \delta_2 + 3\delta_3 &= 2 \\ \delta_1 + \delta_2 + 2\delta_3 &= 3 \end{aligned}$$

لو فقط لو تماثل if and only if

ولكن هذا النموذج الثاني ليس له حل .

٣ - ■ أثبت أنه إذا كانت $\{P_1, P_2, \dots, P_r\}$ فئة متجهات مستقلة خطياً ، و P هو متجه ، بحيث

$$P = \sum_{j=1}^r c_j P_j \quad \text{و} \quad P = \sum_{j=1}^r d_j P_j$$

$$c_j = d_j \quad (j = 1, 2, \dots, r) \quad \text{إذن}$$

ب طرح الصيغتين نحصل على :

$$\sum_{j=1}^r (c_j - d_j) P_j = 0$$

الذي يمثل (٣ - ١) مع $a_j = c_j - d_j$ ، $n = r$. حيث إن P_1, P_2, \dots, P_r مستقلان خطياً ، يتبع ذلك أن $c_j - d_j = 0$ ، أو $c_j = d_j$ ($j = 1, 2, \dots, r$).

٣ - ٦ أكتب معادلات القيود للبرامج الخطية التالية بصيغة المتجهات (٣ - ٣)

$$z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 + 4x_5 + 0x_6 : \text{ تصغير}$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 3 : \text{ علماً بأن}$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_6 = 6$$

كل المتغيرات لاسلبية

من هذه المسألة تصبح (٣ - ٣)

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} \text{A}_1 & \text{A}_2 & \text{A}_3 & \text{A}_4 & \text{A}_5 & \text{A}_6 & \text{B} \end{matrix}$

٣ - ٧ حدد إذا كان $[1, 0, 1, 0, 0, 0]^T$ هو حلاً أساسياً ممكناً للبرنامج الخطي المعطى بالمسألة (٣ - ٦)

ولو أن كل المكونات ليست سلبية . فإن الحل المقترح ليس أساسياً . المتجهات A_3 و A_1 مشاركة مع المتغيرات x_3 والتي تساوى صفراً ، ليست مستقلة خطياً (مسألة ٣ - ١)

٨ - ٣ حدد إذا كان $[1, 0, 0, 0, 2, 4]^T$ هو حلاً أساسياً ممكناً للبرنامج الخطي المعطى بالمسألة (٦ - ٣) .
تحتوي مصفوفة المعاملات A المتكونة من أعمدة الاتجاهات A_1 حتى A_6 ، وتتكون من 2×6 . لذلك ، فإن
حلاً أساسياً ممكناً يجب أن يحتوي على الأقل على $6 - 2 = 4$ عناصر صفرية (متغيرات) . وهي غير الحالة المقدمة بالمسألة .

٩ - ٣ أوجد حلين أساسيين ممكنين مختلفين للمسألة (٦ - ٣) .

حيث إن $n - m = 4$ هو حل أساسي ممكن يحتوي على أربعة متغيرات x تأخذ القيم صفر . بوضع المتغيرات x_1 حتى x_4 مساوية للصفر ، يصبح متجه معادلة القيود .

$$x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

وله الحل اللاصفرى $x_5 = 3$ ، $x_6 = 6$. وحيث إن $A_5 \parallel A_6$ مستغلان خطياً ، فيكون الحل الكامل $[0, 0, 0, 0, 3, 6]^T$ أساسياً . وهنا تكون المتغيرات الأساسية x_5 و x_6 . وحيث إن كليهما موجب ، لذلك فإن الحل لن ينحرف .
للحصول على حل أساسي ممكن آخر نضع $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$. ويصبح متجه معادلة القيود .

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ x_1 نجد أن $x_2 = 3$ ، $x_1 = 0$ ، وتكون الاتجاهات التابعة A . وهي A_1 ، A_2 ، مستقلة خطياً ويكون الحل الكامل $[3, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ أساسياً . تكون المتغيرات الأساسية x_1 و x_2 ، وحيث إن أحدهما صفرى ، فإن الحل ينحرف .

١٠ - ٣ حدد إذا كان المتجه $[0, 7]^T$ تكويناً محدياً من الفئة $\{[3, 6]^T, [-6, 9]^T, [2, 1]^T, [-1, 1]^T\}$

لهذه الاتجاهات ، تصبح (٢ - ٣)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \beta_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \end{bmatrix} + \beta_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(١)

$$3\beta_1 - 6\beta_2 + 2\beta_3 - \beta_4 = 0$$

$$6\beta_1 + 9\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 7$$

أو

نضيف شرطاً ثالثاً لهذه المعادلات هو :

٢)

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1$$

يجب أن نحدد هل توجد قيم لاسلبية لـ $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ تحقق آتياً (١) ، (٢) . بحل هذه المعادلات نحصل على :

$$\beta_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\beta_4 \quad \beta_2 = \frac{1}{3} - \frac{5}{18}\beta_4 \quad \beta_3 = (-19/16)\beta_4$$

باختيار قيمة β_4 يجب اختيار $\beta_4 = 0$ نحصل على

$$\beta_1 = \frac{2}{3} \quad \beta_2 = \frac{1}{3} \quad \beta_3 = 0 \quad \beta_4 = 0$$

كمجموعة مقبولة من الثوابت ، لذلك $[0, 7]^T$ تعتبر تكويناً محدباً للفترة المعطاة ذات الأربعة متجهات .

٣ - ١١ إذا كانت \mathcal{Q} ، \mathcal{R} فئتين محدبتين ، بين أن تقاطعهما $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R}$ هو فئة محدبة .

افرض $X < Y$ متجهين في $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R}$ ، فإن الشريحة الخطية بين X ، Y تكون في \mathcal{Q} (لأن X ، Y تتواجد في \mathcal{Q} ، \mathcal{Q} محدبة) وكذلك في \mathcal{R} (بالمثل) . لذلك فإن الشريحة الخطية تكون في $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R}$ ، ويكون $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R}$ محدباً .

في الحالة التي يكون فيها $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$ محدبين متعددي السطوح (بهما نقط طرفية كثيرة معددة) ، فإنه من البديهي أن تقاطعهما يكون محدباً متعدد الأسطح .

٣ - ١٢ اثبت أن الدالة المهدفية $z = f(X) = C^T X$ في النموذج (٢ - ٣) تحقق الحل الأمثل (تصغير) عند أى نقطة طرفية في \mathcal{S} ، علماً بأنه يوجد حد أدنى (تصغير) ، وأن \mathcal{S} معددة .

إذا وجد حد أدنى ، فإنه توجد نقطة $X_0 \in \mathcal{S}$ ، بحيث إن :

$$(١) \quad X \in \mathcal{S} : f(X_0) \leq f(X)$$

إذا كانت X_0 نقطة طرفية في \mathcal{S} ، فهذا يعتبر حلاً ، وإذا لم تكن كذلك ، فإننا يجب أن نحصل على نقطة طرفية X_m ، بحيث تكون $f(X_m) = f(X_0)$.

والآن فإن \mathcal{S} عدد محدود فقط من النقاط الطرفية ، يمكن تحديدهم X_1, X_2, \dots, X_p ، ولأن \mathcal{S} معددة (وأيضاً منفقة) . تؤكد النظرية (٣ - ٢) أن X_0 يمكن كتابتها كتكوين محدب لهذه النقاط الطرفية ، بمعنى أنه توجد قيم لاسلبية β_j ($j = 1, 2, \dots, p$) مجموعها = واحد ، بحيث :

$$X_0 = \sum_{j=1}^p \beta_j X_j$$

دع الحد الأدنى $f(X)$ عند النقاط الطرفية ليكون X_m من (١) ، $f(X_0) \leq f(X_m)$ ، ولكن :

$$(٢) \quad f(X_0) = f\left(\sum_{j=1}^p \beta_j X_j\right) = \sum_{j=1}^p \beta_j f(X_j) \geq \sum_{j=1}^p \beta_j f(X_m) = f(X_m) \sum_{j=1}^p \beta_j = f(X_m)$$

وبالتالي $f(X_0) = f(X_m)$ ، وكذلك توجد نقط طرفية تسمى X_m عندما تصل $f(X)$ إلى الحد الأدنى .
طبقاً لمبادئ نظرية فايرستراس (نظرية ١١ - ١) الدوال المتصلة — وبالأخص الدوال الخطية مثل $f(X)$ — تفرض قيمة حد أدنى في منطقة مغلقة محددة . ونستنتج من ذلك أن البرنامج الخطي القياسي يحقق حل النقط الطرفية الأمثل عندما تكون \mathcal{S} محددة ، وإذا كانت \mathcal{S} غير محددة . فقد لا توجد الأمثلية ، ومع ذلك ، إذا وجدت الأمثلية فإنها تحقق النقط الطرفية .

١٣ - ٣ اثبت أن كل نقطة طرفية في \mathcal{S} لها على الأقل $n - m$ عناصر صفرية ، وأنها حل أساسي ممكن .

دع $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ لتكون نقط طرفية في \mathcal{S} ، بدون أن نفقد العمومية يمكن أن نثبت أن المتغيرات x يمكن ترتيبها بحيث إن x_1, x_2, \dots, x_r تكون موجبة ، وأن كل العناصر التالية في X ، إذا كانت هناك عناصر ، تكون موجبة ، حيث إن : $X \in \mathcal{S}$ ، فإن $AX = B$ ، وتبعاً لذلك فإن $x_j = 0$ لكل $j > r$ ، ويمكن كتابتها في الصورة .

$$(١) \quad \sum_{j=1}^r x_j A_j = B$$

نبين أولاً أن المتجه A_j في (١) مستقل خطياً . وبافتراض أنه ليس كذلك ، فإنه توجد ثوابت $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ليست جميعها أصفاً بحيث إن :

$$(٢) \quad \sum_{j=1}^r \alpha_j A_j = 0$$

دع ■ لتكون موجبة ، فإن (١) ، (٢) ، تعطي :

$$\sum_{j=1}^r (x_j + \theta \alpha_j) A_j = B \quad \text{و} \quad \sum_{j=1}^r (x_j - \theta \alpha_j) A_j = B$$

إذا اخترنا ■ صغيرة ، بحيث إن $x_j + \theta \alpha_j$ و $x_j - \theta \alpha_j$ تبقى موجبة لكل قيم $j = 1, 2, \dots, r$ ، ويتبع ذلك مباشرة من (٣) أن :

$$X_1 = [x_1 + \theta \alpha_1, x_2 + \theta \alpha_2, \dots, x_r + \theta \alpha_r, 0, 0, \dots, 0]^T$$

$$X_2 = [x_1 - \theta \alpha_1, x_2 - \theta \alpha_2, \dots, x_r - \theta \alpha_r, 0, 0, \dots, 0]^T$$

هي قيم معينة من \mathcal{S} ، ولكن $X = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$ ، وهذا غير ممكن ، حيث إن ■ هي نقطة طرفية في \mathcal{S} ، لذلك $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ يجب أن تكون فئة مستقلة خطياً .

وحيث إن المتجهات لها ذات أبعاد m ، فيتبع ذلك من النظرية ٣ - ١ أنه لا يمكن أن يوجد أكثر من عدد m منهم يكونون مستقلاً خطياً . وتبعاً لذلك $r \leq m$ ، ولكن كل العناصر في r التي تلي العنصر رقم X تكون صفرية ، ومن ثم يجب أن تحتوي X على $n - m$ عناصر صفرية على الأقل .

في حالة $r = m$ يحدد البرهان السابق مباشرة أن X هي حل أساسي ممكن . إذا كانت $r < m$ ، فيمكن دائماً تعريف $m - r$ عناصر صفرية في X (مع فرضي أن رتبة $A = m$) بحيث تشترك المتجهات A مع نظائرها A_1, A_2, \dots, A_r لتكون فئة مستقلة خطياً . ولذلك ، ومرة أخرى ، تكون X حلاً أساسياً ممكناً .

١٤ - ٣ أثبت أن كل حل أساسي ممكن هو نقطة طرفية في \mathcal{S} .

دع X لتكون حلاً أساسياً ممكناً ، إذاً $X \in \mathcal{S}$ ، وتكون $n-m$ على الأقل من عناصر X صفرية . بدون فقد العمومية يمكن افتراض أن المتغيرات x قد رتب بحيث تظهر العناصر الموجبة في X أولاً :

$$(1) \quad X = [x_1, x_2, \dots, x_s, 0, 0, \dots, 0]^T$$

بحيث إن $x_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$) ، $s \leq m$. وتبعاً لذلك ، فإن $AX = B$ يمكن كتابتها في الصورة :

$$\sum_{j=1}^s x_j A_j = B$$

حيث إن ، وكنتيجه لكون X أساسية ، فإن الفئة $\{A_1, A_2, \dots, A_s\}$ تكون مستقلة خطياً (انظر المسألة ٣ - ٢٢) . افرض أن X ليست نقطة طرفية في \mathcal{S} ، لذلك يمكن التعبير عن X كتكوين محدب في نقطتين أخريين في \mathcal{S} :

$$(2) \quad X = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 \quad \text{حيث} \quad X_1 \neq X_2$$

وحيث إن عناصر كل من X_1 ، X_2 لا سلبية ، والفئات β_1 ، β_2 موجبة ، فينتج من (١) ، (٢) أن العناصر $n-s$ الأخيرة في X_1 ، X_2 تكون أيضاً صفرية ، لذلك

$$(3) \quad X_1 = [c_1, c_2, \dots, c_s, 0, 0, \dots, 0]^T \quad X_2 = [d_1, d_2, \dots, d_s, 0, 0, \dots, 0]^T$$

وبالنظر إلى (٢) ، $AX_1 = B$ و $AX_2 = B$ تأخذ صيغة المتجهات :

$$\sum_{j=1}^s c_j A_j = B \quad \text{و} \quad \sum_{j=1}^s d_j A_j = B$$

باستخدام نتيجة المسألة ٣ - ٥ نستنتج أن : $X_1 = X_2$ حيث إن $c_j = d_j$. ويحدد هذا التناقض أن X ، في الحقيقة ، تكون نقطة طرفية .

١٥ - ٣ بين أن الحل الأولي X_0 المستنتج في الفصل الثاني هو حل أساسي ممكن .
تمثل فئة المتجهات A المرتبطة بالحل الأولي أعمدة $m \times n$ في المصفوفة الأحادية ، وأنها مستقلة خطياً .

مسائل مكملية

Supplementary Problems

١٦ - ٣ حدد بالرسم أن $[1, 2]^T$ هو تكوين محدب في $[1, 1]^T$ ، $[2, -1]^T$.

١٧ - ٣ اكتب معادلات القيود للبرنامج الخطي التالي في صيغة متجهات :

$$z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + Mx_4 + 0x_5 : \text{ تصغير}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 : \text{ علماً بأن}$$

$$2x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 6$$

كل المتغيرات لاسلبية

١٨ - ٣ حدد أيًا من المتجهات التالية تكون حلولاً أساسية ممكنة للبرنامج الخطي في المسألة ٣ - ١٧ ؟ هل ينحرف أى من الحلول الممكنة :

$$(a) [1, 1, 0, 0, 0]^T \quad (b) [3, 0, 0, 0, 0]^T \quad (c) [0, 0, 3, 0, 6]^T \quad (d) [0, 0, 3, 2, 8]^T$$

١٩ - ٣ اكتب معادلات القيود للبرنامج الخطي التالي في صيغة المتجهات :

$$z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 : \text{ تعظيم}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 9 : \text{ علماً بأن}$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_4 + x_6 = 9$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 0$$

كل المتغيرات لاسلبية

٢٠ - ٣ حدد أيًا من المتجهات التالية حل ممكن للبرنامج الخطي في المسألة ٣ - ١٩ ؟ هل ينحرف أى من الحلول الأساسية الممكنة ؟

$$(a) [3, 3, 0, 0, 0, 0, 0]^T \quad (c) [0, 0, 0, 3, 0, 0, 0]^T \quad (e) [1, 0, 0, 0, 8, 7, 1]^T$$

$$(b) [2, 2, 0, 1, 0, 0, 0]^T \quad (d) [0, 0, 0, 0, 9, 9, 0]^T \quad (f) [0, 0, 9, 0, 0, 9, -9]^T$$

٢١ - ٣ اثبت أنه إذا حققت الدالة الخطية قيمتها الصغرى عند نقطتين من الفئة الخطية ، فإنها تحقق هذه القيمة الصغرى على كل الشريحة الخطية بين النقط ؟

١٤ - ٣ اثبت أن كل حل أساسي ممكن هو نقطة طرفية في \mathcal{S} .

دع X لتكون حلاً أساسياً ممكناً ، إذا $X \in \mathcal{S}$ ، وتكون $n - s$ على الأقل من عناصر X صفرية . بدون فقد العمومية يمكن افتراض أن المتغيرات x قد رتب بحيث تظهر العناصر الموجبة في X أولاً :

(١)

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_s, 0, 0, \dots, 0]^T$$

بحيث إن $x_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$) $s \leq m$. وتبعاً لذلك فإن $AX = B$ يمكن كتابتها في الصورة :

$$\sum_{j=1}^s x_j A_j = B$$

حيث إن ، وكتيجة لكون X أساسية ، فإن الفئة $\{A_1, A_2, \dots, A_s\}$ تكون مستقلة خطياً (انظر المسألة ٣ - ٢٢) .
افرض أن X ليست نقطة طرفية في \mathcal{S} ، لذلك يمكن التعبير عن X كتكوين محدب في نقطتين أخريين في \mathcal{S} :

(٢)

$$X = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 \quad \text{حيث} \quad X_1 \neq X_2$$

وحيث إن عناصر كل من X_1 ، X_2 لا سلبية ، والثوابت β_1 ، β_2 موجبة ، فينتج من (١) ، (٢) أن العناصر $n - s$ الأخيرة في X_1 ، X_2 تكون أيضاً صفرية ، لذلك

(٣)

$$X_1 = [c_1, c_2, \dots, c_s, 0, 0, \dots, 0]^T \quad X_2 = [d_1, d_2, \dots, d_s, 0, 0, \dots, 0]^T$$

وبالنظر إلى (٣) ، $AX_1 = B$ و $AX_2 = B$ تأخذ صيغة المتجهات :

$$\sum_{j=1}^s c_j A_j = B \quad \text{و} \quad \sum_{j=1}^s d_j A_j = B$$

باستخدام نتيجة المسألة ٣ - ٢ نستنتج أن : $X_1 = X_2$ حيث إن $c_j = d_j$. ويحدد هذا التناقض أن X ، في الحقيقة ، تكون نقطة طرفية .

١٥ - ٣ بين أن الحل الأولي X_0 المستنتج في الفصل الثاني هو حل أساسي ممكن .

تمثل فئة المتجهات A المرتبطة بالحل الأولي أعمدة $m \times m$ في المصفوفة الأحادية ، وأنها مستقلة خطياً .

مسائل مكملية

Supplementary Problems

١٦ - ٣ حدد بالرسم أن $[1, 2]^T$ هو تكوين محدب في $[1, 1]^T$ ، $[2, -1]^T$.

١٧ - ٣ اكتب معادلات القيود للبرنامج الخطي التالي في صيغة متجهات :

$$z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + Mx_4 + 0x_5 : \text{تصغير}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 : \text{علماً بأن}$$

$$2x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 6$$

كل المتغيرات لاسلبية

١٨ - ٣ حدد أيًا من المتجهات التالية تكون حلولاً أساسية ممكنة للبرنامج الخطي في المسألة ١٧ - ٣ ؟ هل ينحرف أي من الحلول الممكنة :

$$(a) [1, 1, 0, 0, 0]^T \quad (b) [3, 0, 0, 0, 0]^T \quad (c) [0, 0, 3, 0, 6]^T \quad (d) [0, 0, 3, 2, 8]^T$$

١٩ - ٣ اكتب معادلات القيود للبرنامج الخطي التالي في صيغة المتجهات :

$$z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 : \text{تعظيم}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 9 : \text{علماً بأن}$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_4 + x_6 = 9$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 0$$

كل المتغيرات لاسلبية

٢٠ - ٣ حدد أيًا من المتجهات التالية حل ممكن للبرنامج الخطي في المسألة ١٩ - ٣ ؟ هل ينحرف أي من الحلول الأساسية الممكنة ؟

$$(a) [3, 3, 0, 0, 0, 0, 0]^T \quad (c) [0, 0, 0, 3, 0, 0, 0]^T \quad (e) [1, 0, 0, 0, 8, 7, 1]^T$$

$$(b) [2, 2, 0, 1, 0, 0, 0]^T \quad (d) [0, 0, 0, 0, 9, 9, 0]^T \quad (f) [0, 0, 9, 0, 0, 9, -9]^T$$

٢١ - ٣ اثبت أنه إذا حققت الدالة الخطية قيمتها الصغرى عند نقطتين من النقطة المحيطة ، فإنها تحقق هذه القيمة الصغرى على كل الشريحة الخطية بين النقط ؟

٣ - ٢٢ اثبت أن أية فئة صفري غير فارغة في أية فئة متجهات مستقلة خطياً هي في حد ذاتها مستقلة خطياً؟

٣ - ٢٣ اثبت أن أية فئة متجهات تحتوي على متجه صفري هو مستقل خطياً؟

البرمجة الخطية طريقة السمبلكس

Linear Programming: The Simplex Method

جدول السمبلكس THE SIMPLEX TABLEAU

تعتبر طريقة السمبلكس هي طريقة المصفوفات لحل البرام الخطية في الصيغة القياسية .

$$z = C^T X \quad \text{أمنليسة :}$$

$$AX = B \quad \text{علما بأن :}$$

$$X \geq 0 \quad \text{عند :}$$

حيث إن $B \geq 0$ وبمعرفة الحل الأساسي الممكن X_0 (المسألة ٣ - ١٥) . توجد الطريقة بالتالي حلولاً أساسية ممكنة ابتداءً من X_0 وبقيم أحسن للهدف ، حتى الحصول على الحل الأمثل . وفي برامج التصغير تستخدم طريقة السمبلكس - جدول ٤ - ١ - وفيه يمثل C_0 متجه التكلفة المرتبط بالمتغيرات في X_0 .

	X^T C^T	
$X_0 \quad C_0$	A	B
	$C^T - C_0^T A$	$-C_0^T B$

جدول (٤ - ١)

وفي برامج التعظيم يطبق جدول ٤ - ١ إذا عكست إشارات الصف الأخير .

مثال ٤ - ١ في برنامج التصغير للمسألة ٢ - ١ ، إذا : $C_0 = [0, 2, M]^T$ ،

$$\begin{aligned} C^T - C_0^T A &= [1, 2, 3, 0, 0, M] - [0, 2, M] \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ \blacksquare & 0 & 9 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [1, 2, 3, 0, 0, M] - [10 + 8M, 2, 12 + 9M, 0, -M, M] = [-9 - 8M, 0, -9 - 9M, 0, M, 0] \\ -C_0^T B &= -[0, 2, M] \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = -14 - 2M \end{aligned}$$

ويصبح الجدول ٤ - ١

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	1	2	3	0	0	M	
x_4 0	3	0	4	1	0	0	5
x_2 2	5	1	6	0	0	0	7
x_6 M	8	0	9	0	-1	1	2
	-9-8M	0	-9-9M	0	M	0	-14-2M

تبسيط الجدول : A TABLEAU SIMPLIFICATION

لكل j ($j = 1, 2, \dots, n$) عرف $z_j = C_0^T A_j$ حاصل ضرب النقطة dot product لـ C_0 عند العمود j من A . المدخل رقم j في الصف الأخير من الجدول ٤ - ١ هو $C_j - z_j$ (أو $z_j - C_j$ في حالة التعظيم)، حيث إن C_j هي تكلفة الصف الثاني من الجدول فوق A_j مباشرة. وبمجرد الحصول على هذا الصف يصبح الصف الثاني والعمود الثاني في الجدول المناظرين لـ C^T و C_0 على التوالي زائدين عن الحاجة، ويمكن حذفهما.

طريقة السمبلكس THE SIMPLEX METHOD

- الخطوة ١ : حدد أعلى قيمة سالبة في الصف السفلي من جدول السمبلكس « باستثناء العمود الأخير » واطلق على العمود الذي تظهر فيه هذه القيمة « عمود العمل ». إذا وجد أكثر من رقم متساو، اختر أحدهما.
- الخطوة ٢ : كون نسباً بقسمة كل رقم موجب في عمود العمل « باستثناء الصف الأخير »، على العنصر (الرقم) في نفس الصف في العمود الأخير. وحدد العنصر في عمود العمل الذي يؤدي إلى أصغر نسبة « وأطلق عليه « العنصر المحوري » ». إذا أدى أكثر من رقم إلى نفس النسبة، فاختر أحدهما. وإذا لم يوجد في عمود العمل أى رقم موجب، يكون البرنامج ليس له حل.
- الخطوة ٣ : استخدم العمليات الأولية في تحويل العنصر المحوري إلى واحد، واختصار كل العناصر الأخرى في عمود المحور إلى صفر.
- الخطوة ٤ : استبدل المتغير x في صف المحور والعمود الأول بالمتغير x في الصف الأول وعمود المحور. وهذا العمود الأول هو فئة المتغيرات الأساسية الحالية (انظر فصل ٣)
- الخطوة ٥ : كرر الخطوات من ١ حتى ٤، حتى لا تبقى هناك أعداد سالبة في الصف الأخير، باستثناء العمود الأخير.
- الخطوة ٦ : نصل إلى الحل الأمثل بتخصيص لكل متغير في العمود الأول قيمة مناظرة في الصف المناظر والعمود الأخير. وكل المتغيرات الباقية تأخذ القيم صفر. والقيمة المثلى للهدف z^* المرتبطة بهذا هي العدد الموجود في الصف الأخير والعمود الأخير، في حالة برنامج التعظيم، والقيمة السالبة لهذا العدد في حالة برنامج التصغير.

تعديل البرنامج باستخدام المتغيرات الصناعية MODIFICATIONS FOR PROGRAMS WITH ARTIFICIAL VARIABLES

حيثما تكون المتغيرات الصناعية جزءاً من الحل الأولي X_0 ، فإن الصف الأخير من الجدول ٤ - ١ يحتوي على التكلفة الجزائية M (انظر فصل ٢). لتقليل أخطاء الاستكمال (انظر مسألة ٤ - ٦) تجري التعديلات التالية على طريقة السمبلكس « وتكون الطريقة الناتجة هي « طريقة المرحلتين » two-phase method ».

التغيير الأول : يقسم الصف الأخير في الجدول ٤ - ١ إلى صفين « يحتوي الأول منهما على الحدود التي لا تحتوي على M ، بينما يحتوي الثاني على معاملات M في الحدود الباقية ».

مثال ٤ - ٢ الصف الأخير في الجدول في المثال ٤ - ١

$$-9-8M \quad 0 \quad -9-9M \quad 0 \quad M \quad -14-2M$$

بالتغيير الأول يحول الصف إلى صفين هما :

$$\begin{array}{cccccc} -9 & 0 & -9 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & -14 \\ -8 & 0 & -9 & \blacksquare & 1 & 0 & -2 \end{array}$$

التغيير الثاني : تطبيق الخطوة الأولى في طريقة السمبلكس على الصف الأخير الناتج من التغيير الأول .
(ويتبع بالخطوات ٢ ، ٣ ، ٤) حتى لا يحتوى هذا الصف على عناصر سالبة . ثم تطبيق الخطوة الأولى على العناصر التي في الصف قبل الأخير ، والتي فوق الأصفار في الصف الأخير .

التغيير الثالث : عندما يتحول أى متغير صناعى إلى أساسى — أى ينتقل من العمود الأول في الجدول [نتيجة تطبيق الخطوة الرابعة] — فإنه يهدف من الصف الأعلى بالجدول ، وكذلك من كل العمود الذى تحته . (هذا التعديل يبسط الحسابات اليدوية ولا يستخدم في حالة برامج الحاسبات)

التغيير الرابع : يمكن حذف الصف الأخير من الجدول عندما يحتوى كله على أصفار .

التغيير الخامس : إذا وجدت متغيرات صناعية لا صفرية في الفئة الأساسية النهائية ، فإن البرنامج يكون ليس له حل . (وعلى النقيض ، فإن المتغيرات الصناعية الصفرية يمكن أن تظهر كمغيرات أساسية في الحل النهائي عندما تكون واحدة أو أكثر من معادلة القيود الأصلية زائدة عن الحاجة .

مسائل محلولة

Solved Problems

١ - ٤

$$z = x_1 + 9x_2 + x_3 \quad : \text{تعظيم}$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9 \quad : \text{علماً بأن}$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15$$

كل المتغيرات لا سالبة

يوضع هذا البرنامج في صورة مصفوفة قياسية بإدخال المتغيرات المساعدة x_4 x_5 في متباينات القيود الأولى والثانية على التوالى ، ثم نعرف بعد ذلك :

$$X = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \quad C = [1, 9, 1, 0, 0]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

وتكون التكلفة المرتبطة بعناصر X_0 (المتغيرات المساعدة) صفرية ، ومن ثم $C_0 = [0, 0]^T$. ويصبح جدول :

١ - ٤

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	1	9	1	0	0	
x_4 0	1	2	3	1	0	9
x_5 0	3	2	2	0	1	15

لحساب الصف الأخير من هذا الجدول نستخدم تبسيط الجدول ، ونحسب كل z_j أولاً . بالتفتيش : فإنها مضروب العمود 2 والعمود رقم j في A ، ثم نطرح منها التكلفة المناظرة c_j (برنامج تعظيم) . في هذه الحالة يكون العمود الثاني صفراً ، وكذلك $z_j - c_j = 0 - c_j = -c_j$ ، ومن ثم يكون الصف الأسفل من الجدول ، باستثناء العنصر الأخير ، هو القيم السالبة للصف الثاني . ويكون العنصر الأخير في الصف « ببساطة » هو مضروب العمود 2 والعمود النهائي B ، ويكون صفراً أيضاً . عند هذه النقطة يكون العمود الثاني والصف الثاني من الجدول زائدين . وبم حذفهما نحصل على الجدول ١ كجدول أولي كامل .

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	1/2	1	3/2	1/2	0	9/2
x_5	2	0	-1	-1	1	6
	7/2	0	25/2	9/2	0	81/2

جدول ٢

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	1	2*	3	1	0	9
x_5	3	2	2	0	1	15
$(z_j - c_j)$	-1	-9	-1	0	0	0

جدول ١

ويمكن الآن تطبيق طريقة السبيلكس . أعلى قيمة سالبة في العمود الأخير في الجدول ١ هي 9- ، مناظرة لعمود x_2 ، ومن ثم يختار هذا العمود هو عمود العمل . ويتكوين النسب $9/2 = 4.5$ ، $15/2 = 7.5$ نجد أن العنصر 2 ، الموضح بنجمة في الجدول الأول ، هو عنصر المحور . وبالتالي فتكون له أصغر نسبة . بتطبيق الخطوة ٣ ، ٤ على الجدول الأول ، نحصل على الجدول الثاني . وحيث إن الصف الأخير في الجدول الثاني لا يحتوي على عناصر سالبة ، فينتج من الخطوة ٦ أن الحل الأمثل هو : $x_1^* = 9/2$ ، $x_2^* = 6$ ، $x_3^* = x_4^* = x_5^* = 0$ عند : $z^* = 81/2$

$$z = 80x_1 + 60x_2 \quad \text{تصغير}$$

$$0.20x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25 \quad \text{علماً بأن}$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

مع x_1 و x_2 لا سلبين

بإضافة متغير مساعد x_3 ومتغير صناعي x_4 للقيدين الأول والثاني على التوالي يتحول البرنامج إلى صيغة المصفوفات القياسية :

$$X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \quad C = [80, 60, 0, M]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.32 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

بتعويض هذه المصفوفات « ومع $C_0 = [0, M]^T$ في جدول ٤ - ١ نحصل على الجدول صفر . وحيث إن الصف الأسفل يحتوي على M نطبق التغيير الأول ، فيكون الجدول ١ الناتج هو الجدول الأولي لطريقة المرحلتين .

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	80	60	0	M	
x_3 0	0.20	0.32	1	0	0.25
x_4 M	1	1	0	1	1
	$80 - M$	$60 - M$	0	0	$-M$

جدول صفر

	x_1	x_2	x_3	
x_3	0	0.12*	1	0.05
x_1	1	1	0	1
	0	-20	0	-80
	0	0	0	0

جدول ٢

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0.20	0.32	1	0	0.25
x_4	1*	1	0	1	1
$(c_j - z_j):$	80	60	0	0	0
	-1	-1	0	■	-1

جدول ١

باستخدام الخطوة الأولى لطريقة السبيلكس والتغيير الثاني نجد أن أعلى عنصر سالب في الصف الأخير من الجدول الأولي (باستثناء العمود الأخير) هو -1 والذي يظهر مرتين . وباختيار العمود x_1 كعمود عمل ، نكون النسب $0.25/0.20 = 1.25$ و $1/1 = 1$. وحيث إن العنصر 1 الموضح بنجمة في الجدول الأول يؤدي إلى أصغر نسبة ، فيصبح هو المحور ، ثم بتطبيق الخطوات ٣ ، ٤ والتغيير ٣ على الجدول ١ يمكن استنتاج الجدول 2 . لاحظ أن x_1 تحل محل المتغير الصناعي x_4 في العمود الأول لجدول ٢ ، لذلك فإن كل عمود x_i غير موجود في الجدول ٢ . والآن ، بدون متغيرات صناعية في العمود الأولي ، وتنفيذ التغيير الثالث يجب أن يكون كل الصف الأخير في الجدول صفياً ، أي أنه بالتغيير الرابع يمكن حذف هذا الصف ، ويتبقى

$$0 \quad -20 \quad 0 \quad -80$$

مثلاً الصف الأخير الجديد في الجدول ٢ .

بتكرار الخطوات من ١ إلى ٤ نجد أن العمود x_2 هو عمود العمل الجديد (مع تذكر أن العنصر في الصف الأخير قد استثنى في الخطوة ١) ، ويكون العنصر الموضح بنجمة في الجدول ٢ هو المحور الجديد ، وتؤدي العمليات الأولية للصف إلى الجدول ٣ ، وفيه قُربت كل الحسابات إلى أربعة أرقام . وحيث لا يحتوي الصف الأخير في الجدول ٣ — باستثناء العمود الأخير — على أى عناصر سلبية ، فإنه ينتج من الخطوة ٦ — بالمسألة ١ - ٢) .

	x_1	x_2	x_3	
x_2	0	1	8.333	0.4167
x_1	1	0	-8.333	0.5833
	0	0	166.7	-71.67

جدول ٣

٣ - ٤

$$\begin{aligned} z &= 5x_1 + 2x_2 : \text{تعظيم} \\ 6x_1 + x_2 &\geq 6 : \text{علماً بأن} \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 12 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 4 \end{aligned}$$

كل المتغيرات لا سلبية

يوضع هذا البرنامج في الصيغة القياسية بإدخال المتغيرات الزائدة x_3, x_4, x_5 على التوالي في متباينات القيود ، ثم المتغيرات الصناعية x_6, x_7, x_8 على التوالي في المعادلات الناتجة ، ثم بتطبيق طريقة المرحلتين « وتقريب كل الحسابات إلى أربعة أرقام ، نستنتج نتائجاً الجداول التالية ، وفيما يوضح عنصر المحور بنجمة .

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
	5	2	0	0	0	-M	-M	-M	
x_6 -M	6*	1	-1	0	0	1	0	0	6
x_7 -M	4	3	0	-1	0	0	1	0	12
x_8 -M	1	2	0	0	-1	0	0	1	4
$(z_j - c_j)$:	-5	-2	0	0	0	0	0	0	0
	-11	-6	1	1	1	0	0	0	-22

جدول ١

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	x_8	
x_1	1	0.1667	-0.1667	0	0	0	0	1
x_7	0	2.333	0.6668	-1	0	1	0	8
x_8	0	1.833*	0.1667	0	-1	0	1	3
	0	-1.167	-0.8335	0	0	0	■	5
	0	-4.166	-0.8337	1	1	■	0	-11

جدول ٢

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	
x_1	1	0	-0.1819	0	0.09095	0	0.7271
x_7	0	0	0.4546	-1	1.273*	1	4.181
x_2	0	1	0.09094	0	-0.5456	0	1.637
	0	0	-0.7274	0	-0.6367	0	6.910
	0	0	-0.4548	1	-1.273	0	-4.180

جدول ٣

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	-0.2144	0.07144*	0	0.4284
x_3	0	1	0.3571	-0.7855	1	3.284
x_2	0	1	0.2858	-0.4286	0	3.429
	0	0	-0.5000	-0.5001	0	9.001
	0	0	-0.0002	0.0001	0	0.0005

جدول ٤

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	14.00	0	-3.001	1	0	6.000
x_5	11.00	0	-2.000	0	-	7.997
x_2	6.000	1	-1.000	0	0	6.001
	7.001	0	-2.001	0	0	12.00

جدول ٥

والجدول ٤ هو أول جدول لا يحوى متغيرات صناعية في عموده الأول ، ومن ثم ، بتنفيذ التغيير الثالث « يجب أن يكون الصف الأخير في الجدول صفرياً . وبالتقريب الخطأ صفرياً » يمكن حذفه من الجدول « ومع ذلك فإن جدول ٥ يمثل مسألة لا يمكن تجاهلها ، وهى أن عمود العمل هو العمود x_3 ، وكل العناصر في هذا العمود سلبية ! ويتج من الخطوة ٢ أن البرنامج الأصلى ليس له حل . (من السهل التوضيح بالرسم أن المنطقة الممكنة محدودة ، وأن الدالة الهدفية يمكن جعلها كبيرة اختياريًا ، وذلك باختيار نقط ذات إحداثيات كبيرة) .

٤ - ٤

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + 3x_2 && \text{تعظيم} \\ x_1 + 2x_2 &\leq 2 && \text{علماً بأن :} \\ 6x_1 + 4x_2 &\geq 24 \end{aligned}$$

كل المتغيرات لا سلبية

يوضع هذا البرنامج في الصيغة القياسية بإدخال متغير زائد x_3 في القيد الأول ، وكذلك متغير زائد x_4 « ومتغير صناعى x_5 في القيد الثانى ، فيصبح الجدول ٤ - ١ بالتغيير الأول « جدول ١

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	2	3	0	0	-M	
x_3 0	1*	2	1	0	0	2
x_5 -M	6	4	0	-1	1	24
$(z_j - c_j)$:	-2	-3	0	0	0	0
	-6	-4	0	1	0	-24

جدول ١

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	2	1	0	0	2
x_5	0	-8	-6	-1	1	12
	0	1	2	0	0	4
	0	8	6	1	0	-12

جدول ٢

بتطبيق طريقة المرحلتين على الجدول ١ (عنصر المحور موضح بنجمة) يمكن إيجاد الجدول ٢ . ولا توجد مدخلات سلبية في الصف قبل الأخير من الجدول ٢ ، ولا توجد مدخلات سلبية في الصف قبل الأخير موضوعه أعلى من صفر في الصف الأخير . لذلك فإن طريقة المرحلتين تدل على الوصول إلى الحل الأمثل ، ولكن المتغير الصناعى غير الصفري x_5 مازال أساسياً ! وبالتغيير الخامس فإن البرنامج الأصلى ليس له حل . (في هذه الحالة z تكون فارغة ، حيث لا يمكن تحقيق متباينات القيود وشروط اللاسلبية آلياً) .

٥ - ٤

$$\begin{aligned} z &= -x_5 && \text{تعظيم} \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 - x_5 &\leq 0 && \text{علماً بأن :} \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 - 8x_4 - x_5 &\leq 0 \\ -3x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 &\leq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &\leq -1 \end{aligned}$$

x_1, x_2, x_3, x_4 لا سلبية

حيث إن x_5 غير مقيدة ، فإننا نضع $x_5 = x_6 - x_7$ ، حيث إن كلا من x_6 و x_7 غير سلبين ، وباقي المتغيرات لا سلبية . بضرب القيد الأخير في 1- . نحصل على طرف أيمن موجب ، ويمكن في النهاية تحقيق الصيغة القياسية بإضافة متغيرات مساعدة x_8 حتى x_{11} على التوالي إلى الأطراف اليسرى للقيد الأربعة الأولى . وبطرح المتغير الزائد x_{12} ، وإضافة متغير صناعي x_{13} إلى الطرف الأيسر للقيد الأخير . ويمثل الجدول ١ الجدول الأولي لطريقة المرحلتين ، ومنه نشق الجدول ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ من الجدول ٣ يكون الصف الأسفل دائماً لا سلبياً . وتقيد الخطوة الأولى في طريقة السمبلكس بالنسبة للعناصر في الصف قبل الأخير . والموضوعة أعلى من الصفر في الصف الأخير من الجدول ٦ .

$$x_1^* = 0 \quad x_2^* = 0.11667 \quad x_3^* = 0.7 \quad x_4^* = 0.18333 \quad x_5^* = x_6^* - x_7^* = -1.93334$$

$$z^* = 1.93334.$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	-M	
x_8	0	3*	-2	-4	6	-1	1	1	0	0	0	0	0	0
x_9	0	-4	2	-1	-8	-1	1	0	1	0	0	0	0	0
x_{10}	0	0	-3	-2	-1	-1	1	0	0	1	0	0	0	0
x_{11}	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
x_{13}	-M	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	1
$(z_j - c_j):$		0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
		-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	-1

جدول ١

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
x_1	1	-0.666667	-1.33333	2	-0.333333	0.333333	0.333333	0.333333	0	0	0	0	0	0
x_9	0	-0.666668	-6.33332	0	-2.333333	2.33333	1.33333	1.33333	1	0	0	0	0	0
x_{10}	0	-3	-2	-1	-1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
x_7	0	1.66667	2.33333*	-1	0.333333	-0.333333	-0.333333	-0.333333	0	0	1	0	0	1
x_{13}	0	1.66667	2.33333	-1	0.333333	-0.333333	-0.333333	-0.333333	0	0	0	-1	1	1
	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	-1.666667	-2.33333	1	-0.333333	0.333333	0.333333	0.333333	0	0	0	1	0	-1

جدول ٢

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
x_1	1	0.285715	0	1.42857	-0.142857	0.142857	0.142857	0	0	0.571428	0	0	0.571428	
x_9	0	3.85715	0	-2.71428	-1.42857	1.42857	0.428571	1	0	2.71427	0	0	2.71427	
x_{10}	0	-1.57142	0	-1.85714	-0.714286	0.714286*	-0.285714	0	1	0.857144	0	0	0.857144	
x_3	0	0.714288	1	-0.428572	0.142857	-0.142857	-0.142857	0	0	0.428572	0	0	0.428572	
x_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	0	
	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0

جدول ٣

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
x_4	0.583333	0	0	1	0	0	0.0666667	-0.05	-0.0166668	0.183333	0	0	0.183333	
x_2	-0.0833332	1	0	0	0	0	0.133333	0.15	-0.283333	0.116667	0	0	0.116667	
x_7	1.33333	0	0	0	-1	1	0.0666671	0.20	0.733334	1.93334	0	0	1.93334	
x_3	0.499999	0	1	0	0	0	-0.200000	-0.10	0.300000	0.700000	0	0	0.700000	
x_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	0
	1.33333	0	0	0	0	0	0.0666659	0.20	0.733333	1.93334	0	0	1.93334	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0

جدول ٦

حل البرنامج التالي باستخدام طريقة السمبلكس بدون أى تعديلات (هذه الطريقة تعرف باسم طريقة M الكبيرة) ؟ وبين كيف يؤثر التقريب على الإجابة ؟

$$z = -x_1 + 3x_2 - 6x_3 \quad : \text{تعظيم}$$

$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4 \quad : \text{علماً بأن}$$

$$5x_1 + 3x_2 - 4x_3 \geq 6$$

كل المتغيرات لا سلبية

يوضع هذا البرنامج في الصيغة القياسية بإدخال متغير زائد x_4 في متباعدة القيد ومتغيرات صناعية x_5, x_6 في مساويات القيود . والتعويض بالمعاملات المناسبة في جدول ٤ - ١ ، وتطبيق طريقة السمبلكس مباشرة ، وتقريب كل الحسابات إلى أربعة أرقام ، وتوضيح عناصر المحور بنجوم ، نستنتج الجداول التالية ١ حتى ٤ :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	-8	3	-6	0	-M	-M	
$x_5 -M$	1	-3	5	0	1	0	4
$x_6 -M$	5*	3	-4	-1	0	1	6
$(z_j - c_j):$	-6M+8	-3	-M+6	M	0	0	-10M

جدول ١

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_5	0	-3.6	5.8*	0.2	1	-0.2	2.8
x_1	1	0.6	-0.8	-0.2	0	0.2	1.2
Π		3.6M-7.8	-5.8M+12.4	-0.2M+1.6	0	1.2M-1.6	-2.8M-9.6

جدول ٢

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	-0.6207	1	0.03448	0.1724	-0.03448	0.4828
x_1	1	0.1034*	0	-0.1724	0.1379	0.1724	1.586
Π		-0.1033	0	1.172	M-2.138	M-1.172	-15.59

جدول ٣

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	6.003	0	1	-10.00	1.000	10.00	10.00
x_2	9.671	1	0	-1.667	1.334	1.667	15.34
Π	0.9990		0	0.9998	M-2	M-0.9998	-14.01

جدول ٤

حيث إن M تمثل رقماً موجباً كبيراً ، فإن كل العناصر المدخلة في الصف الأخير من الجدول ٤ ، باستثناء المدخلات في العمود الأخير ، تكون غير سلبية . ولذلك فإن الحل الأمثل يمكن قراءته مباشرة من الجدول بالآتي $x_3^* = 10.00$ ، $x_2^* = 15.34$ ، وكل المتغيرات الأخرى تكون صفرية $z^* = -14.01$.

يمكن ترك قيمة M في الحسابات السابقة كحرف وذلك في حالة الحسابات اليدوية . وفي حالة استخدام الحاسب ، فإنه يتم التعويض بقيمة كبيرة عن M مثلاً $M = 10\,000$. وبافتراض أن كل الأرقام مقربة إلى ٤ أرقام يصبح العمود الأخير في الجدول :

$$\begin{array}{ccccccc} -100\,000 & 0 & 0 & 10\,000 & -10\,000 & -3 & -60\,000 \end{array}$$

لاحظ أن الثوابت المضافة +8 في المدخل الأول ، و +6 في المدخل الثالث قد اختفت في عملية التقريب ، ويصبح الصف الأسفل في الجدول ٢ هو :

$$\begin{array}{ccccccc} -28\,000 & 12\,000 & -2\,000 & -58\,000 & 36\,000 & 0 & 0 \end{array}$$

بينما الصف الأسفل في الجدول ٣ يكون :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 10\,000 & 10\,000 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

والذي يدل على الأمثلة ١ ويمكن قراءة الحل الأمثل من الجدول ٣ : $x_1 = 1.586$ ، $x_2 = 0.4828$ ، وباقي المتغيرات تكون صفرية ، وأيضاً $z^* = 0$.

ولا تحدث مشكلة التقريب هذه في طريقة المرحلتين ، حيث إن الحدود التي لا تحتوي على M تكون منفصلة من تلك التي تحتوي عليها ، مما يجعل من المستحيل للحدود التي بها M أن تقصر الآخرين .

٧ - ٤ حل المسألة ٧ - ١

باستخدام البرنامج الرياضي المعروف في (١٢) في المسألة ٧ - ١ ندخل متغيرات مساعدة x_5 حتى x_{12} كل منها في إحدى معادلات القيود ، ومتغيرين صناعيين x_{13} ، x_{14} كل منهما في الصفين الآخرين للقيود . وبإدخال المعاملات المناسبة في الجدول ٤ - ١ ، واستخدام التغير الأول نحصل على الجدول ١ ، ثم بتطبيق طريقة المرحلتين نستخرج الجدول من ٢ حتى ٥ . ويمكن قراءة الحل الأمثل مباشرة من الجدول .

$$x_1 = 37\,727.3 \text{ برميلاً}$$

$$x_2 = 2727.3 \text{ برميلاً}$$

$$x_3 = 2272.7 \text{ برميلاً}$$

$$x_4 = 12\,272.7 \text{ برميلاً}$$

$$z^* = \$125\,000$$

وفي ظل هذا الجدول الأمثل للإنتاج تنتج شركة أرتك $x_1 + x_2 = 50\,000$ برميلاً من الزيت العادي له ضغط بخار 22.5 ، ورقم أكتين 89.7 ، وتنتج أيضاً $x_3 + x_4 = 50\,000$ برميلاً من الممتاز له ضغط بخار 19.5 ، ورقم أكتين 93.0 . لذلك ستنتج الكميات المطلوبة بالضبط لمواجهة الحد الأدنى من الاحتياجات بدون زيادة . ولتحقيق ذلك .. سنستخدم أرتك $x_1 + x_2 = 40\,000$ برميلاً من مخازنها (كل ما تملك) ، وكذلك $x_3 + x_4 = 15\,000$ برميلاً من المستودعات الأجنبية .

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	
	4	-3	6	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-M	-M	
x_3	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100 000
x_6	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20 000
x_7	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	40 000
x_8	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	60 000
x_9	0	1	-10	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
x_{10}	0	0	0	6	-5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
x_{11}	0	2	-8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
x_{12}	0	0	0	2	-8	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
x_{15}	-M	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	50 000
x_{16}	-M	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	5 000
$(z_j - c_j)$:	-4	3	-6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-55 000

جدول ١

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	
x_3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100 000
x_6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	15 000
x_7	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	40 000
x_8	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	55 000
x_9	1	-10	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
x_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-5	0	25 000
x_{11}	2	-8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
x_{12}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-8	0	40 000
x_{15}	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	50 000
x_4	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	5 000
	-4	3	-7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-5 000
	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-50 000

جدول ٢

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	
x_5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	50 000
x_6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	15 000
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	-0.0909	0	0	0	0.4545	37 727.3
x_8	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	45 000
x_9	0	0	0	0	0	0	-11	0	1	1	0	0	-10	-5	85 000
x_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0.0909	0	0	0	-0.4545	2 272.7
x_{11}	0	0	0	0	0	0	-10	0	0	0.9091	1	0	-8	-4.5455	22 727.2
x_{12}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.9091	0	1	0	-3.4545	17 272.7
x_2	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0.0909	0	0	-1	-0.4545	12 272.7
x_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-0.0909	0	0	0	-0.5455	2 727.3
	0	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	3	1	125 000

جدول ٣

٨ - ٤ بين مدى صحة طريقة السمبلكس في حل ٤ - ٢ جبراً ؟

البرنامج في الصورة القياسية هو :

$$\begin{aligned} z &= 80x_1 + 60x_2 + 0x_3 + Mx_4 \quad : \text{تعظيم} \\ \text{علماً بأن : } 0.20x_1 + 0.32x_2 + x_3 &= 0.25 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \end{aligned} \quad (1)$$

كل المتغيرات لا سلبية

بتطبيق النظرية المقدمة في الفصل الثالث على هذا النموذج فإن $m = 4$ (المتغيرات) ، و $n = 2$ (معادلات القيود) ، بحيث إن النقط الطرفية للمنطقة الممكنة S يجب أن تكون لها $m - n = 2$ عناصر صفرية . وحيث إن الحد الأدنى يجب أن يحدث عند إحدى النقط الطرفية ، فهذه هي الاعتبارات الوحيدة الممكن أخذها في الاعتبار .

كحل أولي بالنقطة الطرفية للنموذج (1) هو : $x_1 = x_2 = 0$ ، $x_3 = 0.25$ ، $x_4 = 1$ نحدد ما إذا كان هذا الحل يمكن تحسينه بكتابة الدالة الهدفية منفردة بدلالة المتغيرات الصفرية ، وهما x_1 و x_2 . (يمكن بالتأكد حل معادلات القيود في x_3 و x_4 بدلالة x_1 ، x_2 ، وذلك لأن حل النقطة الطرفية هو حل أساسي ممكن) . يحل معادلة القيد الثاني في x_4 والتعويض في الدالة الهدفية ، نحصل على :

$$z = (80 - M)x_1 + (60 - M)x_2 + M \quad (2)$$

بمقارنة النموذج (1) بالجدول صفر في المسألة ٤ - ٢ . وبملاحظة كيف تعطي (2) بالصف الأسفل من الجدول .

في الحل الحالي $x_1 = x_2 = 0$ ومن (2) $z = M$ يمكن اختصار الدالة الهدفية إذا كانت x_2 ، أو x_1 من الممكن أن تكون موجبة ، نختار x_1 . ولذلك فإن القيد (1) يحدد أن x_1 ليست أكبر من $0.25/0.20 = 1.25$ وحدات ، وذلك إذا ظلت المتغيرات الباقية لا صفرية ، بينما يحدد القيد الثاني أن x_1 ليست أكبر من واحد ، وذلك لنفس السبب . ولما كان القيدان يجب أن يتحققا ، فإن x_1 يجب ألا تزيد عن الواحد . بوضع $x_1 = 1$ كنتيجة $x_2 = x_4 = 0$ ، فإننا نحصل من معادلات القيد على $x_3 = 0.05$. ونؤكد هذه القيم حل النقط الطرفية (الأساسي) للبرنامج .

يدخل المتغير الصناعي x_4 مبدئياً فقط للحصول على الحل الأول . وفي النهاية يصل هذا المتغير إلى الصفر . وحيث إن لدينا الآن حلاً للبرنامج باستخدام $x_4 = 0$ ، فإننا يمكن أن نحذفه من أي اعتبار ، ونتمسك بالبرنامج :

$$\begin{aligned} z &= 80x_1 + 60x_2 + 0x_3 \quad : \text{تصغير} \\ \text{علماً بأن : } 0.20x_1 + 0.32x_2 + x_3 &= 0.25 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} (3) \\ (4) \\ (5) \end{aligned}$$

كل المتغيرات لا سلبية

وفيه حل النقط الطرفية - $x_1 = 1$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = 0.05$ - نلاحظ أن هذا الحل فيه $m = 3$ متغيرات ، $n = 2$ معادلة قيود ، لذلك فإن النقط الطرفية يجب أن تحتوي على الأقل على $3 - 2 = 1$ متغيرات صفرية .

لتحديد ما إذا كان الحل الابتدائي للبرنامج الجديد يمكن أن يُحسن ، نحل المعادلة (5) - المعادلة التي حددت x_1 - بالنسبة لـ x_2 ونعوض بالنتيجة في (3) ، (4) ؛ فيصبح البرنامج :

$$\begin{aligned} z &= 0x_1 - 20x_2 + 0x_3 + 80 \quad : \text{تصغير} \\ 0.12x_2 + x_3 &= 0.05 \quad : \text{علماً بأن} \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} (6) \\ (7) \\ (8) \end{aligned}$$

كل المتغيرات لا سلبية

قارن هذا البرنامج بالجدول ٢ في المسألة (٤ - ٢)

في الحل الحالي $x_2 = 0$ ، ويتبع أيضاً من (٦) أن $z = 80$. من هذه المعادلة يتضح أن z تنقص إذا زادت x_2 .
ويحدد القيد (٧) x_2 بالقيمة بين $5/12 = 0.05/0.12$ إذا بقيت المتغيرات الأخرى لا سلبية ، بينما تحدد (٨) قيمة x_2 بالواحد . ولما كان كلا القيدين يجب أن يتحققا ، فإن x_2 لا يمكن زيادتها عن $5/12$ ، وذلك يجعل $x_3 = 0$. نجد من (٨) أن $x_1 = 7/12$. وهذا هو حل النقطة الطرفية الجديد للبرنامج .

ولتحديد ما إذا كان من الممكن تحسين هذا الحل ، نحل المعادلة (٧) — المعادلة التي حددت قيمة x_2 — بالنسبة لـ x_2 . ونعوض بالنتيجة في (٦) ، (٨) ؛ فيصبح البرنامج :

$$\begin{aligned} (٩) \quad z &= 0x_1 + 0x_2 + 156.7x_3 + 71.67 \\ (١٠) \quad x_2 + 8.333x_3 &= 0.4167 \\ (١١) \quad x_1 - 8.333x_3 &= 0.5833 \end{aligned}$$

كل المتغيرات لا سلبية

المعادلة (١٠) هي نفسها (٧) مقسومة على 0.12 . قارن صيغة هذا البرنامج بالجدول ٣ في المسألة ٤ - ٢ .
في الحل الحالي $x_3 = 0$ ، لذلك ينتج من (٩) أن $z = 71.67$. كما ينتج من (٩) أيضاً أن أى قيمة موجبة لـ x_3 سوف تنقص قيمة z عن هذه القيمة . وفي الحقيقة ، فإن أى تخصيص لقيمة x_3 سوف يزيد قيمة z ، لذلك فإن الحل الحالي هو الحل الأمثل .

مسائل مكملية

Supplementary Problems

استخدم طريقة السمبلكس أو طريقة المرحلتين لحل المسائل التالية :

٩ - ٤

$$\begin{aligned} z &= x_1 + x_2 \quad : \text{تعظيم} \\ x_1 + 5x_2 &\leq 5 \quad : \text{علماً بأن} \\ 2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\text{ لا سلبية} \end{aligned}$$

١٠ - ٤

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 4x_2 \quad : \text{تعظيم} \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \quad : \text{علماً بأن} \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 9 \end{aligned}$$

x_1, x_2 لا سلبية

١١ - ٤

تصغير : $z = x_1 + 2x_2$

علمياً بأن : $x_1 + 3x_2 \geq 11$

$2x_1 + x_2 \geq 9$

x_1, x_2 لا سلبية

١٢ - ٤

تعظيم : $z = -x_1 - x_2$

علمياً بأن : $x_1 + 2x_2 \geq 5000$

$5x_1 + 3x_2 \geq 12000$

x_1, x_2 لا سلبية

١٣ - ٤

تعظيم : $z_1 = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$

علمياً بأن : $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4$

كل المتغيرات لا سلبية

١٤ - ٤

تصغير : $z = 14x_1 + 13x_2 + 11x_3 + 13x_4 + 13x_5 + 12x_6$

علمياً بأن : $x_1 + x_2 + x_3 = 1200$

$x_4 + x_5 + x_6 = 1000$

$x_1 + x_4 = 1000$

$x_2 + x_5 = 700$

$x_3 + x_6 = 500$

كل المتغيرات لا سلبية

١٥ - ٤ مسألة ٨ - ٢

١٦ - ٤ مسألة ١٠ - ٢

١٧ - ٤ مسألة ٩ - ٢

١٨ - ٤ مسألة ١١ - ٢

١٩ - ٤ مسألة ١٣ - ٢

٤ - ٢٥	مسألة ١ - ٧ ولكن الزيت المخزون ٨٠,٠٠٠ برميل ، والزيوت الأخرى ٢٠,٠٠٠
٤ - ٢٦	مسألة ١ - ١٧
٤ - ٢٢	مسألة ١ - ١٨
٤ - ٢٣	مسألة ١ - ١٩
٤ - ٢٤	مسألة ١ - ٢٢

البرمجة الخطية : الازدواجية

Linear Programming: Duality

يرتبط كل برنامج خطي في المتغيرات x_1, x_2, \dots, x_n برنامج خطي آخر في المتغيرات w_1, w_2, \dots, w_m (حيث إن m هي عدد القيود في البرنامج الأصلي) يعرف « بازدواج » البرنامج . والبرنامج الأصلي يسمى الأولي ، ويحدد تماماً شكل ازدواجه .

SYMMETRIC DUALS الازدواجيات المتماثلة

ازدواج برنامج خطي (أولي) في صيغة المصفوفات (غير القياسية)

$$z = C^T X : \text{تصغير}$$

$$AX \geq B : \text{علماً بأن}$$

$$X \geq 0 : \text{حيث}$$

١ - ٥

في البرنامج الخطي

$$z = B^T W : \text{تعظيم}$$

$$A^T W \leq C : \text{علماً بأن}$$

$$W \geq 0 : \text{حيث}$$

٢ - ٥

وبالعكس ، فإن ازدواج برنامج (٢ - ٥) هو البرنامج (١ - ٥) .

البرنامجان (١ - ٥) ، (٢ - ٥) يكونان متماثلين ، وكلاهما يحتوي على متغيرات لا سلبية ومتباينات قيود ، ويعرفان بأنهما الازدواجيات المتماثلة لكل منهما . ويطلق أحياناً على متغيرات الازدواج w_1, w_2, \dots, w_m تكلفة الظل .

DUAL SOLUTIONS حلول الازدواج

نظرية ١ - ٥ (نظرية الازدواجية **Duality Theorem**) : إذا وجد حل أمثل للبرنامج الأول أو برنامج الازدواج ، فإن البرنامج الآخر يكون له أيضاً حل أمثل ، ويكون لدالتي الهدف نفس الحل الأمثل .
في هذه الحالات يوجد الحل الأمثل للازدواج الأول في الصف الأخير من جدول السيملكس النهائي للازدواج الثاني ، وذلك في الأعمدة المرتبطة بالمتغيرات الزائدة أو المساعدة (انظر مسألة ٣ - ٥) . وحيث إن حل البرنامجين يمكن الحصول عليه من حل أحدهما ، فإنه من الأسهل حساباً حل الازدواج ، بدلاً من البرنامج نفسه (انظر المسألة ٤ - ٥)

نظرية ■ - ٢ (مبدأ المساعدة المكتملة *Complementary Slackness Principle*) : لما كان للازدواجين المتماثلين حلول مثل ■ فإن القيد رقم k في أى نموذج يمثل متباينة — بمعنى أن المتغير الزائد أو المساعد يكون موجباً — ويكون العنصر رقم k في الحل الأمثل في الازدواج المتماثل مساوياً للصفر .

انظر المسألتين (■ - ١١ ، ١٢ - ٥)

الازدواجات غير المتماثلة UNSYMMETRIC DUALS

في حالة البرامج الأولية في الصيغة القياسية يمكن تعريف الازدواجات كما يلي :

الازدواج	الأولي
$z = B^T W$: تعظيم $A^T W \leq C$: علماً بأن : (٤ - ٥)	$z = C^T X$: تصغير $AX = B$: علماً بأن : (٣ - ٥) $X \geq 0$: حيث
$z = B^T W$: تصغير $A^T W \geq C$: علماً بأن : (٦ - ٥)	$z = C^T X$: تعظيم $AX = B$: علماً بأن : (٥ - ٥) $X \geq 0$: حيث

(انظر المسائل ٥ - ٥ ، ٦ - ٥) . وبالعكس .. فإنه يمكن تعريف ازدواجات البرنامجين (■ - ٤) ، و (■ - ٦) بأنهما البرنامجان (٣ - ٥) ، (٥ - ٥) على التوالي . وحيث إن إزدواج أى برنامج في الصيغة القياسية لا يكون — في حد ذاته — في صيغة قياسية ، فتكون هذه الازدواجات غير متماثلة . وتكون هذه الصيغ مضسقة مع ، وتابعة مباشرة لتعريف الازدواجات المتماثلة (انظر المسألة ٥ - ٨) .
تتحقق أيضاً النظرية ■ - ١ للازدواجات غير المتماثلة تتحقق أيضاً . ومع ذلك .. لا يكون حل أى ازدواج غير متماثل ، عامة ، ظاهرة مباشرة من حل البرنامج الأول ، وتكون العلاقة :

$$\begin{aligned} (٧ - ٥) \quad W^{*T} &= C_0^T A_0^{-1} \quad \text{or} \quad W^* = (A_0^T)^{-1} C_0 \\ (٨ - ٥) \quad X^{*T} &= B_0^T (A_0^T)^{-1} \quad \text{or} \quad X^* = A_0^{-1} B_0 \end{aligned}$$

في (٧ - ٥) ، A_0 ، C_0 تتكونا من عناصر A ، C في برنامجيهما (■ - ٣) أو (٥ - ■) ، وينبع هذا للمتغيرات الأساسية في X^* ، في (٨ - ٥) ، A_0 و B_0 تتكونا من عناصر A ، B في برنامجيهما (٤ - ٥) أو (٥ - ٦) ، وينبع هذا للمتغيرات الأساسية W^* (انظر المسألة ٥ - ٧) .

مسائل محلولة

Solved Problems

١ - ٥ حلد الازدواج المتماثل للبرنامج

$$z = 5x_1 + 2x_2 + x_3 \quad : \text{ تصغير}$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 20 \quad : \text{ علماً بأن}$$

$$6x_1 + 8x_2 + 5x_3 \geq 30$$

$$7x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 40$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 50$$

(١)

كل المتغيرات لا سلبية

هذا البرنامج له صيغة (١ - ٥) « وازدواجه من الصيغة (٢ - ٥) يمكن إيجادها بأخذ عكس الأمثل « وتبادل C ، ■
ومقلوب A وعكس متباينات القيود :

$$z = 20w_1 + 30w_2 + 40w_3 + 50w_4 \quad : \text{ تعظيم}$$

$$2w_1 + 6w_2 + 7w_3 + w_4 \leq 5 \quad : \text{ علماً بأن}$$

$$3w_1 + 8w_2 + w_3 + 2w_4 \leq 2$$

$$w_1 + 5w_2 + 3w_3 + 4w_4 \leq \blacksquare$$

(٢)

كل المتغيرات لا سلبية

لاحظ أن البرنامج الأول (١) يحتوي على ثلاثة متغيرات وأربعة قيود ، بينما يحتوي ازدواجه (٢) على أربعة متغيرات وثلاثة قيود .

حدد الازدواج المتائل في البرنامج :

$$z = 2x_1 + x_2 \quad : \text{ تعظيم}$$

$$x_1 + 5x_2 \leq 10 \quad : \text{ علماً بأن}$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 8$$

(١)

كل المتغيرات لا سلبية

هذا البرنامج من الصيغة (٢ - ٥) بمتغيرات x تستبدل بالمتغيرات w . وبنفس خطوات المسألة (١ - ■) نجد الازدواج (١ - ٥) بالمتغيرات w ، بدلاً من المتغيرات ■ .

$$z = 10w_1 + 6w_2 + 8w_3 \quad : \text{ تصغير}$$

$$w_1 + w_2 + 2w_3 \geq 2 \quad : \text{ علماً بأن}$$

$$5w_1 + 3w_2 + 2w_3 \geq 1$$

كل المتغيرات لا سلبية

٣ - ٥ بين أن كلا من البرنامج الأولي والازدواج في المسألة (٢ - ٥) لهما نفس القيمة المثلى لـ z ، وأن حل كل منهما يتواجد في جدول السمبلكس الأخير كل للآخر .

بإدخال المتغيرات المساعدة x_3, x_4, x_5 على التوالي في متباينات القيود للبرنامج الأول (١) في المسألة (٥ - ٢) ،
وتطبيق طريقة السمبلكس على البرنامج الناتج ، فإننا نستنتج بالتتابع الجداول ١ ، ٢ .

	متغيرات مساعدة					
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	4	1	0	-1/2	6
x_4	0	2	0	1	-1/2	2
x_1	1	1	0	0	1/2	4
	0	1	0	0	1	8

حل الازدواج

جدول ٢

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	2	1	0	0	0	
x_3	0	1	5	1	0	10
x_4	0	1	3	0	1	6
x_5	0	2*	2	0	0	8
$(z_j - c_j)$:	-2	-1	0	0	0	0

جدول ١

يستنتج حل البرنامج الأول من الجدول ٢ : $x_1^* = 4, x_2^* = 0, z^* = 8$. ويوجد حل الازدواج في الصف الأخير من الجدول في الأعمدة المرتبطة بالمتغيرات المساعدة للحل الأمثل . وهنا : $w_1^* = 0, w_2^* = 0, w_3^* = 1$. ويمكن حل الازدواج مباشرة بإدخال مغيرات زائدة w_4 و w_5 ومتغيرات صناعية w_6 و w_7 للبرنامج (٢) في المسألة (٥ - ٢) ، وتطبيق طريقة المرحلتين التي تنتج الجداول ١، ٢، ٣، ٤ .

	متغيرات زائدة					
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	
w_5	-4	-5	0	-1	1	1
w_3	1/2	1/2	1	-1/2	0	1
	6	2	0	4	0	-8

حل البرنامج الأولي

جدول ٣

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	
	10	6	8	0	0	M	M	
w_6	M	1	1	2	-1	0	1	2
w_7	M	5*	3	2	0	-1	0	1
$(c_j - z_j)$:	10	6	8	0	0	0	0	0
	-6	-4	-4	1	1	0	0	-3

جدول ٤

يمكن قراءة حل الازدواج من الجدول ٤ كالتالي : $w_1^* = w_2^* = 0, w_3^* = 1$ ، حيث $z^* = -(-8) = 8$ ، ويوجد حل البرنامج الأولي في الصف الأخير من هذا الجدول في الأعمدة المرتبطة بالمتغيرات الزائدة . وهونفسه الحل السابق .

٤ - ٥

تصغير : $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

علماً بأن : $x_6 \geq 7$

$x_1 + x_2 \geq 20$

$x_3 + x_4 \geq 14$

$x_3 + x_4 \geq 20$

$x_4 + x_5 \geq 10$

$x_5 + x_6 \geq 5$

كل المتغيرات لا سلبية

لحل هذا البرنامج مباشرة يتطلب إدخال ١٢ متغيراً جديداً ستة منهم زائدة ، وستة صناعية . وتطبيق طريقة المرحلتين .
وكمدخل أسهل « فإننا نعتبر الأزواج :

$$z = 7w_1 + 20w_2 + 14w_3 + 20w_4 + 10w_5 + 5w_6 \quad \text{تعظيم}$$

$$w_1 + w_2 \leq 1 \quad \text{علماً بأن :}$$

$$w_2 + w_3 \leq 1$$

$$w_3 + w_4 \leq 1$$

$$w_4 + w_5 \leq 1$$

$$w_5 + w_6 \leq 1$$

$$w_1 + w_6 \leq 1$$

كل المتغيرات لا سلبية

		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	
		7	20	14	20	10	5	0	0	0	0	0	0	
w_7	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
w_8	0	0	1*	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
w_9	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
w_{10}	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1
w_{11}	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1
w_{12}	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
$(z_j - c_j):$		-7	-20	-14	-20	-10	-5	0	0	0	0	0	0	0

جدول ١

متغيرات مساعدة														
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}		
w_1	1	0	-1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	
w_2	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	
w_9	0	0	1	0	-1	0	0	0	1	-1	0	0	0	
w_4	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	
w_{11}	0	0	-1	0	1	0	1	-1	0	0	1	-1	0	
w_6	0	0	1	0	0	1	-1	1	0	0	0	1	1	
	0	0	4	0	10	0	2	18	0	20	0	5	45	

حل البرنامج الأولي

جدول ٥

يوضع هذا النموذج في الصيغة القياسية بإدخال ستة متغيرات جديدة كلها مساعدة . وتطبيق طريقة السمبلكس نحصل على التوالى على الجداول . يعطى الجدول ٥ الحل الأمثل للأزواج ، وبالتالي فإن الحل الأمثل للبرنامج الأولي يتواجد في الصف الأخير من هذا الجدول في الأعمدة المرتبطة بالمتغيرات المساعدة . وبالتحديد عند $z^* = 45$ ، $x_1^* = 2$ ، $x_2^* = 18$ ، $x_3^* = 0$ ، $x_4^* = 20$ ، $x_5^* = 0$ ، $x_6^* = 5$.

• - • حدد الأزواج البرنامج

$$\begin{aligned} z &= x_1 + 3x_2 - 2x_3 : \text{تعظيم} \\ 4x_1 + 8x_2 + 6x_3 &= 25 : \text{علماً بأن} \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= 30 \end{aligned}$$

كل المتغيرات لا سلبية

هذا البرنامج من الصيغة (٥ - ٥) ، ويعطى ازدواجه غير المتماثل في (٦ - ٥) كما يلي :

$$\begin{aligned} z &= 25w_1 + 30w_2 : \text{تصغير} \\ 4w_1 + 7w_2 &\geq 1 : \text{علماً بأن} \\ 8w_1 + 5w_2 &\geq 3 \\ 6w_1 + 9w_2 &= -2 \end{aligned}$$

٥ - ٦ حدود ازدواج البرنامج

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_5 + Mx_6 : \text{تصغير} \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 &= 7 : \text{علماً بأن} \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_6 &= 8 \end{aligned}$$

كل المتغيرات لا سلبية

ولما كان هذا البرنامج من الصيغة (٥ - ٣) ، فإن ازدواجه غير المتماثل يعطى (٥ - ٤) كما يلي :

$$\begin{aligned} z &= 7w_1 + 8w_2 : \text{تعظيم} \\ w_1 + 2w_2 &\leq 3 : \text{علماً بأن} \\ w_1 + 3w_2 &\leq 1 \\ -w_1 &\leq 0 \\ -w_2 &\leq 0 \\ w_1 &\leq M \\ w_2 &\leq M \end{aligned}$$

ولأن القيدين الثالث والرابع متكافئان ، ولأن القيدين الخامس والسادس يتطلبان أن تكون المتغيرا محددة

(هذا الشرط مفترض مسبقاً) ، فإن برنامج الازدواج يمكن تبسيطه إلى :

$$\begin{aligned} z &= 7w_1 + 8w_2 : \text{تعظيم} \\ w_1 + 2w_2 &\leq 3 : \text{علماً بأن} \\ w_1 + 3w_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

w_1, w_2 لا سلبية

٧ - ٥ حقق (٧ - ٥) ، (٨ - ٥) لبرامج المسألة (٥ - ٥) .

يمكن حل البرنامج الأولي باستخدام طريقة المرحلتين إذا أضيف المتغيران الصناعيان x_4 , x_5 على التوالي إلى الأطراف اليسرى لمعادلات القيود . نتج الجدول ٤١ ... ٤٤ =

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		1	3	-2	-M	-M	
x_4	-M	4	8	6	1	0	25
x_5	-M	7	5	9*	0	1	30
$(z_j - c_j)$:		-1	-3	2	0	0	0
		-11	-13	-15	0	0	-55

جدول ١

	x_1	x_2	x_3	
x_2	0	1	0.1668	1.528
x_1	1	0	1.167	3.193
	0	0	3.668	7.777

جدول ٤

يوضع الأزواج في الصيغة القياسية في المسألة ٢ - ٦ (بإحلال w_3 محل x_3) ، وتطبق طريقة المرحلتين لهذا البرنامج نستنتج الجدول ٤١ ... ٤٣ =

وينتج من جدول ٤ أن : $x_1^* = 3.193$, $x_2^* = 1.528$, $x_3^* = 0$ عند $z^* = 7.777$. وينتج من جدول ٣ أن

$$w_1^* = w_3^* - w_4^* = 0.4444 \quad w_2^* = w_3^* - w_5^* = -0.1111$$

$$z^* = -(-7.778) = 7.778 \text{ عند}$$

لاحظ أن قيم الهدف للبرنامج الأولي والأزواج متماثلة ، ما عدا تقريب الخطأ .

		w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	
		25	-25	30	-30	0	0	0	M	M	
w_{10}	M	4*	-4	7	-7	-1	0	0	1	-0	1
w_{11}	M	8	-8	5	-5	0	-1	0	0	1	3
w_9	0	-6	6	-9	9	0	0	1	0	0	2
$(c_j - z_j)$:		25	-25	30	-30	0	0	0	0	0	0
		-12	12	-12	12	1	1	0	0	0	-4

جدول ١

	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	
w_3	1	1	0	0	0.1389	-0.1944	0	0.4444
w_6	0	0	-1	1	0.2222	-0.1111	0	0.1111
w_9	0	0	0	0	-1.167	-0.1667	1	3.667
	0	0	0	0	3.195	1.528	0	-7.778

جدول ٣

لتحقيق (٧ - ٥) نلاحظ أن المتغيرات الأساسية في X^* هي x_1 , x_2 ومن ثم (٧ - ٥) تصبح :

$$W^{*T} = [1, 3] \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = [1, 3] \begin{bmatrix} -5/36 & 8/36 \\ 7/36 & -4/36 \end{bmatrix} = [16/36, -4/36] = [0.4444, -0.1111]$$

لتحقيق (٨ - ٥) نلاحظ أن المتغيرات الأساسية في W^* كما هو معطى بالجدول '٣' هي w_3, w_6, w_9 ، ومن ثم (٨ - ٥) تصبح :

$$X^{*T} = [25, -30, 0] \begin{bmatrix} 4 & -7 & 0 \\ \blacksquare & -5 & \blacksquare \\ -6 & 9 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = [25, -30, 0] \begin{bmatrix} -5/36 & 7/36 & 0 \\ -8/36 & 4/36 & 0 \\ 42/36 & 6/36 & 1 \end{bmatrix} \\ = [115/36, 55/36, 0] = [3.194, 1.528, 0]$$

بين أن صيغة الأزواج غير المتائلة تتحدد بصيغة الأزواج المتائل فقط . ٨ - ٥

اعتبر البرنامج (٢ - ٥) إذا المصفوفة $A, m \times n$ ، حيث إن قيد التساوي $AX=B$ يكون مكافئاً لقيد المتباينات $AX \leq B$ ، $AX \geq B$ ، وحيث يمكن كتابة هذه المتباينة الثانية $-AX \geq -B$ يكون البرنامج (٢ - ٥) مكافئاً لـ :

$$\begin{aligned} z = C^T X & : \text{تصغير} \\ \bar{A}X \geq \bar{B} & : \text{علماً بأن} \\ X \geq 0 & : \text{عند} \end{aligned} \quad (١)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ -B \end{bmatrix} \quad \text{حيث :}$$

يأخذ البرنامج (١) الصيغة (١ - ٥) ، ويعطي ازدواجه المتائل (٢ - ٥) (بكتابة \blacksquare بدلاً من W) :

$$\begin{aligned} z = \bar{B}^T U & : \text{تعظيم} \\ \bar{A}^T U \leq C & : \text{علماً بأن} \\ U \geq 0 & : \text{حيث} \end{aligned} \quad (٢)$$

وبنجزئه U إلى متجهين ذوي أبعاد U_1, U_2 ، وباستخدام تعريفات \bar{A}, \bar{B} يمكن كتابة (٢)

$$\begin{aligned} z = [\bar{B}^T, -\bar{B}^T] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} & = \bar{B}^T (U_1 - U_2) : \text{تعظيم} \\ [\bar{A}^T, -\bar{A}^T] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} & = \bar{A}^T (U_1 - U_2) \leq C : \text{علماً بأن} \\ U_1 \geq 0 \text{ and } U_2 \geq 0 & : \text{عند} \end{aligned} \quad (٣)$$

وأخيراً .. بتعريف $W = U_1 - U_2$ ، وملاحظة أن الفرق بين المتجهين غير السلبين ليس مقيماً بإشارة « نضع (٣) التي تعتبر ازدواج البرنامج (٢ - ٥) في الصيغة :

$$\begin{aligned} z = \bar{B}^T W & : \text{تعظيم} \\ \bar{A}^T W \leq C & : \text{علماً بأن} \end{aligned} \quad (٤)$$

والنموذج الأخير هو بالضبط البرنامج (٥ - ٤) .

بتكرار الخطوات السابقة بالكلمتين « تعظيم » « تصغير » متبادلتين ، وبمكس المتباينات في القيود الرئيسية ، يمكن بيان أن ازدواج البرنامج (٥ - ٦) هو البرنامج (٥ - ٦) .

٩ - ٥ اثبت أنه إذا كانت X أى حل ممكن للبرنامج (٥ - ١) ، و W أى حل ممكن للبرنامج (٥ - ٢) ، فإن :

$$C^T X \geq B^T W$$

إذا كانت X حلاً ممكناً لـ (٥ - ١) ، فإن : $AX \geq B$. بالضرب السابق للمتباينة في المتجه الالاسي W^T نحصل على : $W^T AX \geq W^T B$ والذي يكافئ :

(١)

$$W^T AX \geq B^T W$$

حيث $W^T B$ كمية غير متجهة .

إذا كانت W حلاً ممكناً لـ (٥ - ٢) ، فإن : $W^T A \leq C^T$ أو $A^T W \leq C$. بالضرب اللاحق في المتجهة الالاسية X نحصل على :

(٢)

$$W^T AX \leq C^T X$$

وبمقارنة (١) و (٢) معاً

$$C^T X \geq B^T W$$

١٠ - ٥ بمعرفة أن A في البرنامج (٥ - ١) هي $m \times n$ ، دع $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ ليكنوا متغيرات زائدة مدخلة في البرنامج لمعالجة متساويات القيود ، ودع : $w_{m+1}, w_{m+2}, \dots, w_{m+n}$ ليكنوا متغيرات مساعدة مدخلة إلى البرنامج (٥ - ٢) لنفس السبب ، ودع z_1 و z_2 لتكون قيم ذوال الهدف للبرنامج (٥ - ١) على التوالي . بين أن :

(١)

$$\sum_{j=1}^n x_j w_{m+j} + \sum_{i=1}^m w_i x_{n+i} = z_1 - z_2$$

البرنامج (٥ - ١) يأخذ الصيغة .

$$z_1 = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \dots + 0x_{n+m} \quad \text{تصغير}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1 \quad \text{علماً بأن :}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m$$

كل المتغيرات لا سلبية

بضرب معادلة القيد رقم i بالبرنامج في w_i ($i = 1, 2, \dots, m$) ونجمع النتائج ، نحصل على :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j w_i - \sum_{i=1}^m x_{n+i} w_i = \sum_{i=1}^m b_i w_i$$

يطرح هذه المعادلة من :

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = z_1$$

نحصل علی :

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j w_i + \sum_{i=1}^m x_{n+i} w_i = z_1 - \sum_{i=1}^m b_i w_i$$

الشی ممکن کتابتہا کا یلی :

$$(Y) \quad \sum_{j=1}^n \left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \right) x_j + \sum_{i=1}^m x_{n+i} w_i = z_1 - \sum_{i=1}^m b_i w_i$$

البرنامج (٢ - ■) يأخذ الصيغة :

$$\begin{aligned} z_2 &= b_1 w_1 + \dots + b_m w_m + 0w_{m+1} + 0w_{m+2} + \dots + 0w_{m+n} : \text{مطابق} \\ a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m + w_{m+1} &= c_1 : \text{اولی معادله} \\ a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m + w_{m+2} &= c_2 \\ &\vdots \\ a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m + w_{m+n} &= c_n \end{aligned}$$

كل المتغيرات لا مبنية

يحل المتغيرات المساعدة w_{m+1} ($U = 1, 2, \dots, n$) في البرنامج نجد أن :

$$w_{m+1} = c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

بالتعويض بهذه النتيجة في (٢) ، وملاحظة أن :

$$x_2 = \sum_{i=1}^n b_i v_i$$

نحصل على (١)

٥ - ١١ اثبت مبدأ المساعدة المتكاملة (نظرية ٥ - ٢) .

حلل البرنابجين (٥-١)، (٥-٢) حلاً أمثلاً W^* ، X^* على التوالي، تصبح العلاقة (١) في المسألة

2 (10-5)

$$\sum_{j=1}^n x_j^* w_{m+j}^* + \sum_{i=1}^m w_i^* x_{n+i}^* = 0$$

يصبح الطرف الأيمن صفراً بسبب النظرية (٥ - ١) ، ولما كان كل منفر في المعادلة السابقة غير سلبى ، فإن التجميعات الفردية يجب أن تنحصر ، بمعنى أن :

$$x_j^* w_{m+j}^* = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad \text{and} \quad w_i^* x_{n+i}^* = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

وفي اليسار مضروب العنصر رقم i من X^* في المتغير المساعد رقم j في البرنامج $(j = 1, 2, \dots, n)$ ، إذا كان أحدهما موجباً يجب أن يكون الآخر صفراً . وفي اليمين مضروب العنصر رقم i من W^* في المتغير الزائد رقم j في البرنامج $(j = 1, 2, \dots, m)$ ، إذا كان أحدهما موجباً ، فإن الآخر يكون صفراً .

١٢ - ٥ استخدم نتائج مسألة ٥ - ٣ لتحقيق مبدأ المساعدة المكملية .

باعتبار الجدول الأمثل للبرنامج الأولي (الجدول ٢) نجد أن المتغيرين المساعدين الأولين x_4 و x_5 موجبان $x_4 = 2$ و $x_5 = 6$. ومن ثم يجب أن يكون المتغيران الأزواجيان الأوليان w_2 و w_1 مساويين للصفر . وهما كذلك . ونجد كذلك أن متغير الأزواج الثالث $w_3 = 1$ وحيث إنه موجب ، فالمتغير المساعد الثالث في البرنامج الأولي x_3 يجب أن يكون صفرياً أيضاً . وهو كذلك .

بعد ذلك اعتبر الجدول الأمثل لبرنامج الأزواج (الجدول ٤) . يكون المتغير الزائد الثاني w_5 موجبا ، ومن ثم يجب أن يكون المتغير الأولي الثاني x_2 مساوياً للصفر . وهو كذلك . ويكون المتغير الأولي x_1 موجبا ، لذلك يجب أن يكون المتغير w_4 الزائد الأول في نموذج الأزواج مساوياً للصفر . وهو كذلك .

مسائل مكملية

Supplementary Problems

في المسائل من ٥ - ١٣ حتى ١٧ حدد أزواج البرام المعطاه

١٣ - ٥

$$z = 12x_1 + 26x_2 + 80x_3 \quad \text{تصغير}$$

$$2x_1 + 6x_2 + 5x_3 \geq 4 \quad \text{علماً بأن :}$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6$$

كل المتغيرات لا سلبية

١٤ - ٥

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 \quad \text{تصغير}$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_4 + x_5 \geq 6 \quad \text{علماً بأن :}$$

$$4x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 \geq 5$$

$$x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 7$$

كل المتغيرات لا سلبية

١٥ - ■

$$z = 6x_1 - x_2 + 3x_3 \quad \text{تنظيم}$$

$$7x_1 + 11x_2 + 3x_3 \leq 25 \quad \text{علماً بأن :}$$

$$2x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 30$$

$$6x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 35$$

كل المتغيرات لا سلبية

$$z = 10x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 25x_4 : \text{تعظيم}$$

١٦ - ٥

$$8x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 \geq 16 : \text{علماً بأن}$$

$$3x_1 + 2x_3 - x_4 = 20$$

كل المتغيرات لا سلبية

$$z = x_1 + 2x_2 + x_3 : \text{تصغير}$$

١٧ - ٥

$$x_2 + x_3 = 1 : \text{علماً بأن}$$

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 = 4$$

كل المتغيرات لا سلبية

١٨ - ■ بين أن البرنامج المعطى في المسألة ١٣ - ٥ له نفس القيمة المثلى مثل ازدواجه بحل البرنامجين مباشرة .

١٩ - ٥ أوجد الحل الأمثل — للبرنامج المعطى في المسألة ١٤ - ٥ بحل ازدواجه .

٢٠ - ■ حدد الازدواج المتماثل للبرنامج في المسألة ٤ - ٣ . حل الازدواج مباشرة ، وتحقق من أن أيّاً من البرنامجين الأولي أو ازدواجه المتماثل له حل ولكن ليس أمثل . وبالتالي .. فالآخر ليس له حل .

٢١ - ■ بإيجاد الازدواج غير المتماثل للبرنامج

$$z = -x_1 - x_2 : \text{تصغير}$$

$$x_1 - x_2 = 5 : \text{علماً بأن}$$

$$x_1 - x_2 = -5$$

كل المتغيرات لا سلبية

بين أنه من الممكن لكل من البرنامجين الأولي وازدواجه ألا يكون لهما حل ممكن .

٢٢ - ٥ استخدم نتائج المسألة ٤ - ٥ لتحقيق مبدأ المساعدة المكتملة .

٢٣ - ٥ حقق (٧ - ٥) ، (٨ - ٥) للبرنامج المعطى في المسألة ١٧ - ٥ .

٢٤ - ٥ اثبت أنه إذا كانت w_0 ، x_0 حلولاً ممكنة للبرنامجين (١ - ٥) ، (٢ - ٥) على التوالي ، بحيث إن : $C^T x_0 = B^T w_0$ ، فإن w_0 ، x_0 تكون حلولاً مثالية لبرامجها .

طريقة التفريع والتحديد برمجة الأعداد الصحيحة

Integer Programming: Branch-and-Bound Algorithm

التقريب الأول FIRST APPROXIMATION

برنامج الأعداد الصحيحة هو برنامج خطي ، بشرط أن تكون كل متغيراته أعداداً صحيحة (انظر الفصل الأول) . لذلك فإن التقريب الأول لحل برنامج الأعداد الصحيحة يمكن الحصول عليه بتجاهل هذا الشرط ، وحل البرنامج الخطي الناتج بإحدى الطرق السابق تقديمها . وإذا كان الحل الأمثل للبرنامج الخطي أعداداً صحيحة ، يكون هذا الحل هو نفسه الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة الأصلي (انظر المسألة ٦ - ٣) . وإلا - وهذه هي الحالة الغالبة - فإنه يجب تقريب عناصر الحل إلى أقرب أعداد صحيحة ممكنة للحصول على التقريب الثاني . وتنفذ هذه الطريقة غالباً ، وبخاصة إذا كان التقريب الأول يحتوي على أعداد كبيرة ، ولكنها قد تكون غير دقيقة ، إذا كانت الأعداد صغيرة (انظر المسألة ٦ - ٥) .

التفريع BRANCHING

إذا احتوى التقريب الأول على متغير غير صحيح ، مثل x_i^* ، فإن $x_i^* < x_i^* < x_i^*$ ، حيث تكون x_i^* ، x_i^* بالتالي أعداداً صحيحة لا سلبية . ويتولد برنامجاً أعداد صحيحة بتزويد برنامج الأعداد الصحيحة الأصلي بأى من القيدين $x_i \leq x_i^*$ ، $x_i \geq x_i^*$ ، وتسمى هذه الطريقة « التفريع » ، ولها تأثير على تقليص المنطقة الممكنة بطريقه يمكن بها حذف الحل الحالي للأعداد غير الصحيحة في x_i^* . ولكنها تحافظ على كل حلول الأعداد الصحيحة الممكنة للمسألة الأصلية (انظر ٦ - ٨) .

مثال ٦ - ١ : كتقريب أول لبرنامج الأعداد الصحيحة

$$\begin{aligned} z &= 10x_1 + x_2 : \text{تعظيم} \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 11 : \text{علماً بأن} \end{aligned}$$

(٦ - ١)

عند : x_1 ، x_2 صحيحة ولا سلبية

اعتبر البرنامج الخطي المرتبط بهذا البرنامج ، والذي نحصل عليه بحذف شرط الأعداد الصحيحة . يمكن إيجاد الحل بالرسم في الآتي :
عند $x_1^* = 5.5$ ، $x_2^* = 0$ ، حيث إن $5 < x_1^* < 6$ ، فإن التفريع يوجد برنامجي الأعداد الصحيحة الجديدين .

$$\begin{aligned} z &= 10x_1 + x_2 : \text{تعظيم} \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 11 : \text{علماً بأن} \\ x_1 &\leq 5 \end{aligned}$$

(٦ - ٢)

x_1 ، x_2 صحيحة ولا سلبية

$$\begin{aligned} z &= 10x_1 + x_2 : \text{تعظيم} \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 11 : \text{علماً بأن} \\ x_1 &\geq 6 \end{aligned}$$

x_1, x_2 صحيحة ولا سلبية

نحصل على التقريب الأول لبرنامج الأعداد الصحيحة الناتجة من عملية التفرع بتجاهل شرط الأعداد الصحيحة ، وحل البرنامج الخطئى الناتج . إذا ظل التقريب الأول أعداداً غير صحيحة ، فإن برنامج الأعداد الصحيحة الذى أعطى زيادة للتقريب الأول يصبح أساساً لعملية تفرع تالية .

مثال ٦ - ٢ : باستخدام طريقة الرسم نجد أن البرنامج (٦ - ٢) له التقريب الأول $x_1^* = 5, x_2^* = 0.2$ عند $z^* = 50.2$. بينما البرنامج (٦ - ٣) ليس له حل ممكن . لذلك فإن البرنامج (٦ - ٢) يعتبر أساساً لتفرعات تالية . حيث $0 < x_2^* < 1$ ، فنزيد (٦ - ٢) بإحدى $x_2 \geq 1$ ، $x_2 \leq 0$ ونحصل على البرنامجين الجديدين .

$$\begin{aligned} z &= 10x_1 + x_2 : \text{تعظيم} \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 11 : \text{علماً بأن} \\ x_1 &\leq 5 \\ x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

حيث x_1, x_2 صحيحة ولا سلبية

(وفيه $x_2 = 0$ بالحتم) و

$$\begin{aligned} z &= 10x_1 + x_2 : \text{تعظيم} \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 11 : \text{علماً بأن} \\ x_1 &\leq 5 \\ x_2 &\geq 1 \end{aligned}$$

حيث إن x_1, x_2 صحيحة ولا سلبية

بتجاهل شرط الأعداد الصحيحة ، يكون حل البرنامج (٦ - ٤) عند $x_1^* = 5, x_2^* = 0$ ، بينما حل البرنامج (٦ - ٥) يكون $x_1^* = 3, x_2^* = 1$ عند $z^* = 31$. وحيث إن كلا من هذين التفرعين صحيح ، فإنه ليس من المطلوب أى تفرع تال .

التحديد BOUNDING

يفرض تعظيم الدالة الهدفية ، فإن التفرع يستمر حتى الحصول على تقريب الأعداد الصحيحة الأول (الذى يكون حل أعداد صحيحة) . وتصبح قيمة الهدف لحل الأعداد الصحيحة الأول هي الحد الأسفل للمسألة ، وكل البرامج التى تؤدي حلولها الأولى — سواء أعداد صحيحة أم لا — إلى قيم دالة هدفية أصغر من الحد الأسفل ، تصبح ملغاة .

مثال ٦ - ٣ : للبرنامج (٦ - ١) حل أعداد صحيحة $z^* = 50$ ، ومن ثم يصبح الحد الأسفل للمسألة . وللبرنامج (٦ - ٥) حل $z^* = 31$ ، وحيث إن 31 أقل من الحد الأسفل 50 ، فإن البرنامج (٦ - ٥) يُلغى من الاعتبار (وقد كان سيلغى أيضاً حتى إذا كان التقريب الأول له أعداد غير صحيحة) .

يستمر التفريع من هذه البرامج التي لها تقريب أولى بأعداد غير صحيحة ، والتي تعطى قيماً للدالة الهدفية أكبر من الحد الأسفل . وإذا لم يتحقق في هذه العملية أن يعطى حل الأعداد الصحيحة الجديدة قيمة للدالة للهدفية أكبر من القيمة الحالية للحد الأسفل ، فإن هذه القيمة للدالة الهدفية تصبح حداً أسفلاً جديداً . ويلغى البرنامج الذي نتج عنه الحد الأسفل القديم ، وكل البرامج التي يؤدي تقريبها الأول إلى قيم للدالة الهدفية أصغر من الحد الأسفل الجديد . وتستمر عملية التفريع حتى لا توجد أى برامج لها تقريب أول أعداد غير صحيحة متبقية تحت الاعتبار . عند هذه النقطة ، فإن حل الحد الأسفل الحالي هو الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة الأصلي .

في حالة تصغير الدالة الهدفية تظل الطريقة نفسها ، ما عدا أن الحد الأعلى يستخدم ، لذلك فإن قيمة حل الأعداد الصحيحة الأول يصبح حداً أعلى للمسألة ، وتلغى البرامج عند قيم التقريب الأول z الأكبر من الحد الأعلى الحالي .

الاعتبارات الحسابية COMPUTATIONAL CONSIDERATIONS

يتم التفريع دائماً من البرامج التي تظهر قربه من الحل الأمثل . وعندما يوجد عدد من العناصر لتفريع أكثر ، يختار التفريع ذا أكبر قيمة لـ z ، إذا كان الهدف تعظيم الدالة الهدفية أو التي لها أصغر قيمة لـ z ، إذا كان الهدف تصغير الدالة الهدفية .

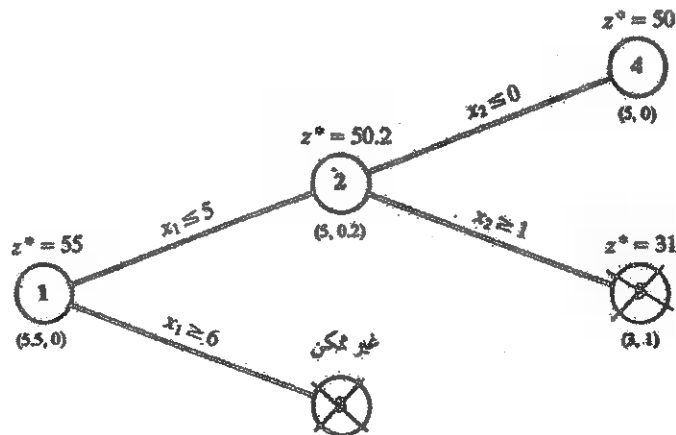
تضاف القيود الإضافية واحداً في كل مرة . إذا احتوى التقريب الأول على أكثر من متغير واحد غير صحيح ، فتفرض هذه القيود الجديدة على هذا المتغير الذي غالباً ما يكون عدداً صحيحاً . بمعنى أن المتغير الذي يقترب جزء الكسر فيه من 0.5 ، ولو حدث تساوي يُختار الذي يقوم بالحل أحد هذه المتغيرات .

وأخيراً .. فإنه من الممكن لأي برنامج أعداد صحيحة أو أى برنامج خطي مرتبط به أن يكون له أكثر من حل أمثل . وفي كلتا الحالتين فإننا نتمسك بما جاء في الفصل الأول باختيار أحدهما كحل أمثل ، مع ترك الباقي .

مسائل محلولة

Solved Problems

١ - ٦ ارسـم الشـكل الخـطـي (الشـجـرة) الـتي تـعـبر عـن نـتـائـج الأـمـثـلـة مـن (٦ - ١) إلـى (٦ - ٣) .



شكل ١ - ٦

انظر شكل (٦ -). يوضح برنامج الأعداد الصحيحة (٦ - ١) برقم 1 داخل دائرة. وتوضح باقي البرامج الأخرى المتكونة من التفرعات طبقاً لترتيب تكوينها بدوائر مرقمة على التوالي. لذلك فإن البرنامجين (٦ - ٢) حتى (٦ - ٦) يوضحان بالدوائر رقم 2، 5 على التوالي. ويكتب الحل التقريبي الأولي لكل برنامج بالدائرة التي توضح هذا البرنامج. وتوصل كل دائرة (برنامج) بعد ذلك بخط بالدائرة (البرنامج) التي كونه من خلال عملية التفرع. ويكتب القيد الذي أوجد عملية التفرع فوق الخط. وأخيراً تشطب الدائرة التي يحذف برنامجها من أي اعتبار تال. ومن ثم يحذف التفرع 3. لأنه ليس ممكناً؟ وقد حذف التفرع 5 بعملية التحديد في المثال (٦ - 3). وحيث إنه لا تبقى أي تفرعات أعداد غير صحيحة لكي تؤخذ في الاعتبار. فإن الرسم التخطيطي الذي يدل على البرنامج 1 يحل في

$$x_1^* = 5, x_2^* = 0, z^* = 50$$

٢ - ٦

$$z = 3x_1 + 4x_2 \quad \text{تعظيم}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6 \quad \text{علماً بأن:}$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

x_1, x_2 أعداد صحيحة لا سلبية

بإهمال شرط الأعداد الصحيحة، نحصل على $x_1^* = 1.5, x_2^* = 2.25, z^* = 12.75$ كحل للبرنامج الخطي المرتبط به. وحيث إن $x_2^* = 2.25$ بعيد عن القيمة الصحيحة من x_1^* ، فإننا نستخدمها لتكوين التفرعات $x_2 \geq 2$ و $x_2 \leq 1$.

البرنامج ٥

$$z = 3x_1 + 4x_2 \quad \text{تعظيم}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6 \quad \text{علماً بأن:}$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_2 \geq 2$$

x_1, x_2 صحيحة ولا سلبية

البرنامج ٦

$$z = 3x_1 + 4x_2 \quad \text{تعظيم}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6 \quad \text{علماً بأن:}$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_2 \leq 1$$

x_1, x_2 صحيحة ولا سلبية

التقريب الأولي للبرنامج 2 هو $x_1^* = 2.5, x_2^* = 1, z^* = 11.5$ والتقريب الأول للبرنامج 3 هو $x_1^* = 1.5, x_2^* = 2$ عند $z^* = 12.5$ تبين هذه النتائج في الشكل (٦ - ٢)، حيث إن البرنامجين 2 و 3 هما تقريب أول غير صحيح، ولذا فإنه يمكن التفرع من أحدهما. ونختار البرنامج 3، لأن له قيمة أكبر للدالة الهدفية (أقرب إلى الأمثلية)، وهنا $1 < x_1^* < 2$ ، ويكون البرنامج الجديد هو:

برنامج 5

$$z = 3x_1 + 4x_2 \quad \text{تعظيم}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6 \quad \text{علماً بأن:}$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_1 \geq 2$$

x_1, x_2 صحيحة ولا سلبية

برنامج 4

$$z = 3x_1 + 4x_2 \quad \text{تعظيم}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6 \quad \text{علماً بأن:}$$

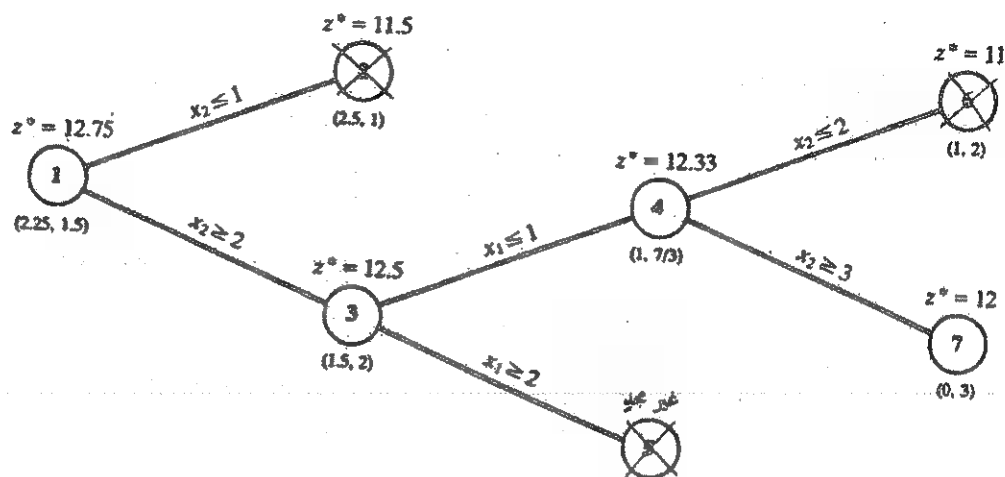
$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_1 \leq 1$$

x_1, x_2 صحيحة ولا سلبية

ولا يوجد حل للبرنامج 5 (غير ممكن) ، بينما حل البرنامج 4 مع تجاهل قيود الأعداد الصحيحة هو $x_1^* = 1$ $x_2^* = 7/3$ عند $z^* = 12.33$ (انظر شكل ٦ - ٢) . ويمكن أن يستمر التفريع من أى من البرنامجين 2 أو 4 نختار البرنامج 4 حيث إن له قيمة أكبر لـ z .



شكل ٦ - ٢

وهنا $2 < x_2^* < 3$ ، ولذلك تصبح البرامج الجديدة

البرنامج 7

$$\begin{aligned} z = 3x_1 + 4x_2 &: \text{تعظيم} \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6: \text{علما بأن} \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\ x_2 &= 2 \\ x_1 &\leq 1 \\ x_2 &\geq 3 \end{aligned}$$

حيث x_1, x_2 صحيحة ولا سلبية

البرنامج ٥

$$\begin{aligned} z = 3x_1 + 4x_2 &: \text{تعظيم} \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6: \text{علما بأن} \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\ x_2 &\geq 2 \\ x_1 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

حيث x_1, x_2 صحيحة ولا سلبية

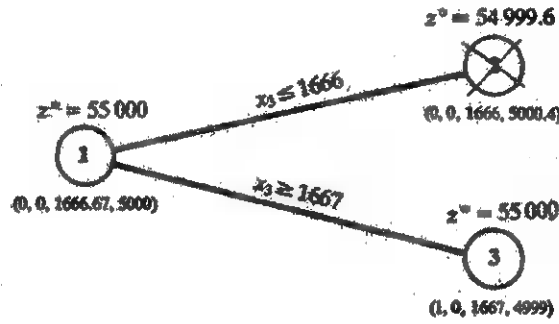
ويكون حل البرنامج 6 بتجاهل القيود الصحيحة هو $x_1^* = 1$ $x_2^* = 2$ عند $z^* = 11$. وحيث إنه حل أعداد صحيحة ، $z = 11$ تصبح الحد الأسفل للمسألة ، فإن أى حل يؤدي بقيمة z لأقل من 11 يجب أن يمحذف . والتفريع الأول للمسألة ٧ هو $x_1^* = 0$ $x_2^* = 3$ عند $z^* = 12$. وحيث إن هذا هو حل أعداد صحيحة وقيمة z أكبر من الحد الأسفل الحالي ، تصبح $z = 12$ الحد الأسفل الجديد ، ويحذف البرنامج الذى نتج عنه الحد الأسفل القديم ، وهو البرنامج 6 من أى اعتبار تال ، كما فى البرنامج 2 . بين شكل ٦ - ٢ الآن أنه لا تبقى أى تفريعات إلا المرتبطة بالحد الأسفل الحالي . وبالتالي فإن هذا التفريع يعطى الحل الأمثل للبرنامج 1 : $x_1^* = 0$ $x_2^* = 3$ عند $z^* = 12$

٣ - ٦ حل المسألة (١ - ٩) .

بالتفاضل عن شرط الأعداد الصحيحة في البرنامج (1) بالمسألة (١ - ٩) ، فإننا نحل البرنامج الخطي أولاً لإيجاد (أنظر المسألة ٥ - ٤) : $x_1 = 2, x_2 = 18, x_3 = 0, x_4 = 20, x_5 = 0, x_6 = 5, z = 45$ عند $z^* = 45$ وهذا هو التقريب الأول . حيث أنه أعداداً صحيحة ، ومع ذلك ، فهو أيضاً الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة الأصلي .

٤ - ٦ حل المسألة (١ - ٦) .

بالتفاضل عن شرط الأعداد الصحيحة في البرنامج (4) بالمسألة (١ - ٦) نحصل على $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 1666.67, z = 55000$ عند $z^* = 55000$ كتقريب أول . وحيث أن x_3 غير صحيحة فإننا نفرغ إلى برنامجين جديدين ، ونحلها بالتفاضل عن شرط الأعداد الصحيحة . توضح النتيجة في الشكل (٦ - ٣) . برنامج (3) له حل أعداد صحيحة عند قيمة z أكبر من قيمة z بالبرنامج (2) . وبالتالي نحذف برنامج (2) ونقبل حل البرنامج (3) كحل أمثل وهو $z^* = 54999.6$ عند $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1667, x_4 = 4999$.



شكل (٦ - ٣)

٥ - ٦ ناقش الأخطاء الناتجة عن تقريب التقريب الأول للبرنامج الأصلي في المسألة (٦ - ٢) ، (٦ - ٤) إلى أعداد صحيحة ثم أخذ هذه الاتجاهات إلى الحلول التلي .

كان التقريب الأول في المسألة (٦ - ٢) هو $x_1 = 2.25, x_2 = 1.5$ ، ونرغب الآن في التقريب إلى أقرب نقطة أعداد صحيحة في منطقة الحلول الممكنة . في النقاط الأربعة ذات الأعداد الصحيحة التي تحدد التقريب الأول ، نجد أن نقطة واحدة فقط هي النقطة (2, 1) التي تقع داخل منطقة الحلول الممكنة . لذلك فإننا نأخذ $x_1 = 2, x_2 = 1$ عند قيمة z المناظرة $z^* = 10$ كحل أمثل مقترح . وقد وجد أن الحل الأمثل الحقيقي هو $z^* = 12$ ، لذلك فإن الحل المقرب يختلف عن الحل الحقيقي بأكثر من ١٦ في المئة .

كان التقريب الأول في المسألة (٤ - ٦) هو $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 1666.67, x_4 = 5000$ ، ونرغب في x_3 لتصبح ممكنة ، نحصل على $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 1666, x_4 = 5000$ كإحداثيات للحل الأمثل . وتكون قيمة z المناظرة هي \$ 54996 التي تختلف عن الحل الحقيقي $z^* = 55000$ بأقل من 0.008 في المئة .

$$z = x_1 + x_2 \quad : \text{تصغير}$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 5 \quad : \text{علماً بأن}$$

$$12x_1 + 5x_2 \leq 30$$

عند $x_1 = x_2$ صحيحة ولا سلبية

التقريب الأول لهذا البرنامج هو $x_1^* = 2.5$ $x_2^* = 0$ عند $z^* = 2.5$. بتقريب x_1^* لأعلى حتى تبقى ممكنة نحصل على $x_1^* = 3$ $x_2^* = 0$ عند $z^* = 3$ كتقدير للحل الأمثل للبرنامج الأصلي. لا حظ مع ذلك أن الدالة الهدفية يجب أن تكون أعداداً صحيحة. وذلك لقيم الأعداد الصحيحة للمتغيرات. قيمة z للتقريب الأول $z^* = 2.5$ تعطي حداً أسفل للقيمة المثلى للهدف، وبالتالي فإن القيمة المثلى للهدف لا يمكن أن تقل عن 3. ولما كان هناك تقدير للحفاظ على القيمة 3، فإن هذا التقدير يجب أن يكون أمثل، بمعنى: $x_1^* = 3$ $x_2^* = 0$ عند $z^* = 3$.

٧ - ٦ حل مشكلة حقائب الظهر المصاغة في المسألة ١ - ٨.

يمكن استخدام طريقة السمبلكس لإيجاد التقريب الأول للبرنامج. للمسألة ١ - ٨. والطريقة التالية تعبر أكثر كفاءة: يعتبر العامل الحرج الذي يحدد أخذ أحد العناصر ليس بوزنه أو قيمته، ولكن بالنسبة بينهما - قيمته لكل رطل - ونطلق على هذا العامل عامل الرغبة. ويمكن إضافته إلى البيانات لإنشاء الجدول ٦ - ١، حيث تكتب العناصر مرتبة طبقاً لعامل الرغبة المتناقص. وللحصول على الحل الأمثل لمسألة حقائب الظهر بتجاهل قيد الأعداد الصحيحة، نأخذ أكبر عدد ممكن من العناصر (بدون الزيادة عن قيد وزن ٦٠ رطلاً) مبتدئين بالأكبر رغبة. ويتبع من جدول ٦ - ١ أن التقريب الأول يتكون من كل عنصر 2 (الأكبر رغبة)، كل عنصر 3 (الثانية في الرغبة)، و ٣٠ رطلاً من العنصر 3: $x_1^* = 0$ $x_2^* = 1$ $x_3^* = 30/35$ $x_4^* = 0$ $x_5^* = 1$ عند $z^* = 135$.

العنصر	الوزن - رطل	القيمة	الرغبة القيمة / رطل
2	23	60	2.61
5	7	15	2.14
3	35	70	2.00
1	52	100	1.92
4	15	15	1.00

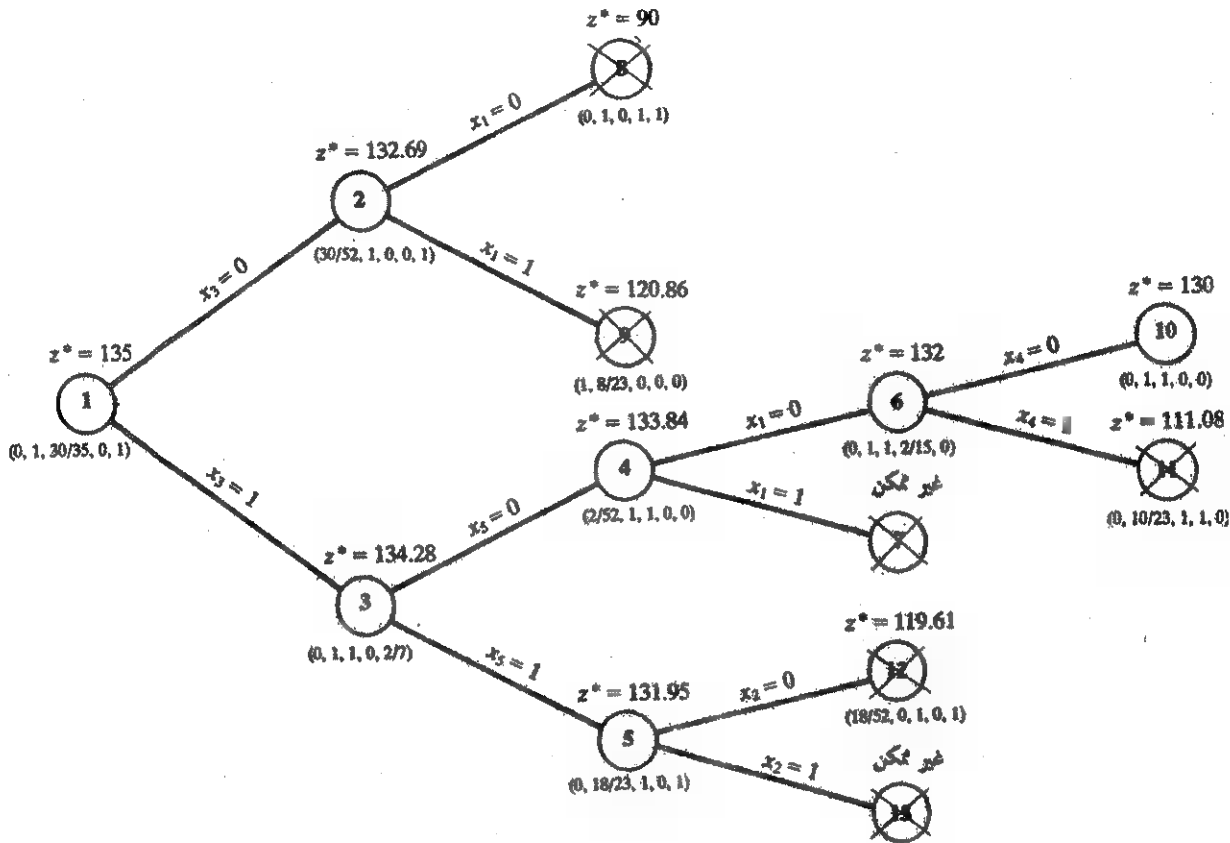
جدول ٦ - ١

وحيث إن هذا التقريب ليس أعداداً صحيحة، فإننا نحدث تقريباً بزيادة القيود الأصلية بأي من $x_3 \geq 1$ أو $x_3 \leq 0$. وقبل عمل ذلك نلاحظ أنه لما كانت x_3 مطلوبة أن تكون لا سلبية، فإن القيد $x_3 \leq 0$ يمكن أن يلتزم بالقيمة $x_3 = 0$. ولما كان واحداً على الأكثر من أي عنصر سيؤخذ، فإن القيد $x_3 \geq 1$ يمكن أن يلتزم بالقيمة $x_3 = 1$. ويوضح ذلك في لوحة الشجرة ٦ - ٤.

بالتفاضل عن شرط الأعداد الصحيحة. نحدد الحل الأمثل لكل من البرامج 2 و 3 في شكل ٦ - ٤ باستخدام الجدول ٦ - ١

لإيجاد أحسن خليط من القيود ، فنحصل للبرنامج 2 على $x_1^* = 30/52, x_2^* = 1, x_3^* = 0, x_4^* = 0, x_5^* = 1$ عند $z^* = 132.69$ ونحصل للبرنامج 3 على $x_1^* = 0, x_2^* = 1, x_3^* = 1, x_4^* = 0, x_5^* = 2/7$ عند $z^* = 134.28$.

باستمرار عملية التفرع والتحديد نكمل الشكل ٦ - ٤ . ونحصل على حل الأعداد الصحيحة الأول في البرنامج 8 عند $z^* = 90$ ويمكن الحصول على حل أعداد صحيحة ثانٍ في البرنامج 10 عند $z^* = 130$.



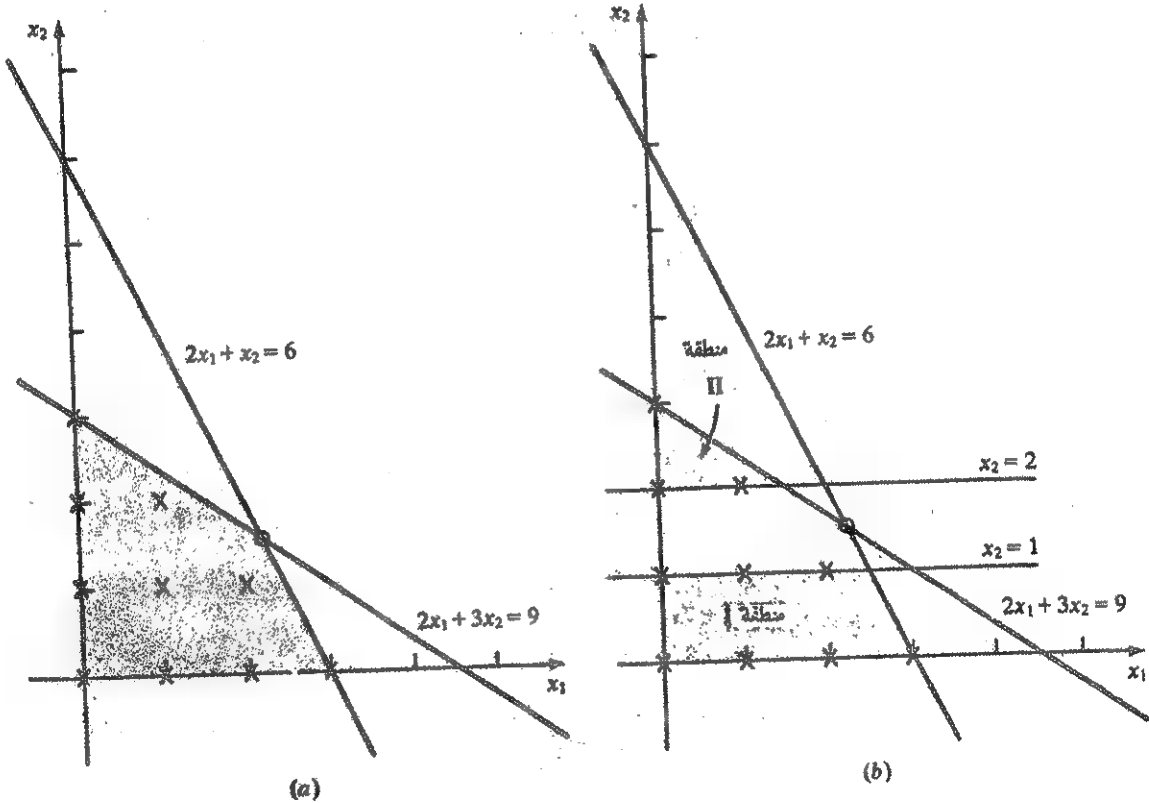
شكل ٦ - ٤

ولما كانت هذه القيمة الثانية لـ z^* أكبر من الأولى ، فإننا نحذف البرنامج 8 ، وكذلك البرنامجين 9 ، 11 . وللبرنامج 5 قيمة أكبر من قيمة الحد الأسفل الحالية ، ولذلك يستمر التفرع منها . وللبرنامج الناتج 12 قيمة $z = 130$ أقل من 130 ، بينما البرنامج 13 غير ممكن ، لذلك فإننا نحذف الاثنين . ويبقى البرنامج فقط ، لذلك فإن حله مع أخذ العناصر 2 ، z^* بقيمة إجمالية 130 يعتبر حلاً أمثل .

كان من الممكن تجنب كثير من عمليات التفرع والتحديد . ونعرف مقدماً أن x_3 إما أن يكون 0 أو 1 . ونحصل على قيمة $z = 132.69$ عند تجاهل شرط الأعداد الصحيحة (بامتداد المنطقة الممكنة) ، والتي يجب أن تكون أكبر من أو على الأقل مساوية للحل الأمثل الحقيقي . وبالتأمل إذا كانت $x_3 = 1$ فإننا نرى من البرنامج 3 أن الحل الأمثل الحقيقي لا يمكن أن يزيد عن 134.28 . وأياً كانت الحالة فإن الحل الأمثل الحقيقي يقل بالتأكيد عن 135 ، ولكن القيم الأعداد الصحيحة للمتغيرات ، فإن z تكون عدداً صحيحاً ، وفي الحقيقة فإنها مضروب 5 . حيث إن قيم العناصر عبارة عن مضروبات 5 ، لذلك .. فإن الحل الأمثل الحقيقي يكون 130 على الأكثر . ويضرب حل التفرع الأول للبرنامج 3 يعطي $x_1^* = 0, x_2^* = 1, x_3^* = 1, x_4^* = 0, x_5^* = 1$ عند $z^* = 130$ وبالتالي يكون هذا الحل حلاً أمثل .

تعتبر المنطقة المظللة في الشكل ٦ - ٦ (أ) هي المنطقة الممكنة للمسألة ٦ - ٢ ، مع تجاهل شرط الأعداد الصحيحة ؛ وتمثل المنطقة الممكنة للمسألة ٦ - ٢ كما هو معطى بمجموعة نقاط الأعداد الصحيحة (الموضحة بعلامة \times) التابعة للمنطقة المظللة . ويكون التقريب الأول هو النقطة الطرفية داخل الدائرة .

و كنتيجة للتفرع ٦ فإن المنطقة الممكنة للبرنامج 2 مع تجاهل شرط الأعداد الصحيحة هي المنطقة ٦ - ٦ (ب) .
بينما المنطقة II في نفس الشكل تحتوي على كل نقط الأعداد الصحيحة لشكل ٦ - ٦ (أ) . وهذه النقط هي الصحيحة فقط .
ومن ثم فإذا كان للبرنامج الأصلي حل أمثل (كما في هذه الحالة) فإنه سيكون حلاً أمثل لأحد برنامجي الأعداد الصحيحة الجديدين . وبالعكس إذا كان لبرنامجي الأعداد الصحيحة الجديدين حلان أمثلان ، فإن أحد هذين الحلين (الحل ذا القيمة z الأكبر في حالة مسألة تعظيم) يكون حلاً أمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة الأصلي . وتنتج صحة أسلوب التحديد من الملحوظة السابقة بين القوسين .



شكل ٦ - ٦

مسائل مكاملة :

Supplementary Problems

حل المسائل الآتية باستخدام طريقة التفريع والتحديد :

٩ - ٦

$$z = x_1 + 2x_2 + x_3 \quad : \quad \text{تعظيم}$$

$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 11 \quad : \quad \text{علماً بأن}$$

كل المتغيرات أعداد صحيحة ولا سلبية

١٠ - ٦

$$z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \quad : \quad \text{تعظيم}$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad : \quad \text{علماً بأن}$$

$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 5$$

كل المتغيرات أعداد صحيحة ولا سلبية

١١ - ٦

$$z = 2x_1 + 10x_2 + x_3 \quad : \quad \text{تعظيم}$$

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 15 \quad : \quad \text{علماً بأن}$$

$$2x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 20$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 25$$

كل المتغيرات أعداد صحيحة ولا سلبية

١٢ - ٦

$$z = 10x_1 + 2x_2 + 11x_3 \quad : \quad \text{تصغير}$$

$$2x_1 + 7x_2 + x_3 = 4 \quad : \quad \text{علماً بأن}$$

$$5x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 17$$

كل المتغيرات أعداد صحيحة ولا سلبية

١٣ - ٦ : المسألة ١ - ٢٠

١٤ - ٦ : حل المسألة ٦ - ٧ بتطبيق طريقة التفريع والتحديد مباشرة للبرنامج 3 للمسألة ١ - ٨ . وقارن هذه الطريقة بالمدخل المتبع في المسألة ٦ - ٩٧

الفصل السابع

برمجة الأعداد الصحيحة : طرق القطع

Integer Programming: Cut Algorithms

في كل مرحلة من مراحل التفرع في طريقة التفرع والتحديد تقطع المنطقة الممكنة الحالية إلى منطقتين أصغر (بتجاهل قيود الأعداد الصحيحة للبرنامج الحالي) بإدخال قيدين جديدين مشتقين من التقريب الأول على البرنامج الحالي (إحدهما قد تكون فارغة). وهذا القطع يكون بحيث يظهر الحل الأمثل للبرنامج الحالي كحل أمثل لأحد البرنامجين الجديدين (المسألة ٦ - ٨).

وتعمل طرق القطع في هذا الفصل بأسلوب متشابه بفرق واحد فقط هو إضافة قيد جديد واحد في كل مرحلة، وبالتالي فإن المنطقة الممكنة تتلاشى دون قطع.

طريقة جوموري THE GOMORY ALGORITHM

تحدد القيود الجديدة بالخطوات الثلاث التالية : (انظر المسألة ٧ - ٥)

الخطوة الأولى : في جدول السيمبلكس النهائي الحالي ، اختر أحد المتغيرات - عدداً غير صحيح (أى متغير) - وبدون تخصيص قيم صفرية للمتغيرات الأساسية ، اعتبر معادلة القيد المقدمة في صف المتغير المختار .

مثال ٧ - ١ جدول السيمبلكس الموضح يعطى الحل الأمثل (أى التقريب الأول الحالي)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	-1/2	0	1	-7/3	1/2	11/2
x_2	1/2	1	0	-1	1/4	1
	4	0	0	1	3/4	25/2

بإعطاء كل من المتغيرات غير الأساسية x_1, x_2, x_3, x_4 قيمة صفرية . وبأنى تخصيص القيمة غير الصحيحة لـ x_5 من الصف الأول للجدول ، والذي يمثل القيد

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_3 - \frac{7}{3}x_4 + \frac{1}{2}x_5 = \frac{11}{2}$$

الخطوة الثانية : أعد كتابة المعاملات الكسرية والثوابت في معادلة القيد الناتجة من الخطوة الأولى « كمجموع الأعداد الصحيحة والكسور الموجبة بين صفر وواحد » ثم أعد كتابة المعادلة ، بحيث إن الطرف الأيسر يحتوى على حدود ذات معاملات كسرية فقط (وثابت كسري) « بينما الطرف الأيمن يحتوى على حدود بمعاملات أعداد صحيحة (وثوابت صحيحة) ».

مثال ٧ - ٢ تصبح المعادلة (٧ - ١)

$$(-1 + \frac{1}{2})x_1 + x_3 + (-3 + \frac{7}{3})x_4 + (0 + \frac{1}{2})x_5 = 5 + \frac{1}{2}$$

(٧ - ٢)

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2} = 5 + x_1 - x_3 + 3x_4$$

أو

الخطوة الثالثة طلب أن يكون الطرف الأيسر في المعادلة المعاد كتابتها غير سلبى . وتكون المتباينة الناتجة ، هى القيد الجديد .
مثال ٧ - ٣ من ٧ - ٢

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2} \geq 0 \quad \text{أو} \quad \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \geq \frac{1}{2}$$

هى القيد الجديد

الاعتبارات الحسابية : COMPUTATIONAL CONSIDERATIONS

يمكن توفير وقت الحساب بإلحاق متباينة القيد الجديد الناتجة من الخطوة 3 على معادلات القيود الموصوفة في جدول السمبلكس النهائى الحالى ، فضلاً عن القيود الجبرية المكافئة المعطاه في البرنامج الأسمى (انظر المسألة ٧ - ١) .

قد لا تتقارب طريقة جومورى ، بمعنى أنه قد لا نحصل على حل أعداد صحيحة ، بصرف النظر عن عدد محاولات تكرار الحل . وبوجه عام .. فإنه إذا كان الحل يتقارب ، فإنه يتقارب بسرعة ، لهذا السبب فإن الحد الأعلى لمرات تكرار الحل يجب أن يحدد قبل إنشاء الحل . فإذا لم نصل إلى حل أعداد صحيحة خلال هذا العدد من التكرار فإننا نتخلى عن الطريقة .

لا توجد أسباب نظرية للاختيار بين طريقة جومورى وطريقة التفريع والتحديد . وتعتبر طريقة التفريع والتحديد هى الأحدث في الطريقتين ، وتبدو أنها مفضلة قليلاً بين الممارسين .

مسائل محلولة

Solved Problems

٧ - ١

(١) تعظيم : $z = 2x_1 + x_2$
علماً بأن : $2x_1 + 5x_2 \leq 17$
 $3x_1 + 2x_2 \leq 10$

x_1, x_2 أعداد صحيحة ولا سلبية

بتجاهل شرط الأعداد الصحيحة وتطبيق طريقة السمبلكس على البرنامج الخطى الناتج ، نحصل على الجدول 1 كحل أمثل بعد محاولة واحدة .

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	1	-5/2	11/6	17/2
x_1	1	0	0	0	1/3	3
x_2	0	1	0	1/2	-1/2	1/2
	0	0	0	1/2	1/6	13/2

جدول 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	11/3	1	-2/3	31/3
x_1	1	2/3	0	1/3	10/3
	0	1/3	0	2/3	20/3

جدول 1

التقريب الأول للبرنامج (1) ، $x_2 = x_4 = 0$ ، $x_1 = 10/3$ ، $x_3 = 31/3$. كلاً من x_1 و x_3 غير صحيحة . نختار x_1 اختياريًا ، ونعتبر القيد الممثل بالصف الثاني من الجدول II ، وهو الصف الذي يحدد x_1 .

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{10}{3}$$

بكتابه كل كسر كمجموع أعداد صحيحة وكسر بين 0 و 1 نحصل على

$$x_1 + (0 + \frac{2}{3})x_2 + (0 + \frac{1}{3})x_4 = 3 + \frac{1}{3} \quad \text{or} \quad \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3} = 3 - x_1$$

وليكون الطرف الأيسر من هذه المعادلة غير سلبى ، نحصل على

$$\frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3} \geq 0 \quad \text{or} \quad 2x_2 + x_4 \geq 1$$

كقيد جديد . وبإعادة كتابة قيود البرنامج الأصل (1) في الصورة المقترحة في الجدول 1 وإضافة القيد الجديد ، نوجد البرنامج الجديد .

$$z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 : \text{تعظيم}$$

$$\frac{1}{3}x_2 + x_3 - \frac{1}{3}x_4 = \frac{31}{3} : \text{علماً بأن}$$

(٢)

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{10}{3}$$

$$2x_2 + x_4 \geq 1$$

كل القيود أعداد صحيحة ولا سلبية

يدخل المتغير الزائد x_5 ، والمتغير الصناعى x_6 في المتابعة للقيد (2) ، ونطبق بعد ذلك الطريقة ذات المرحلتين باعتبار x_1, x_3, x_4, x_6 المجموعة الأولية من المتغيرات الأساسية . ويتج الجدول 2 بعد محاولة واحدة غالباً . ويكون التقريب الأول للبرنامج (2) هو $x_2 = x_3 = 0$ ، $x_1 = 3$ ، $x_4 = 1/2$ ، $x_5 = 17/2$. اختيار x_2 لإنتاج القيد الجديد ، نحصل من الصف الثالث للجدول 2 على

$$\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2} \geq 0 \quad \text{or} \quad x_4 + x_5 \geq 1$$

يعطى هذا بالاشتراك مع القيود في البرنامج (2) في الصيغة المقترحة بالجدول 2 ، يعطى برنامج الأعداد الصحيحة الجديد .

$$z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 : \text{تعظيم}$$

$$x_3 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{11}{6}x_5 = \frac{17}{2} : \text{علماً بأن}$$

(٣)

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 = 3$$

$$x_2 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 = \frac{1}{2}$$

$$x_4 + x_5 \geq 1$$

كل المتغيرات أعداد صحيحة ولا سلبية

بتجاهل قيد الأعداد الصحيحة وتطبيق الطريقة ذات المرحلتين على البرنامج (3) ، باعتبار x_1, x_2, x_3, x_7 (صناعى) كمجموعة أساسية أولية ، نحصل على الحل الأمثل بالجدول 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	0	1	-13/3	0	11/6	20/3
x_1	1	0	0	-1/3	0	1/3	8/3
x_2	0	1	0	1	0	-1/2	1
x_5	0	0	0	1	1	-1	1
	0	0	0	1/3	0	1/6	19/3

جدول 3

تبدأ محاولة جديدة للعملية من $x^* = 8/3$ في الجدول 3. وينتج هذا برنامجاً له حل أعداد صحيحة، وفيه $x^* = 3$ $x_2^* = 0$ $z^* = 6$ وهذا الحل هو الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة (1).

٧ - ٢ ناقش صديق الهندسة التحليلية للقيود المضاف في المسألة ٧ - ١.

مبدئياً، تتكون المنطقة الممكنة من كل النقاط في الربع الأول، والتي لها إحداثيات صحيحة، وتحقق

$$2x_1 + 5x_2 \leq 17 \quad \text{and} \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 10$$

وهذه هي النقاط الموضحة بالعلامة X في الشكل ٧ - ١ (أ).

القيود المضاف إلى البرنامج الأصل (1) هو $2x_2 + x_1 \geq 1$ ، ويؤدي إلى البرنامج (2). وبحل معادلة القيد الثاني في البرنامج (2) بالنسبة لـ x_2 ، وتعويض النتيجة في القيد الجديد، نحصل على

$$2x_2 + (10 - 3x_1 - 2x_2) \geq 1 \quad \text{or} \quad x_1 \leq 3$$

ويوضح تأثير إدخال $x_1 \leq 3$ في الشكل ٧ - ١ (ب). وتفصل شريحة صغيرة من المنطقة الممكنة تحتوي على التقريب الأول الحالي، ومع ذلك لا تفقد أي نقطة أعداداً صحيحة.

٧ - ٣ حل المسألة ١ - ١٢.

التقريب الأول لبرنامج الأعداد الصحيحة (انظر المسألة ١ - ١٤ بإعادة تسمية المتغيرات) هو $x_1^* = 700$ $x_2^* = 5$ عند $x_1^* = 1000$ $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$. وحيث إن هذا التقريب الأول أعداد صحيحة، فإنه يكون الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة. وتحت هذا الجدول الأمثل، ٧٠٠ صندوق سينقلون من المصنع II إلى المصنع 2 و ٢٥٠٠ صندوق من المصنع I إلى المصنع 3، و ١٠٠٠ صندوق من المصنع 2 إلى المصنع 1، والتكلفة الكلية للنقل هي ٢٧٦ دولار.

٧ - ٤ حل المسألة ١ - ٥

البرنامج (٤) في المسألة ١ - ٥ بعد وضعه في الصيغة القياسية يكون

$$z = 20x_1 + 22x_2 + 18x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + Mx_9 + Mx_{10} : \text{تصغير}$$

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 + x_9 = 54 \quad \text{علماً بأن :}$$

$$4x_1 + 4x_2 + 6x_3 - x_5 + x_{10} = 65$$

$$x_1 + x_6 = 7$$

$$x_2 + x_7 = 7$$

$$x_3 + x_8 = 7$$

مع : كل المتغيرات أعداد صحيحة ولا سلبية

بتجاهل قيود الأعداد الصحيحة وحل هذا البرنامج باستخدام الطريقة ذات المرحلتين نحصل على جدول 1 بعد ثلاث محاولات .
يكون التقريب الأول للبرنامج (1) هو $x_1^* = 1.75, x_2^* = 7, x_3^* = 5, z^* = 279$ عند

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_1	1	0	0	-0.3	0.05	0	-1.6	0	1.75
x_3	0	0	1	0.2	-0.2	0	0.4	0	5
x_6	0	0	0	0.3	-0.05	1	1.6	0	5.25
x_2	0	1	0	0	0	0	1	0	7
x_8	0	0	0	-0.2	0.2	0	-0.4	1	2
	0	0	0	2.4	2.6	0	2.8	0	-279

جدول 1

يقرب هذا التقريب الأول إلى حل الأعداد الصحيحة الممكن $x_1 = 2, x_2 = 7, x_3 = 5$ عند $z = 284$. ويتبع ذلك أن الحد الأدنى المطلوب لا يمكن أن يزيد عن 284 . وعلى العكس .. بالرجوع إلى البرنامج الأصلي (4) في المسألة 1 - نرى أن قيم الأعداد الصحيحة للمتغيرات x_1, x_2 هي قيم صحيحة زوجية ، ومن ثم بالنظر إلى الحد الأسفل $z^* = 279$ المعطى بالتقريب الأول ، فإن الحد الأدنى z لا يمكن أن يقل عن 280 . لذلك فإن الحد الأدنى z يمكن أن يكون 280, 282 ، أو 284 فقط . ونكون متأكدين أن الخطأ في أخذ $(2, 7, 5)^T$ كحل أمثل هو على الأسوأ .

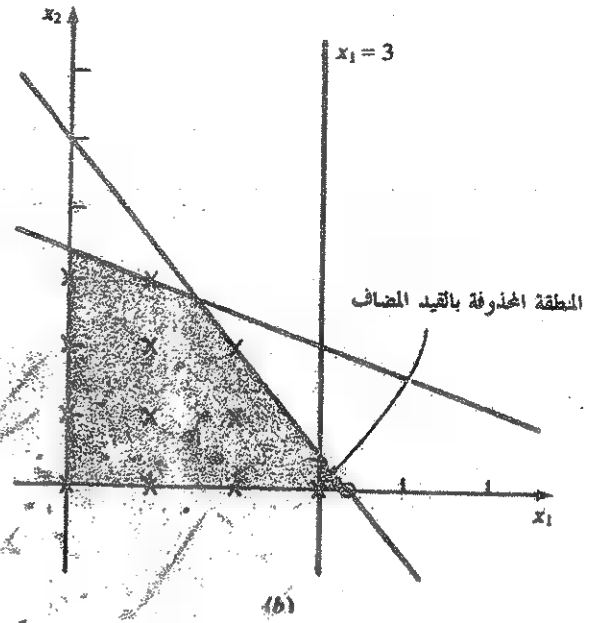
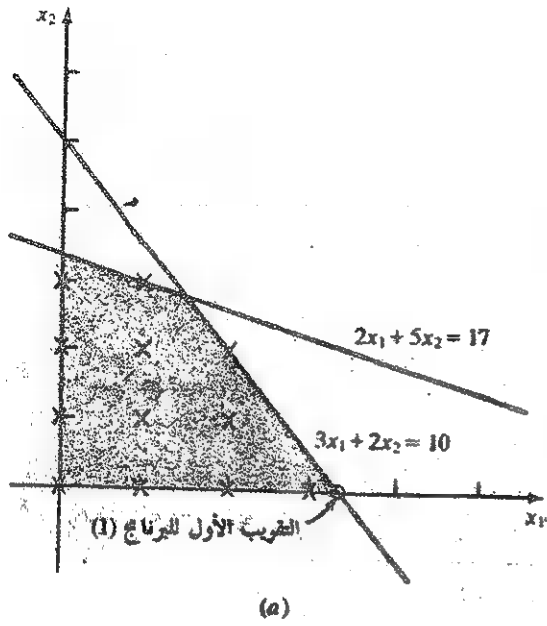
$$\frac{284 - 280}{280} = 1.43\%$$

(ابتداءً من الجدول 1 ، نجد بعد ست محاولات لطريقة جوموري أن $(2, 7, 5)^T$ هو في الحقيقة حل أمثل) .

طور طريقة القطع لجوموري Develop the Gomory cut algorithm ٧ - ٥

اعتبر الجدول الأمثل الناتج من تطبيق طريقة السمبلكس لبرنامج أعداد صحيحة ، مع تجاهل شرط الأعداد الصحيحة ، افرض أن أحد المتغيرات الأساسية x_6 ليس عدداً صحيحاً ، فيجب أن تكون معادلة القيد المناظر لصف الجدول الذي يحدد x_6 من الصيغة

$$(1) \quad x_6 + \sum y_j x_j = y_0$$



شكل ٧ - ١

حيث يكون المجموع أكبر من كل المتغيرات غير الأساسية ، والحدود y هي المعاملات ، والحد الثابت الذي يظهر في صف الجدول الذي يحدد x_0 . وحيث إن x_0 ناتجة من (1) بإعطاء المتغيرات غير الأساسية قيماً صفرية ، فيتبع ذلك أن y_0 هي الأخرى غير صحيحة .

أكتب كل حد - y في (1) كمجموع صحيح وكسر غير نسبي أقل من واحد :

$$y_i = i_i + f_i \quad \text{و} \quad y_0 = i_0 + f_0$$

وتكون بعض f_i أصفاراً ، ولكن f_0 من المؤكد أن تكون موجبة .
تصبح المعادلة (1) :

$$x_0 + \sum (i_i + f_i)x_i = i_0 + f_0$$

(٢)

$$x_0 + \sum i_i x_i - i_0 = f_0 - \sum f_i x_i$$

أو

إذا أردت جعل كل متغير x صحيحاً ، فإن الطرف الأيسر من (2) يكون صحيحاً ، وذلك يرغم الطرف الأيمن أيضاً ليكون صحيحاً . وحيث إن كلاً من x_i ، f_i لاسموية ، لذلك يكون $\sum f_i x_i$ أيضاً كذلك . ويكون الطرف الأيمن في (2) صحيحاً ، وأصغر من الكسر الموجب ناقصاً واحداً ، أي أنه ، عدد صحيح غير موجب .

$$f_0 - \sum f_i x_i \leq 0 \quad \text{أو} \quad \sum f_i x_i - f_0 \geq 0$$

وهذا هو القيد الجديد في طريقة جوموري .

٦ - ٧ طور طريقة قطع أخرى .

اعتبر (١) في المسألة ٧ - ٥ . إذا كان كل متغير غير أساس x_i صفرياً ، فإن $x_6 = y_6$ تكون غير صحيحة . وإذا كان عدداً صحيحاً ، فإن أحد المتغيرات غير الأساسية x_6 على الأقل يجب أن تختلف عن الصفر . ولما كان المطلوب أن تكون كل المتغيرات صحيحة ولاسلبية ، فيتبع ذلك أن واحداً على الأقل من المتغيرات غير الأساسية يجب أن يكون أكبر من أو يساوي ١ . وهذا بالتالي يفرض أن مجموع كل المتغيرات الأساسية يجب أن يكون أكبر من أو يساوي ١ . وإذا استخدم هذا الشرط كقيود جديد ليلتصق برنامج الأعداد الصحيحة الأصلي « فنحصل على طريقة القطع التي وضعها دانتزج أولاً .

٧ - ٧ استخدام طريقة القطع المطورة في المسألة ٧ - ٦ لحل

$$z = 3x_1 + 4x_2 : \text{تعظيم}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6 : \text{علماً بأن}$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

x_1 و x_2 صحيحة ولاسلبية

بإدخال المتغيرات الزائدة x_3 و x_4 وحل البرنامج الناتج ، ويتجاهل شرط الأعداد الصحيحة « نحصل على الجدول 1 بطريقة السمبلكس

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	0	0.75	-0.25	2.25
x_2	0	1	-0.5	0.5	1.5
	0	0	0.25	1.25	12.75

جدول 1

التقريب الأول هو $x_1^* = 2.25$ $x_2^* = 1.5$ وهو ليس صحيحاً ، والمتغيرات غير الأساسية هي x_3 و x_4 ، ولذلك فإن القيد الجديد يكون $x_3 + x_4 \geq 1$ بإلحاق هذا المتغير بالجدول 1 ، بعد إدخال المتغير الزائد x_5 والمتغير الصناعي x_6 ، وحل البرنامج الناتج بطريقة ذات المرحلتين ، نوجد الجدول 2 .

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	0	-1	0.75	1.5
x_2	0	1	0	1	-0.5	2
x_3	0	0	1	1	-1	1
	0	0	0	1	0.25	12.5

جدول 2

يتبع ذلك « من جدول 2 أن : $x_1^* = 1.5$ $x_2^* = 2$ $x_3^* = 1$ مع x_4 و x_5 متغيرات غير أساسية . وحيث إن هذا الحل هو حل أعداد غير صحيحة ، فإننا نأخذ $x_4 + x_5 \geq 1$ كقيود جديد . وبإلحاق هذا القيد في الجدول 2 ، بعد إدخال المتغير الزائد x_6 ، المتغير الصناعي x_7 . وحل البرنامج الناتج بطريقة ذات المرحلتين ، نوجد الجدول 3 .

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	0	0	-1.75	0	0.75	0.75
x_2	0	1	0	1.5	0	-0.5	2.5
x_3	0	0	1	2	0	-1	2
x_5	0	0	0	1	1	-1	1
	0	0	0	0.75	0	0.25	12.25

جدول 3

من الجدول 3 ، فإن الحل الأمثل الحالي حل أعداد غير صحيحة في المتغيرات غير الأساسية x_4 x_6 . ويكون القيد الجديد هو $x_4 + x_6 \geq 1$ بالصاق هذا القيد في الجدول 3 ، وحل البرنامج الناتج بالطريقة ذات المرحلتين ، نحصل على $x_1^* = 0$ $x_2^* = 3$ عند $z^* = 12$. وحيث إن هذا الحل أعداد صحيحة ، فيكون هو الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة الأصلي .

مسائل مكملية

Supplementary Problems

٨ - ٧ استخدم طريقة جومورى في

$$z = x_1 + 9x_2 + x_3 \quad \text{تعظيم}$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9 \quad \text{علماً بأن :}$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15$$

كل المتغيرات صحيحة ولا سلبية

- ٩ - ٧ حل المسألة ١ - ٣ باستخدام طريقة جومورى
- ١٠ - ٧ حل المسألة ٦ - ٩ باستخدام طريقة جومورى
- ١١ - ٧ حل المسألة ٦ - ١٠ باستخدام طريقة جومورى
- ١٢ - ٧ حل المسألة ٦ - ١١ باستخدام طريقة جومورى
- ١٣ - ٧ حل المسألة ٦ - ٩ بطريقة القطع للمسألة ٧ - ٦ .

برمجة الأعداد الصحيحة : طريقة النقل

Integer Programming: The Transportation Algorithm

الصيغة القياسية STANDARD FORM

تتضمن مشكلة النقل مصادر m لكل منها عدد متاح من الوحدات a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) من منتج متجانس ، وكذلك أماكن وصول n كل منها تتطلب عدد من الوحدات b_j ($j = 1, 2, \dots, n$) من هذا المنتج . والأعداد a_i و b_j أعداد صحيحة موجبة . وتعطى التكلفة اللازمة لنقل وحدة واحدة من المنتج من المصدر i إلى مكان الوصول j ، وتعطى التكلفة لكل i, j . يحدد الهدف من إنشاء جدول انتقال أعداد صحيحة (يجب ألا يكون المنتج كسرياً) ليواجه كل المتطلبات من المخزون الحالي بتكلفة انتقال كلية أقل ما يمكن . من المفروض أن الإمداد الكلي والطلب الكلي متساويان ، بمعنى :

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (1-8)$$

تتحقق المعادلة (١ - ٨) بإيجاد إما أماكن وصول افتراضية بمتطلبات تماوى الزائد من المنتجات — إذا كان الطلب الكلي يقل عن الإمداد الكلي — أو مصادر افتراضية بإمداد يساوى النقص في الطلب الكلي إذا كان الطلب الكلي يزيد على الإمداد الكلي (انظر المسألة ٨ - ١) .
دع x_{ij} تمثل العدد (غير المعروف) من الوحدات الذي يجب أن ينقل من المصدر i إلى مكان الوصول j ، فيكون النموذج الرياضي القياسي لهذه المسألة هو :

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad \text{تصغير :}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \dots, m) \quad \text{علماً بأن :} \quad (2-8)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

مع : كل x_{ij} صحيحة ولا سلبية

طريقة النقل THE TRANSPORTATION ALGORITHM

التقريب الأول للنموذج (٢ - ٨) يكون دائماً أعداداً صحيحة (انظر المسألة ٧ - ٣) ، لذلك فهو دائماً الحل الأمثل . وفضلاً عن تحديد هذا التقريب الأول بالتطبيق المباشر لطريقة السمبلكس ، فإنه من الأنكفاً العمل بالجدول ٨ - ١ . وكل مدخلات الجدول تشرح نفسها

باستثناء الحدين u_i و v_j اللذين سيشرحان بعد ذلك . وطريقة النقل هي طريقة السمبلكس بالشكل الموجود بالجدول ٨ - ١ عادة . تتضمن :

- إيجاد حل أولي أساسي ممكن .
- اختبار الحل لمعرفة أمثلته .
- تحسين الحل إذا لم يكن أمثل .
- تكرار الخطوات ب ، ج ، حتى نحصل على الحل الأمثل .

أماكن الوصول

	1	2	3	...	n	الإمداد	u_i
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1	u_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2	u_2
.....
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m	u_m
الاحتياج	b_1	b_2	b_3	...	b_n		
v_j	v_1	v_2	v_3	...	v_n		

جدول ٨ - ١

حل أساسي أول AN INITIAL BASIC SOLUTION

قاعدة الركن الشمالي الغربي . ابتداءً بالخلية (1, 1) في الجدول ٨ - ١ (الركن الشمالي الغربي) ، خصص لـ x_{11} كل الوحدات الممكنة ، دون الخروج عن القيود . وهذا سيكون الأصغر من a_1 و b_1 . بعد ذلك استمر في التحرك خلية واحدة لجهة اليمين ، إذا تبقى بعض الإمداد ، أو لم يتبق أى إمداد ، تحرك خلية لأسفل . في كل خطوة ، خصص كل الوحدات الممكنة لهذه الخلية (المتغير) تحت الاعتبار ، دون الإخلال بالقيود : لا يمكن أن يزيد مجموع تخصيصات الصف رقم i عن a_i ، ولا يمكن أن يزيد مجموع تخصيصات العمود رقم j عن b_j ، ولا يمكن أن يكون أى تخصيص سالباً . وقد يكون التخصيص صفرياً . (انظر المسألة ٨ - ٣)

طريقة فوجل : **Vogel's method** لكل صف ولكل عمود يتبقى لهم بعض الإمدادات أو بعض الاحتياجات . احسب الفرق ؟ وهو الفرق اللاسببي بين أصغر تكلفتين نقل مرتبطتين بالمتغيرات غير المخصصة في هذا الصف أو العمود ، اعتبر الصف أو العمود الذين لهما أكبر فرق ، في حالة أى رابطة (تساوي) ، اختر أحدهما . في هذا الصف أو العمود ، خصص هذا المتغير (الخلية) غير المخصصة ، والتي لها أقل وحدة تكلفة نقل ، وخصص لها كل الوحدات الممكنة ، دون الإخلال بالقيود . أعد حساب الفروق الجديدة ، وكرر الطريقة السابقة حتى استيفاء كل الاحتياجات . (انظر المسألة ٨ - ٥ ، ٨ - ٦) .

المتغيرات التي تعين لها قيم بإحدى هاتين الطريقتين تصبح المتغيرات الأولية الأساسية . وتكون المتغيرات غير المعينة (غير المخصصة) متغيرات غير أساسية ، ولذلك تكون صفراً . وهنا نفضل الأخذ بعدم إدخال متغيرات غير أساسية في الجدول ٨ - ١ من المفهوم أنها أصفاً - مع توضيح تخصيصات المتغيرات الأساسية بالخط السميك .

وقاعدة الركن الشمالي الغربي هي أسهل الطريقتين في التطبيق . ومع ذلك فإن طريقة فوجل ، التي تأخذ في الاعتبار تكاليف نقل الوحدة ، عادة ما تنتج حلولاً أقرب إلى المثالية . (انظر المسألة ٨ - ٧) .

اختبار الأمثلية TEST FOR OPTIMALITY

عين القيمة صفر لأي من (أى واحدة) u_i ، v_j في الجدول ٨ - ١ . واحسب الباقي من u_i ، v_j بحيث يكون لكل متغير أساسي $u_i + v_j = c_{ij}$. بعد ذلك ، لكل متغير غير أساسي ، احسب الكمية $c_{ij} - u_i - v_j$. إذا كانت كل هذه الكميات لا سلبية ، يكون الحل الحالي حلاً أمثل ، وإلا ، فلا يكون أمثل . (انظر المسألة ٨ - ٤ ، ٨ - ٨) .

تحسين الحل IMPROVING THE SOLUTION

تعريف : الحلقة هي تسلسل (تتابع) من الخلايا في الجدول ٨ - ١ ، بحيث إن : (أ) كل زوج من الخلايا المتتالية يقع إما في نفس الصف أو نفس العمود : (ب) لا تقع ثلاث خلايا متتالية في نفس الصف أو العمود : (ج) تقع الخلايا الأولى والأخيرة في نفس الصف أو نفس العمود : (د) لا تظهر أى خلية أكثر من مرة واحدة في التتابع .

مثال ٨ - ١ التتابعات $[(1,2), (1,4), (2,6), (4,6), (4,2), (2,3), (2,4), (4,4), (2,2), (2,1), (3,1), (3,6), (1,6), (1,3)]$ الموضحة بالأشكال ٨ - ١ ، ٨ - ٢ على التوالي تمثلان حلقات . لاحظ أنه من الممكن أن يحتوى الصف أو العمود على أكثر من خليتين في الحلقة (مثل الصف الثانى في الشكل ٨ - ٢) . على ألا تكون هناك أكثر من اثنتين متتاليتين .

	1	2	3	4	5	6
1			●	→		●
2	●	→	●	←		
3	●	→	→	→	→	●
4		●	→	●		

شكل ٨ - ٢

	1	2	3	4	5	6
1		●	→	●		
2				●	→	●
3						
4		●	→	←		●

شكل ٨ - ١

اعتبر المتغير غير الأساسى المناظر لأعلى قيمة سالبة $c_{ij} - u_i - v_j$ المحسوبة في اختبار الأمثلية ليكون المتغير الداخلى . انشئ حلقة تتكون بالتحديد من هذا المتغير الداخلى (الخلية) والمتغيرات الأساسية الحالية (الخلايا) . خصص للخلية الداخلة أكبر عدد ممكن من الوحدات ، بحيث أنه بعد عمل التعديل المناسب في باقى الخلايا في الحلقة لا يحدث إخلال بالقيود ، وتبقى كل التخصيصات لا سلبية . ويؤول أحد المتغيرات الأساسية القديمة إلى الصفر (رغم كونه متغيراً أساسياً) . انظر المسألة ٨ - ٤ .

الانحراف DEGENERACY

في ضوء الشرط (٨ - ١) يكون عدد $m - 1 + n$. فقط من معادلات القيود في النموذج (٨ - ٢) مستقلة . لذلك ففي المسائل $13 - 3$ ، $14 - 3$ يتميز الحل الأساسى الممكن غير المتحرف بالقيم الموجبة لعدد $m + n - 1$ من المتغيرات الأساسية . وإذا نتج عن عملية تحسين الحل الأساسى الحالي اثنان أو أكثر من المتغيرات الأساسية المختصرة إلى الصفر في وقت واحد ، فإن أحدها فقط هو المسموح أن يبقى غير أساسى . (باختيار من يحمل المسألة) بالرغم من تفضيل المتغير ذى تكلفة نقل الوحدة الأكبر . ويبقى المتغير أو المتغيرات الأخرى أساسية ، ولكن بتخصيص قيم صفرية لها ينحرف الحل الأساسى الجديد .

وتعطي طريقة الركن الشمالي الغربي دائماً حلاً أساسياً أولياً (المسألة ٨ - ٢) ، ولكن قد تفشل في إعطاء قيم موجبة عددها $m + n - 1$ (المسألة ٨ - ٣) ، ولذلك نؤول إلى حل منحرف . وإذا استخدمت طريقة فوجل ولم تعط نفس العدد من القيم الموجبة ، فإننا نخصص متغيرات إضافية ذات قيم صفرية كمتغيرات أساسية (انظر المسألة ٨ - ٦) . والاختيار متاح إلى الحد أن المتغيرات الأساسية لا يمكن أن تكون حلقة ، ويمنح التفضيل دائماً للمتغيرات ذات أقل تكلفة نقل .

ويتم تحسين الحل المنحرف عن إحلال أحد المتغيرات الأساسية ذات القيم الصفرية بمتغير آخر . (يحدث هذا في التحسين الأول في المسألة ٨ - ٤) . وبالرغم من أن الحلين المنحرفين هما متاثلان فعلياً — مع تغيير تخصيص المتغيرات الأساسية فقط دون قيمها — فإن محاولة إضافية للحل تكون مطلوبة لاستكمال طريقة النقل .

مسائل محلولة

Solved Problems

٨ - ١ تواجه شركة تأجير سيارات مشكلة تخصيص ناتجة من اتفاقيات التأجير التي تسمح بارتجاع العربات المؤجرة إلى أماكن غير التي تم التأجير فيها . يوجد في الوقت الحالي مكانان لذلك (مصدران) بهما ١٥ ، ١٣ عربة زائدة على التوالى ، وأربعة أماكن ارتجاع (أماكن وصول) تتطلب ٩ ، ٦ ، ٧ ، ٩ عربات على التوالى . وتكلفة النقل للوحدة (بالدولار) بين الأماكن هي كما يلي :

الوصول	مكان الوصول 1	مكان الوصول 2	مكان الوصول 3	مكان الوصول 4
المصدر 1	45	17	21	30
المصدر 2	14	18	19	31

جدول النقل الأول (جدول ٨ - ١) جدول أقل تكلفة .

مكان الوصول		1	2	3	4	الإمداد	u_i
المصدر	1	45	17	21	30	15	
	2	14	18	19	31	13	
	3 (وهي)	0	9	0	0	3	
	الاحتياج	9	6	7	9		
	v_j						

جدول ٨ ١

حيث إن الطلب الكلي ($31 = 9 + 7 + 6 + 9$) يزيد على الإمداد الكلي ($28 = 13 + 15$) ، فإنه ينشأ مصدر وهمي له إمداد يساوي الـ 3 وحدات الناقصة . في الحقيقة .. فإن النقل من هذه المصادر الوهمية لا يتم . وبالتالي فإن تكلفة النقل منها تساوي صفراً . ويمثل التخصيص الموجب من هذه المصادر لأي مكان وصول العربات ، التي لا يمكن أن تسلم نتيجة النقص في الإمداد . وهو النقص الذي سيواجهه مكان الوصول في ظل جدول النقل الأمثل . في هذه المسألة يصبح الجدول (٨ - ١) الجدول 1A . ولا تدخل x_{ij} ، u_i ، و v_j ، حيث إنها غير معروفة حالياً .

٢ - ٨

لجدول النقل $m \times n$ بين أن قاعدة الركن الشمالي الغربي تقيم $n + m - 1$ من المتغيرات .

لاحظ أنه بعد معالجة الخلية (1,1) تطبق الطريقة بنفس الصيغة على الجدول الأصغر . ويكون الركن الشمالي الغربي الجديد هو « إما الخلية (1,2) ، أو الخلية الأصلية (2,1) » . نفرض أن النتيجة (بالبحث الرياضي) تتحقق للجدول الأصغر الذي يتكون من « إما (1) $m \times (n - 1)$ ، أو (2) $(m - 1) \times n$. في كلتا الحالتين $n + m - 2$ متغير تقيم في الجدول الأصغر ، حيث تقيم المتغيرات في الجدول الأصغر .

$$(n + m - 2) + 1 = n + m - 1$$

ومن ثم تتحقق النتيجة بوضوح عند $n = m = 1$. ويكون الحل بالبحث الرياضي كاملاً .

٣ - ٨

استخدم قاعدة الركن الشمالي الغربي للحصول على التخصيص الأول للجدول 1A .

نبدأ بـ x_{11} . ونعين لها الحد الأدنى $b_1 = 9$ and $a_1 = 15$. لذلك فإن $x_{11} = 9$. تاركة ست عربات زائدة في المصدر الأول . نتحرك بعد ذلك خلية واحدة لجهة اليمين ، ونخصص $x_{12} = 6$. وهذان التخصيصان يستهلكان الإمداد في المصدر الأول . نبدأ التحرك خلية واحدة لأسفل ، ونأخذ في الاعتبار x_{21} . لاحظ ، مع ذلك ، أن الاحتياج في مكان الوصول الثاني قد تم استيفائه بـ x_{12} . وحيث إننا لا يمكن أن نسلم عربات زائدة لهذا المكان بدون زيادة احتياجه . لذلك نخصص $x_{22} = 0$ ، ثم نتحرك خلية واحدة لجهة اليمين . وبالاستمرار في هذه الطريقة نحصل على الحل المنحرف (أقل من $4 + 3 - 1 = 6$ مدخلات موجبة) الموضح في الجدول 1B .

	1	2	3	4	الإمداد	a_i
1	45	17	21	30	15	
2	14	18	19	31	13	
3 (وهمي)	0	0	0	0	3	
الاحتياج	9	6	7	9		
b_j						

جدول 1B

لتحديد ما إذا كان التخصيص الأول الموجود في الجدول 1 B مثالياً، نحسب أولاً الحدود u_i ، v_j بالنسبة لخلايا المتغيرات الأساسية في الجدول. وباختيار $u_2 = 0$ (حيث إن الصف الثاني يحتوي على متغيرات أساسية أكثر من أى صف أو عمود، فإن هذا الاختيار يسهل الحسابات)، ونجد:

$$\begin{aligned} \text{الخلية (2, 2)} \quad u_2 + v_2 = c_{22}, \quad 0 + v_2 = 18, \quad \text{or} \quad v_2 = 18 \\ \text{الخلية (2, 3)} \quad u_2 + v_3 = c_{23}, \quad 0 + v_3 = 19, \quad \text{or} \quad v_3 = 19 \\ \text{الخلية (2, 4)} \quad u_2 + v_4 = c_{24}, \quad 0 + v_4 = 31, \quad \text{or} \quad v_4 = 31 \\ \text{الخلية (1, 2)} \quad u_1 + v_2 = c_{12}, \quad u_1 + 18 = 17, \quad \text{or} \quad u_1 = -1 \\ \text{الخلية (1, 1)} \quad u_1 + v_1 = c_{11}, \quad -1 + v_1 = 45, \quad \text{or} \quad v_1 = 46 \\ \text{الخلية (3, 4)} \quad u_3 + v_4 = c_{34}, \quad u_3 + 31 = 0, \quad \text{or} \quad u_3 = -31 \end{aligned}$$

وتوضح هذه القيم في الجدول 1 C. بعد ذلك نحسب الكميات $c_{ij} - u_i - v_j$ لكل خلية متغير غير أساسي في الجدول 1 B.

$$\begin{aligned} \text{الخلية (1, 3)} \quad c_{13} - u_1 - v_3 = 21 - (-1) - 19 = 3 \\ \text{الخلية (1, 4)} \quad c_{14} - u_1 - v_4 = 30 - (-1) - 31 = 0 \\ \text{الخلية (2, 1)} \quad c_{21} - u_2 - v_1 = 14 - 0 - 46 = -32 \\ \text{الخلية (3, 1)} \quad c_{31} - u_3 - v_1 = 0 - (-31) - 46 = -15 \\ \text{الخلية (3, 2)} \quad c_{32} - u_3 - v_2 = 0 - (-31) - 18 = 13 \\ \text{الخلية (3, 3)} \quad c_{33} - u_3 - v_3 = 0 - (-31) - 19 = 12 \end{aligned}$$

وسجل هذه النتائج أيضاً في الجدول 1 C بين قوسين.

	1	2	3	4	الإمداد	u_i
1	45	17	21	30	15	-1
2	14	18	19	31	13	0
3 (ومى)	0	0	0	0	3	-31
الاحتياج	9	6	7	9		
v_j	46	18	19	31		

الجدول 1 C

	1	2	3	4	الإمداد	u_i
1	45	17 6	21 (-29)	30 (-32)	15	31
2	14	18 (32)	19 7	31	13	0
3 (دوى)	0	0	0	0	3	-31
الاحتياج	9	6	7	9		
u_j	14	-14	19	31		

جدول 1 E

	1	2	3	4	الإمداد	u_i
1	45	17 3	21 6	30 6	15	
2	14	18 6	19 7	31	13	
3 (دوى)	0	0	0	0	3	
الاحتياج	9	6	7	9		
u_j						

جدول 1 F

	1	2	3	4	الإمداد	u_i
1	45 (29)	17 6	21 3	30 6	15	0
2	14 9	18 (3)	19 4	31 (3)	13	-2
3 (دوى)	0 (14)	0 (13)	0 (9)	0 3	3	-30
الاحتياج	9	6	7	9		
u_j	16	17	21	30		

جدول 1 H

وحيث إنه - على الأقل - أحد هذه القيم $(c_{ij} - u_i - v_j)$ سالب ، فإن الحل الحالي ليس أمثل ، ويمكن الحصول على حل أفضل بزيادة التخصيص للمتغير (الخلية) الذي له أكبر مدخل سالب ، وهو هنا الخلية (2,1) في الجدول 1 C . ونفعل ذلك بوضع علامة + ثقيلة (للدلالة على الزيادة) في الخلية (2,1) « وتحديد حلقة تحتوي على ، بالإضافة إلى الخلية ، خلايا المتغيرات الأساسية فقط . وتوضح هذه الخلايا بالخطوط الثقيلة في الجدول 1 C . والآن نزيد التخصيص للخلية (2,1) على قدر الإمكان « وفي نفس الوقت ، نعدل تخصيصات الخلايا الأخرى في الحلقة ، بحيث لا نحصل بقيود الإمداد ، والاحتياج ، أو شرط اللاسلبية . وأي تخصيص موجب للخلية (2,1) سيجعل x_{22} سالباً . ولتجنب ذلك ، مع جعل x_{21} أساسياً « نخصص $x_{21} = 0$ ، ونستبعد من مجموعة المتغيرات الأساسية . ويعطى الحل الأساسي الجديد ، الذي ينحرف أيضاً ، بالجدول 1 D .

	1	2	3	4	الإمداد	u_i
1	45 9	17 6	21	30	15	
2	14 0	18	19 7	31 6	13	
3 (وهي)	0	0	0	0 3	3	
الاحتياج	9	6	7	9		
v_j						

الجدول 1 D

نتحقق الآن من أن هذا الحل أمثل . وبالعمل مباشرة بالجدول 1 D نحسب أولاً u_i ، v_j الجديدتين بالنسبة للمتغيرات الأساسية الجديدة ، ثم نحسب $c_{ij} - u_i - v_j$ لكل خلية متغير غير أساسي . ومرة أخرى نختار $u_2 = 0$ ، حيث إن الصف الثاني يحتوي على متغيرات أساسية أكثر من أي صف أو عمود آخر . هذه النتائج موضحة بين قوسين في الجدول 1 E . وحيث إن المدخلين سالبان « فإن الحل الحالي ليس أمثل ، ويمكن الحصول على حل أفضل بزيادة التخصيص للخلية (1,4) . وتوضح الحلقة المتكاملة بالخط الثقيل في الجدول 1 E ؛ وتتكون من الخلايا (1,4) ، (2,4) ، (2,1) ، (1,1) . وأي كمية تضاف إلى الخلية (1,4) يجب أن تطرح في نفس الوقت من الخلية (1,1) ، (2,4) ، ثم تضاف إلى الخلية (2,1) ، بحيث لا نحصل بقيود الإمداد والاحتياج . لذلك فإنه لا يمكن إضافة أكثر من ست عربات إلى الخلية (1,4) بدون جعل x_{24} سالبة . وبالتالي نعيد تخصيص $x_{14} = 4$ ، وعمل التعديلات اللازمة في الحلقة ، ونستبعد x_{24} كمستغير أساسي . ويكون الحل الأساسي الجديد غير المنحرف كما هو مبين في الجدول 1 F .

بعد اختبار آخر من اختبارات الأمثلية (سالب) والتغير التابع في الأساس « نحصل على الجدول 1 H ، والذي يبين أيضاً نتائج اختبار الأمثلية للحل الأساسي الجديد . ومن الملاحظ أن كل قيمة $c_{ij} - u_i - v_j$ لا سالبة ؛ لذلك فإن الحل الجديد يكون أمثل . أي أن : $x_{12}^* = 6$ ، $x_{13}^* = 3$ ، $x_{14}^* = 6$ ، $x_{21}^* = 9$ ، $x_{23}^* = 4$ ، $x_{34}^* = 3$ مع كل المتغيرات الأخرى غير أساسية « ولذلك فهي صفرية . وأكثر من ذلك .. فإن

$$z^* = 6(17) + 3(21) + 6(30) + 9(14) + 4(19) + 3(0) = \$547$$

وحقيقة أن بعض التخصيصات الموجبة تأتي من المصادر الوهمية « وتدل على أن كل الاحتياجات لا يمكن استيفاؤها بهذا الجدول الأمثل . وعلى الأخص ، مكان الوصول 4 يصلح ثلاث عربات أقل من احتياجاته .

		1	2	3	4	الإمداد	الفرق
1	45	17	21	30	15	4	4
2	14 9	18	19	31	13	4	4
3 (ومى)	0	0	0	0	3	0	X
الاحتاج	9	6	7	9			
الفرق	14 31†	17 1	19 2	30† 1			

جدول 5B

	1	2	3	4	الإمداد	الفرق
1	45	17	21	30	15	4 4 4†
2	14	18	19	31	13	4 4 1
3 (ومى)	0	0	0	0	3	0 X X
الاحتاج	9	6	7	9		
الفرق	14 31† X	17 1 1	19 2 2	30† 1 1		

جدول 5C

	1	2	3	4	الإمداد	الفرق
1	45	17	21	30	15	4 4 4† 9
2	14	18	19	31	13	4 4 1 12†
3 (ومى)	0	0	0	0	3	0 X X X
الاحتياج	9	6	7	9		
الفرق	14	17	19	30†		
	31†	1	2	1		
	X	1	2	1		
	X	X	2	1		

جدول 5D

حيث يتساوى الإمداد الكلي بالاحتياج الكلي ، فلا حاجة لإيجاد مصادر أو أماكن وصول وهمية . ويصبح جدول النقل هو الجدول A . بتطبيق طريقة فوجل واستخدام نفس الرموز كما في المسألة ٨ - ٥ . نصل إلى الجدول 6B بعد حساب مجموعة الفروق الثابتة . وهناك تساوي ذو اتجاهين لأكبر فرق . وكطريقة جيدة نفحص كل عنصر ، وهنا الصف ١ (بحذف العمود 3) ، والعمود ١ . لهذا المتغير وبأقل تكلفة نقل وحدة . ومرة أخرى يكون هناك تساوي ، فنختار $x_{12} = 700$. وبوضع $x_{12} = 700$ نفى بكل احتياج مكان الوصول 2 ، ومع التخصيص السابق لـ x_{13} . نستنتج كل الإمداد من المصدر ١ . وبحذف الأعمدة 2 و 3 والصف ١ . يصبح التخصيص المتبقي $x_{21} = 1000$. أحادي التحديد . وتؤدي طريقة فوجل إلى الجدول 6C . ومع ذلك فهذا الحل غير كامل ، لأن ثلاثة فقط من العدد الضروري $3+2+1=4$ من المتغيرات الأساسية هم الذين تم تحديدهم . ونختار $x_{23} = 500$ كمتغير رابع أساسي ، وحيث إنه المتغير غير المخصص ، والذي له أقل تكلفة نقل وحدة ، وحيث أن إدخاله كمتغير أساسي لا يوجد حلقة مع المتغيرات الأساسية السابق تحديدها ، فتكون النتيجة هي الحل الأساسي وبالضرورة ينحرف . ويعطى بالجدول 6D .

	1	2	3	الإمداد	u_i
1	14	13	11	1200	
2	13	13	12	1000	
الاحتياج	1000	700	500		
v_j					

جدول 6A

	1	2	3	الإمداد	u_i	الفروق
1	14	13	11	1200		21 1
2	13	13	12	1000		1 0
الاحتياج	1000	700	500			
v_j						
الفروق	1	0	1			
	1	0	X			

جدول 6B

نختار الآن أمثلة هذا الحل ، بالعمل مباشرة مع الجدول 6D ، فإنه ليس أمثل . وتحسينه نحصل على التخصيص الموضح بالجدول 6E ، والذي يكون أمثل . $x_{11} = x_{22} = x_{23} = 0$ ، $x_{12} = 700$ ، $x_{13} = 500$ ، $x_{21} = 1000$. عند

$$z^0 = 700(13) + 500(11) + 1000(13) = 27600 = \$276$$

لاحظ أن هذا التخصيص مشابه للتخصيص الأول ، مع تغير أماكن الوصول للمتغيرات الأساسية فقط .

	1	2	3	الإمداد	u_i	الفروق
1	14	13	11	1200		2† 1†
		700	500			
2	13	13	12	1000		1 0
	1000					
الاحتياج	1000	700	500			
v_j						
الفروق	1	0	1			
	1	0	X			

جدول 6 C

	1	2	3	الإمداد	u_i
1	14	13	11	1200	0
		(2)	700 — 500		
2	13	13	12	1000	1
	1000	(-1) +	0		
الاحتياج	1000	700	500		
v_j	12	13	11		

جدول 6D

	1	2	3	الإمداد	u_i
1	14	13	11	1200	0
	(1)	700	500		
2	13	13	12	1000	0
	1000	0	(1)		
الاحتياج	1000	700	500		
v_j	13	13	11		

جدول 6 E

٧ - ٨ أوجد الأزواج غير المتأثر للنموذج (٨ - ٢) بتجاهل شرط الأعداد الصحيحة .

يمكن كتابة القيود الأولية مثل النموذج $(m+n) \times mn$

$$\begin{array}{rcl}
 x_{11} + \dots + x_{1n} & & = a_1 \\
 x_{21} + \dots + x_{2n} & & = a_2 \\
 \dots & & \dots \\
 x_{m1} + \dots + x_{mn} & & = a_m \\
 x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} & & = b_1 \\
 x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} & & = b_2 \\
 \dots & & \dots \\
 x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} & & = b_n
 \end{array}
 \quad (1)$$

من الملاحظ أن كل عمود من معاملات المصفوفة A يحتوي بالضبط على اثنين ؛ وبالأخص العمود $(i-1)n + j$ يحتوي على 1 في الصف i ، و 1 في الصف $m+j$. لذلك يحتوي قيد الأزواج رقم $[(i-1)n + j]$ كما هو معطى في (٥ - ٢) على متغيرات الأزواج رقم i ، ورقم $(m+j)$ فقط . بالتعبير عن متغيرات الأزواج $u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n$ فيكون هذا القيد ببساطة

$$u_i + v_j \leq c_{(i-1)n+j} (=c_{ij})$$

ويعبر عن برنامج الأزواج الكامل مثل :

$$\begin{array}{l}
 z = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \quad : \text{تعظيم} \\
 u_i + v_j \leq c_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) \quad : \text{علماً بأن}
 \end{array}
 \quad (2)$$

البرنامج (2) له صيغة المصفوفات (٥ - ٤) عند

$$B = [a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n]^T \quad C = [c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}, c_{21}, \dots, c_{2n}, \dots, c_{m1}, \dots, c_{mn}] \quad W = [U^T, V^T]^T$$

٨ - ٨ استخدم نتائج المسألة (٨ - ٧) لتحقيق اختبار الأمثلية لطريقة النقل .

دع $X = [x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn}]^T$ لتكون أى حل ممكن للبرنامج الأولي (٨ - ٢) ، و لتكون أى حل ممكن لبرنامج الأزواج 2 في المسألة ٨ - ٧ في صيغته المصفوفات . ينتج من المسألة ٩ - ١ أن :

$$C^T X \geq B^T W \quad \text{or} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \geq \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j
 \quad (1)$$

ومن السهل بيان (بالمقارنة بالمسألة ٤ - ٢) أنه إذا كانت (I) متساوية ، هما حلان أمثلان لبرامجها المناظرة .

والآن ، بافتراض أن طريقة النقل أنتجت جدولاً وفيه يمكن حساب الأعداد u_i^* و v_j^* ، ولهما الخصائص التالية :
 (أ) لكل خلية (i, j) تحتوي على متغير أساسي x_{ij} (موجب أو صفر) $u_i^* + v_j^* = c_{ij}$. (ب) لكل خلية (i, j) تحتوي على متغير غير أساسي $u_i^* + v_j^* \leq c_{ij}$ ، فإن $x_{ij} = 0$ ، فإن X^* تكون حلاً ممكناً للبرنامج الأولي ، W^* تكون حلاً ممكناً للبرنامج الازدواج . وأكثر من ذلك - باستخدام معادلات القيود الأولية نحصل على

$$\sum_{i=1}^m a_i u_i^* = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_{ij}^* \right) u_i^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_i^* x_{ij}^* \quad \text{و} \quad \sum_{j=1}^n b_j v_j^* = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m x_{ij}^* \right) v_j^* = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m v_j^* x_{ij}^*$$

وبالتالي :

$$(2) \quad \sum_{i=1}^m a_i u_i^* + \sum_{j=1}^n b_j v_j^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (u_i^* + v_j^*) x_{ij}^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^*$$

وننتج المتساوية الأخيرة من الخاصيتين (أ) و (ب) المذكورتين بأعلى ، ولكن 2 هي نفسها الكل من X^* و W^* في حالة التساوي ، لذلك فإن X^* تكون حلاً أمثل لمشكلة النقل (وتكون W^* حلاً أمثل للبرنامج الازدواج) .

مسائل مكملية

Supplementary Problems

٨ - ٩ انشئ جدول نقل للمسألة (١ - ٢١) ، واستخدم طريقة النقل لتحديد جدول الإنتاج الأمثل .

٨ - ١٠ استخدم طريقة النقل في حل المسألة ١ - ٢٢ .

٨ - ١١ يمكن لشركة طيران داخلية شراء التوقيتات من أحد ثلاثة متعهدين . وتحتاج شركة الطيران للشهر المقبل في كل مطار من مطاراتها الثلاثة التي تخدم فيها إلى 100000 جالون في المطار 1 ، و 180000 جالون في المطار 2 ، و 350000 جالون في المطار 3 . ويمكن لكل متعهد الإمداد بالتوقيت لكل مطار بالأسعار (سنت لكل جالون) الموضحة بالجدول التالي :

	المطار 1	المطار 2	المطار 3
المتعهد 1	92	89	90
المتعهد 2	91	91	95
المتعهد 3	87	90	92

• ومع ذلك يتحدد كل متعهد تبعاً للكمية التي يستطيع الإمداد بها خلال الشهر . والطاقت المتاحة لديهم هي 320000 جالون للمتعهد 1 ، و 270000 جالون للمتعهد 2 ، و 190000 جالون للمتعهد 3 . حدد سياسة الشراء التي ستفي باحتياجات شركة الطيران بأقل تكلفة كلية .

٨ - ١٢ تتيج شركة مخازن خبزاً مخصوصاً في أى من أحد المصنعين كما يلي :

المصنع	الطاقة الإنتاجية رغيف	تكلفة الإنتاج سنت / رغيف
A	2500	23
B	2100	25

تريد أربعة رستورانات شراء هذا الخبز ، وتقدر احتياجاتهم والأسعار التي يريدون أن يدفعوها بما يلي :

رستوران	الاحتياج الكلي رغيف	السعر المقدم سنت / رغيف
1	1800	39
2	2300	37
3	550	40
4	1750	36

أسعار النقل للخبز من المصنع إلى الرستوران توضح فيما يلي :

	رستوران 1	رستوران 2	رستوران 3	رستوران 4
المصنع A	6	8	11	9
المصنع B	12	6	8	5

حدد جدول تسليم شركة المخازن لتعظيم الربح من الخبز المنتج .

٨ - ١٣ تحتوي مخازن شركتين للأدوية على 1.1 ، 0.9 مليون جرعة من مصل ضد الإنفلونزا ، ويبدو أن هناك تلوّثاً من هذا المرض في ثلاث مدن . ويجب تطعيم المواطنين من الطبقة العليا أولاً ، حيث إن هذا المرض خطير . وبعد ذلك يتم تطعيم المواطنين على أساس من يأتي أولاً يطعم أولاً طوال بقاء المصل . وتقدر كمية المصل التي تحتاجها كل مدينة (بالمليون جرعة) كما يلي :

	المدينة 1	المدينة 2	المدينة 3
الأكبر	0.325	0.260	0.195
الآخرون	0.750	0.800	0.650

تكلفة النقل (سنت / جرة) بين شركات الأدوية والمدن هي :

	المدينة 1	المدينة 2	المدينة 3
الشركة 1	3	3	6
الشركة 2	1	4	7

حدد جدولاً أقل تكلفة نقل يمكن به إمداد المصل اللازم على الأقل لتطعيم المواطنين من الطبقة العالية (ملحوظة : قسم كل مدينة إلى مكانين للوصول « ومواطني من الطبقة العليا ، وآخرين . أوجد مصدراً واحداً . اجعل تكلفة النقل من المصدر الوهمي إلى مكان الوصول للمواطنين من الطبقة العليا عالية ، تضمن بذلك عدم النقل خلال هذه القنوات) .

٨ - ١٤ أثبت أنه إذا كانت التكلفة في أي صف أو أي عمود في جدول النقل تنخفض بانتظام بنفس العدد (سالب أو موجب) « فإن المسألة الناتجة يكون لها نفس الحل الأمثل مثل المسألة الأصلية .

برمجة الأعداد الصحيحة : نماذج الجدولة

Integer Programming: Scheduling Models

مشاكل الإنتاج PRODUCTION PROBLEMS

تدور مشاكل الإنتاج حول مُنتج واحد يُصنع على فترات زمنية متتالية لمقابلة احتياجات مسبقة . وعند تصنيحه تُشحن وحدات المنتج أو تخزن ، وتكون تكاليف الإنتاج والتخزين معروفة ، بهدف تحديد جدول الإنتاج الذي يلبي باحياجات المستقبل بأقل تكلفة كلية (التي تتكون من تكلفة الإنتاج الكلية وتكلفة التخزين الكلية على افتراض أن تكلفة النقل الكلية تكون ثابتة) (انظر المسألة ٩ - ١) .

يمكن تحويل مشاكل الإنتاج إلى مشاكل نقل باعتبار الفترات الزمنية التي يحدث فيها الإنتاج كمصادر ، والفترات الزمنية التي ينقل فيها المنتج كأماكن وصول . وتؤخذ طاقات الإنتاج كمإمدادات . لذلك تدل i على عدد الوحدات المنتجة في الفترة الزمنية i للنقل في الفترة الزمنية j . تدل c_{ij} على تكلفة الإنتاج للوحدة في الفترة الزمنية i ، مضافاً إليها تكلفة التخزين للوحدة من الفترة الزمنية i حتى الفترة الزمنية j . وحيث إن الوحدات لا يمكن أن تنقل قبل أن تنقل ، فإن c_{ij} تكون كبيرة عند $j < i$ لجعل قيمة c_{ij} المناظرة مساوية للصفر .

مشاكل النقل بالشحن TRANSSHIPMENT PROBLEMS

تشبه مشكلة النقل بالشحن مشكلة النقل ، حيث تحتوي على مصادر بها إمدادات ، وأماكن وصول لها احتياجات . وبالإضافة إلى ذلك .. فإنها تحتوي على « أماكن شحن » يتم من خلالها نقل البضائع . ويجب أن تميز أماكن الشحن هذه عن المصادر وأماكن الوصول ، أو أن المصدر وأماكن الوصول قد تعمل كمكان شحن . وتعطى تكلفة شحن الوحدة بين كل الأماكن الممكنة . ويكون الهدف هو تصميم جدول نقل يواجه كل الاحتياجات بأقل تكلفة ممكنة . (انظر المسألة ٩ - ٢ ، ٩ - ٣)

ويمكن أن نحول مشاكل النقل بالشحن إلى مشاكل نقل بجعل كل مكان شحن مصدراً ومكاناً للوصول . وكما في طريقة النقل ، فإن الإمداد الكلي من المفروض أن يتساوى مع الاحتياج الكلي ، وإذا كان هذا ليس صحيحاً من حيث المبدأ ، فإنه يمكن إضافة مصدر أو مكان وصول وهمي . لذلك فإن العدد الكلي من الوحدات في النظام يعطى إما بمجموع الإمدادات أو بمجموع الاحتياجات . ويخصص لكل مكان شحن إمداد يساوي الإمداد الأصلي (أو صفر) إذا لم ينطبق مكان الشحن الأصلي مع المصدر) ، مضافاً إليه العدد الكلي من الوحدات في النظام ، ويخصص له احتياج مساوٍ لاحتياجه الأصلي (أو صفر) إذا لم ينطبق مكان الشحن الأصلي مع مكان الوصول) ، مضافاً إليه العدد الكلي من الوحدات في النظام . وتسمح هذه التخصيصات بإمكانية أن تمر كل الوحدات بمكان الشحن . وتكون تكلفة وحدة واحدة من مكان شحن (باعتباره مصدراً) إلى نفس المكان (باعتباره مكان وصول) مساوية للصفر . أما الوحدات التي لا تمر من خلال مكان الشحن بالجدول الأمثل ، فإنها تظهر كتخصيصات من مكان الشحن لنفس المكان .

مشكلات التعيين ASSIGNMENT PROBLEMS

تتضمن مشاكل التعيين جدولة العاملين في الأعمال فرداً فرداً (وبوجه عام .. فإنها تتضمن التبادلات بين مجموعة أهداف) . ومن المفروض أن يكون عدد العاملين مساوياً لعدد الأعمال . ويجب ضمان هذا الشرط بإيجاد عاملين وظيفتين أو أعمال وظيفتين طبقاً للاحتياج . ويكون الزمن t اللازم للعامل رقم i لإكمال العمل رقم j (أو قيمة الهدف t في المكان رقم j) معروفاً . ويكون الهدف هو جدولة كل العاملين

على الأعمال . بحيث تكتمل كل الأعمال في أقل وقت ممكن (أو إيجاد أفضل تبادلية ، والتي لها أكبر قيمة) . (انظر المسألة ٩ - ٤) يمكن تحويل مسائل التعمين إلى مسائل نقل باعتبار العاملين كمصادر . والأعمال كأماكن وصول ، حيث يكون كل الإمداد والاحتياج مساوياً . وتعتبر « الطريقة الجبرية » طريقة حل أكفأ من طريقة النقل العامة ، والتي تستخدم مصفوفة التكلفة فقط ، الجدول ٩ - ١ كمداخلات . وهناك ٤ خطوات :

		الأعمال				
		1	2	3	...	n
العاملين	1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	...	c_{1n}
	2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	...	c_{2n}
	3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	...	c_{3n}

	n	c_{n1}	c_{n2}	c_{n3}	...	c_{nn}

جدول ٩ - ١

الخطوة 1 : في كل صف من الجدول ٩ - ١ نخصص أصغر عنصر ، وأطرحه من كل عناصر الصف . كرر هذه العملية لكل عمود (الحد الأدنى للعمود يحدد بعد طرح الصفوف) ستحتوي مصفوفة التكلفة المعدلة على صفر واحد على الأقل في كل صف ، وعمود .

الخطوة 2 : حدد ما إذا وجد تخصيص ممكن يحتوي على تكلفة صفرية واحدة في مصفوفة التكلفة المعدلة . وفي قول آخر .. حدد ما إذا احتوت المصفوفة المعدلة على أصفار عددها ■ لا يتواجد أى اثنين منها في نفس الصف أو العمود .

الخطوة 3 : غط كل الأصفار في مصفوفة التكلفة المعدلة بخطوط قليلة رأسية وأفقية بقدر الإمكان . ويجب أن يمر الخط الأفقى خلال الصف كله ، وكذلك يجب أن يمر الخط الرأسى بالعمود كله ، ويكون هذا العدد الأدنى من الخطوط الكلية بهذه التغطية أقل من ■ . نخصص أصغر عدد في مصفوفة التكلفة غير المغطى بخط . اطرح هذا العدد من كل العناصر غير المغطاة بخطوط ، وأضف إليه كل عنصر مغطى بخطين .

الخطوة 4 : ارجع إلى الخطوة الثانية
انظر المسألة ٩ - ■ طبقاً لإحدى النتائج الرئيسية في نظرية الأشكال البيانية ، يكون عدد الخطوط المطلوب في الخطوة الثالثة مساوياً بدقة لأكبر عدد من الأصفار في المصفوفة المعدلة ، بحيث لا يوجد أى اثنين منها في نفس الصف أو العمود .

مشكلة البحار المسافر THE TRAVELING SALESMAN PROBLEM

تتضمن هذه المشكلة فرداً يجب أن يفادر قاعدة من مكان معين ■ ويزور عدد $n - 1$ من الأماكن الأخرى (كل مكان مرة واحدة فقط) ، ثم يعود إلى القاعدة . ونقرر تكلفة السفر بين كل زوج من الأماكن c_{ij} ، وليس من الضروري أن تساوى c_{ij} . والهدف هو جدولة خط الرحلة بأقل تكلفة ممكنة . وحيث إن المهم هو الدائرة المغلقة بواسطة البحار ، فإنه من الملائم تحديد أى من الأماكن n ، ويكون هو القاعدة .

ويمكن أن ترتبط مشكلة التعمين بمشكلة البحار المسافر كما يلي : ارمز إيجابياً إلى الأماكن المحتواة بمشكلة البحار المسافر بالأعداد الصحيحة $1, 2, \dots, n$. اعتبر مجموعة n من العاملين ، ومجموعة من الأعمال n ، وتكون تكلفة التعمين c_{ij} هي تكلفة السفر مباشرة من المكان i إلى المكان j . ومن الواضح أن أى حل ممكن لمشكلة البحار المسافر متصل بالحل الممكن للمشكلة المرتبطة بمشكلة التعمين . ومع ذلك ، فإن مشكلة التعمين لها حلول ممكنة (مرتبطة بتبادليات لا دائرية) لا تمثل حلولاً ممكنة لمشكلة البحار المسافر . ويستخدم الحل الأمثل للمشكلة المرتبطة بالتعمين كتقريب أول لحل مشكلة البحار المسافر . نطبق الطريقة الجبرية على مصفوفة التكلفة لمشكلة التعمين (وهى نفسها مصفوفة مشكلة البحار) إذا تبعت النتائج خط رحلة ممكن ، فإنه خط الرحلة يكون أمثل . وإذا لم يكن كذلك ، يمكن استخدام بديل بطريقة التفريع والتحديد (الفصل السادس) لإيجاد مشكلتي تعمين جديدتين يقع بينهما الحل الأمثل لمشكلة البحار المسافر .

يكون التفرع للعنصر C_{pq} ، حيث إن $p \rightarrow q$ هو أحد التعيينات في التقريب الأول الحالي (الذي يفترض ألا يعكس خط رحلة ممكن) . ويمكن الحصول على مصفوفة تكلفة جديدة باستبدال C_{pq} بعدد كبير .

تعتبر طرق التفرع والتحديد غير عملية حسابياً ، وذلك بالنسبة للمشكلات الكبيرة التي تحتوي على معات من الأماكن . وقد اقترحت عدة طرق قريبة إلى المثالية لهذه المواقف . (انظر المسألة ٩ - ٧) والاعتراض على هذه الطرق القريبة إلى المثالية هو أنه بالرغم من أن هذه الطرق جيدة بوجه عام ، لكنها تنتج في بعض الحالات الخاصة تقريبات ضعيفة جداً للحلول المثلى . (انظر المسألة ٩ - ٩) .

مسائل محلولة

Solved Problems

٩ - ٩ تخطط شركة صناعية لكلي من المواسم الأربعة للعام التالي . وتحدد الطاقات الإنتاجية للشركة والاحتياجات المتوقعة (كلها بالوحدة) فيما يلي :

	الربيع	الصيف	الخريف	الشتاء
الاحتياج	250	100	400	500
الطاقة العادية	200	300	350	...
الطاقة الإضافية	100	50	100	150

تكلفة الإنتاج العادية للشركة هي 7.00 دولارات للوحدة . وتختلف تكلفة الوحدة الإضافية موسمياً ، فتكون 8.00 دولارات في الربيع ، 9.00 دولارات في الصيف ، و 10.00 دولارات في الشتاء .

تتلك الشركة في مخازنها 200 وحدة في أول يناير ، ولكنها تخطط لعدم الاستمرار في الإنتاج في نهاية العام ، وتوغب في عدم وجود أى مخزون في موسم الشتاء . والوحدات المنتجة غير مطاحة للنقل في الورديات العادية خلال موسم الإنتاج . وبوجه عام .. فإنها تباع في الموسم التالي . أما الوحدات غير المباعة فإنها تضاف إلى المخازن ، وتحمل بمصروفات تخزين 0.70 دولار للوحدة . وعلى النقيض .. فإن الوحدات المنتجة في ورديات العمل الإضافي يجب أن تنقل في نفس موسم الإنتاج . حدد جدول الإنتاج الذي يواجه كل الاحتياجات بأقل تكلفة كلية .

الفترة الزمنية التي يمكن الإنتاج خلالها هي : ورديات العمل الإضافي للمواسم الأربعة ، والورديات العادية في المواسم الثلاثة الأولى . وتصبح كل فترة من هذه الفترات السبع مصدراً ، ويضاف إليها مصدر ثامن « مخزن أولى ، حيث يمكن الإمداد منه . والإمداد الكلي هو 1450 وحدة . والفترة الزمنية التي سيطلب فيها الإنتاج هي الأربعة مواسم ، وتصبح هذه المواسم أماكن وصول بإحتياج كلي 1250 وحدة . وحيث إن الإمداد الكلي يزيد على الاحتياج الكلي ، توجد مكان وصول وهما بإحتياج يساوي الـ 200 وحدة الزائدة .

تمثل التخصيصات الموجبة من المصدر إلى مكان الوصول الوهمي الوحدات الممكن أن تنتج في هذا المصدر ، ولكنها لا تنتج ، نظراً لعدم الاحتياج إليها . وحيث إن كل الوحدات بالمخزون الأول قد تم إنتاجها مسبقاً ، لذلك يجب تجنب التخصيص من المخزون الأول للمخزون الوهمي . ويمكن ذلك بتخصيص عدد كبير (10 000 دولار) مرتبطة بتكلفة الوحدة . وكل التكلفة الأخرى المرتبطة بمكان الوصول الوهمي تكون صفرية كالمعتاد .

والتخصيصات الأخرى التي يجب أن نتجنبها تخصيص لها تكلفة عالية . ويتضمن هذا النقل من الورديات العادية للموسم الحالي ، أو المواسم السابقة ، والنقل من الورديات الإضافية لأي موسم عدا الحالي . والتكلفة المرتبطة بالمخزون الأول تعتبر تكلفة تخزين فقط ، حيث إن تكلفة الإنتاج ، وتكلفة التخزين السابقة قد حدثت فعلاً ولا يمكن تقليلها . والتكلفة الباقية هي « بسيطة » تكلفة الإنتاج مضافاً إليها تكلفة التخزين .

بتطبيق طريقة النقل على هذه المسألة ، نحصل على الجدول 1 ، كجدول أمثل . ويتبع منه أن احتياج الربيع يستوفى باستخدام كل 200 وحدة من المخزون ٢ ، 50 وحدة من الإنتاج الإضافي في الربيع . ويستوفى احتياج الصيف من وردية الربيع العادية . ويستوفى احتياج الخريف من 300 وحدة من إنتاج الصيف العادي ، بالإضافة إلى 100 وحدة من الإنتاج الإضافي للخريف . ويستوفى احتياج الشتاء من 100 وحدة مصنوعة في الربيع في الورديات العادية ومخزونه ، بالإضافة إلى 350 وحدة من إنتاج الخريف العادي ، 50 وحدة منتجة في الشتاء في الورديات الإضافية .

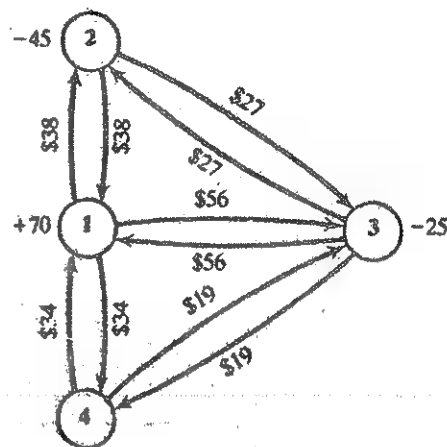
الوحد	الإمداد	الوهمي	الشتاء	الخريف	الصيف	الربيع	
العادي (ربيع)	200	0 (1.60)	8.40 100	7.70 (0)	7.00 100	10 000 (9993.60)	8.40
العادي (صيف)	300	0 (2.30)	7.70 0	7.00 300	10 000 (9993.70)	10 000 (9994.30)	7.70
العادي (خريف)	350	0 (3)	7.00 350	10 000 (9993.70)	10 000 (9994.40)	10 000 (9995)	7
مخزون أولي	200	10 000 (10.008)	2.10 (0.10)	1.40 (0.10)	0.70 (0.10)	0 200	2
إضافي (ربيع)	100	0 50	10 000 (9990)	10 000 (9990.70)	10 000 (9991.40)	8.00 50	10
إضافي (صيف)	50	0 50	10 000 (9990)	10 000 (9990.70)	9.00 (0.40)	10 000 (9992)	10
إضافي (خريف)	100	0 (1.30)	10 000 (9991.30)	8.00 100	10 000 (9992.70)	10 000 (9993.30)	8.70
إضافي (شتاء)	150	0 100	10.00 50	10 000 (9990.70)	10 000 (9991.40)	10 000 (9992)	10
الاحتياج		200	500	400	100	250	
0		-10	0	-0.70	-1.40	-2	

جدول 1

٩ - ٧ تقوم مؤسسة بنقل 70 وحدة من منتج معين من الموقع 1 إلى الموقعين 2 ، 3 بالكميات 45 ، 25 وحدة على التوالي . تكلفة النقل الجوي بين المواقع (بالدولار للوحدة) معطاه في الجدول ٩ - ١ ، حيث توضح الخطوط المنقطه أنه لا توجد خدمة . حدد جدول النقل الذي يخصص الأعداد المطلوبة من السلع لكل مكان وصول بأقل تكلفة نقل ممكنة . ويمكن النقل من خلال نقط وسيطة .

i \ j	1	2	3	4
1	...	38	56	34
2	38	...	27	...
3	56	27	...	19
4	34	...	19	...

جدول ٩ - ١



شكل ٩ - ١

توضح هذه المسألة خطياً بالشكل ٩ - ١ ، حيث توضح الإمدادات بالأعداد الموجبة ، والاحتياجات بالأعداد السالبة . ملاحظة أنه بالرغم من تماثل الجدول ٩ - ١ ، فإن أجور الشحن لا تتناسب مع المسافات . والموقع 4 هو مكان شحن فقط . والموقعان 1 ، 3 يستخدمان كأماكن وصول وأماكن شحن (يمكن شحن البضائع من الموقع 1 إلى الموقع 3 من خلال الموقع 2 من 2 إلى 3 خلال 3) ، بينما يستخدم الموقع 4 كمصدر ومكان شحن . وحيث إنه ليس من الممكن (ليكون الوضع مثالياً) شحن البضائع من الموقع 1 واستقبالها في وقت لاحق ، لذا يجب أن تشحن مرة أخرى ، فإن المسألة يمكن أن تبسط بعدم السماح بالشحن إلى الموقع 1 وتقييده بأن يكون مصدراً فقط .

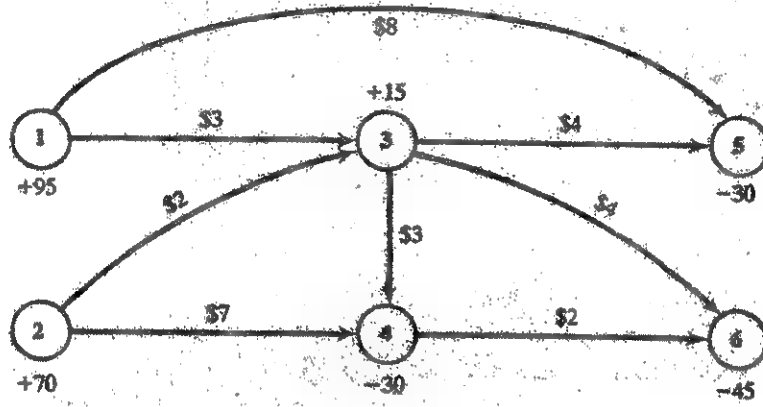
أماكن الوصول

	2	3	4	الإمداد	u_i
1	38 45	56 (3)	34 25	70	0
2	0 70	27 (12)	10 000 (10 004)	70	-38
3	27 (42)	0 70	19 (38)	70	-53
4	10 000 (9996)	19 25	0 45	70	-34
الاحتياج	115	95	70		
v_j	38	53	34		

جدول 2

لتطبيق طريقة النقل ، نزيد الإمداد والاحتياج لكل مكان شحن - المواقع 2 ، 3 ، 4 - بالمعد الكلى من الوحدات في النظام ، 70 وحدة . وأيضاً نحدد $10\ 000 = \text{دولار} = c_{24} = c_{42}$ لجعل الشحن على الطرق $4 \rightarrow 2$ ، $2 \rightarrow 4$ مساوياً للصفر . وتحديد $c_{22} = c_{33} = c_{44} = 0$ نتيج طريقة النقل ، الجدول الأمتل 2 . لذلك فإن 45 وحدة تشحن من الموقع 1 مباشرة إلى الموقع 2 لتستوفى احتياجاته ، بينما إلى 25 وحدة الباقية تشحن من الموقع 1 إلى الموقع 4 ، ثم توجه إلى الموقع 2 . لاحظ أن : $x_{22} = x_{33} = x_{44} = 70$ يدل على أن (كل) 70 وحدة تتجنب المرور خلال هذه المواقع . وبالمثل $x_{44} = 45$ ، مؤكداً أن : 45 من 70 وحدة لا تشحن خلال الموقع 4 .

٩ - ٣ البيانات في شكل ٩ - ٢ ، حدد جدول الشحن الذي يواجه كل الاحتياجات بأقل تكلفة كلية



شكل ٩ - ٢

المواقع 1 ، 2 هي مصادر ، بينما المواقع 3 ، 4 هي أماكن وصول . الموقع 3 هو مصدر ، ومكان شحن (نقطة اتصال) ، بينما الموقع 4 يخدم كمكان وصول ومكان شحن . ولأن الإمداد الكلى هو 180 وحدة ، بينما الاحتياج هو 105 وحدة فقط ، توجد الموقع 7 كمسكان وصول وهمي باحتياج $180 - 105 = 75$ وحدة . وحيث إن كل مكان شحن هو مصدر ومكان وصول ، بالإضافة 180 وحدة إلى كل من الإمدادات والاحتياجات لهذا الموقع ، فيحتوى جدول النقل على المصادر 1 ، 2 ، 3 ، 4 . وكذلك أماكن الوصول 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 . وبجانب التكلفة المعلقة في شكل ٩ - ٢ ، نحدد التكلفة صفر من مكان الشحن (كمصدر) إلى نفس المكان (كمسكان وصول) ، وتكلفة صفر من أي مصدر إلى الوهمي ، والتكلفة (10 000 دولار) على أى وصلة غير موجودة (مثلاً 1 - 6) .

الجدول 3 هو جدول النقل الأمتل . يستقبل الموقع 3 ، 20 وحدة من الموقع 1 ، 1 وحدة من الموقع 2 ، بينما تعيد توزيع هذه الوحدات بإمدادها الأول 15 وحدة إلى المواقع 4 ، 5 ، 6 . وبعد استيفاء كل الاحتياجات يبقى الموقع 1 وبه 75 وحدة موزعة بالجدول 3 بالتخصيص من الموقع 1 إلى الوهمي . والتخصيصات $x_{34} = 180$ ، $x_{35} = 90$ هي مدخلات دفترية تؤكد أعداد الوحدات التي لا تمر خلال أماكن الشحن 3 ، 4 على التوالي .

أماكن الوصول

	3	4	5	6	7 وهي	الإمداد	u_i
1	3 20	10 000 (9994)	8 (1)	10 000 (9993)	0 75	95	3
2	2 70	7 (2)	10 000 (9994)	10 000 (9994)	0 (1)	70	2
3	0 90	3 30	4 30	4 45	0 (3)	195	0
4	10 000 (10 003)	0 180	10 000 (9999)	2 (1)	0 (6)	180	-3
الاحتياج	180	210	30	45	75		
b_i	0	3	4	4	-3		

جدول 3

٩ - ٤ حل المسألة ١ - ١٣ بالطريقة الجبرية

يمتد الجدول ١ - ١ في المسألة ١ - ١٣ لجمال عدد الأحداث مساوياً لعدد السباحين ، وتكون النتيجة ، الجدول 4 A .
وكالمعتاد فإن التكلفة (الأزمنة) المرتبطة بالوهية ، الأحداث ، ■ ، تؤخذ صفرية . ويكون الترشيد هنا هو أن الأحداث 5 ■ لا توجد ، ولذلك فإنها تستكمل في زمن صفر ، ويكون السباحون المخصصون لهذه الأحداث هم غير الداخلين في سباق الرضاغى .

تبدأ الطريقة الجبرية بطرح صفر من كل صف في الجدول 4 A ، ثم طرح 65 ، 69 ، ■ ، 56 ، ■ ، من الأعمدة 1 حتى ■ على التوالي ، وينتج عن ذلك ، الجدول 4 ■ . نظراً لأن هذه المصفوفة لا تحتوي على حل التكلفة الصفرية الممكن ■ فإننا نغطي الأصفار الموجودة بأقل عدد من الخطوط الأفقية أو الرأسية الممكنة ، وإحدى هذه التغطيات ثمين بالجدول 4 ■ ، والأخرى المتساوية معها في الجودة ■ نحصل عليها بإحلال الخط من خلال الصف 3 بخط من خلال العمود 4 . ويكون أصغر العناصر غير المغطاة هو ■ الذى يظهر في الموقع (2,2) . وي طرح 1 من كل عنصر غير مغطى في الجدول 4 B ■ وإضافة ■ لكل عنصر مغطى بخطين - العناصر (1,5) ، (1,6) ، (3,5) ، (3,6) ، (5,5) ، (5,6) - نصل إلى الجدول 4 C .

لا يحتوي الجدول 4 C أيضاً على تعيين التكلفة الصفرية الممكنة . ويتكرر الخطوة 3 من الطريقة الجبرية ■ نحدد أن ■ هو ، مرة أخرى أصغر عنصر غير مغطى . بطرحه من كل عنصر غير مغطى ، وإضافة إلى كل عنصر مغطى بخطين ■ نحصل على الجدول 4 D ، الذى لا يحتوي على تعيين التكلفة الصفرية الممكنة ، كما هو موضح بالمدخلات ذات النجوم . لذلك فإن التخصيص الأمثل هو السباح ■ للحدث 1 (سباحة ظهر) ، والسباحان 4 ، 6 لا يدخلان السباق ، الوقت الكلى الأدنى (بالثواني) يحسب من الجدول 4 A كما يلي :

$$z^* = c_{11} + c_{23} + c_{34} + c_{52} = 65 + 65 + 55 + 69 = 254 \quad \blacksquare$$

ومع ذلك فهذا الحل ، ليس هو الحل الأمثل الوحيد . ويمكن الحصول على تخصيص أمثل متساوٍ معه من الجدول 4 D : خصص السباح 1 للحدث 3 ، والسباح 2 للحدث 1 ، تاركاً التخصيصات الأخرى بدون تغيير .

الأحداث

	1	2	3	4	5	6
السياحون						
1	65	73	63	57	0	0
2	67	70	65	58	0	0
3	68	72	69	55	0	0
4	67	75	70	59	0	0
5	71	69	75	57	0	0
6	69	71	66	59	0	0

جدول 4 A

	1	2	3	4	5	6
السياحون						
1	0	4	0	2	0	0
2	2	1	2	3	0	0
3	3	3	6	0	0	0
4	2	6	7	4	0	0
5	6	0	12	2	0	0
6	4	2	3	4	0	0

جدول 4 B

	1	2	3	4	5	6
السياحون						
1	0	0	0	2	0	0
2	1	0	1	2	0	0
3	3	3	6	0	0	0
4	1	5	6	3	0	0
5	6	0	12	2	0	0
6	3	2	3	0	0	0

جدول 4 C

	1	2	3	4	5	6
السياحون						
1	0*	5	0	2	2	2
2	0	0	0*	1	0	0
3	3	4	6	0*	2	2
4	0	5	5	2	0*	0
5	5	0*	11	1	1	1
6	2	1	1	2	0	0*

جدول 4 D

٩ - ٥ حقن الطريقة الجبرية

كنتيجة للمسألة ٨ - ١٤ (تذكر أن مشكلة التعيين هي مشكلة نقل) ، لا تغير الخطوة الأولى للطريقة الجبرية من الحلول المثل للتعيين ، ولكن تعطي ببساطة مصفوفة تكلفة للمدخلات الأصغر ، بحيث إن كل عنصر في مصفوفة التكلفة لا سلبى ، فإن تعيين تكلفة صفرية إذا أمكن ، يعطى حلاً أمثل . وبالتالي الخطوة الثانية من الطريقة . وإذا لم يوجد حل تكلفة صفرية يمكن ، فإن الأصغار في مصفوفة التكلفة الحالية لا تكون موزعة جيداً .

والخطوة الثالثة هي طريقة لإعادة توزيع ، ربما ، إدخال أصغار إضافية . والعمليات المحتوية على c . الأصغر (موجب) تكلفة وغير المخطأ بخطوط في المصفوفة الحالية . نحل المصفوفة الحالية بمصفوفة لاسلبية جديدة ، مثل : (١) العنصر c نفسه يستبدل بصفر ، (٢) تبقى الأصغار القديمة المغطاة بخط مفرد ، (٣) تستبدل باقي الأصغار القديمة بـ c . ولما كانت هذه العمليات مكافئة لطرح $c/2$ من كل صف وكل عمود غير مغطى ، وإضافة $c/2$ لكل صف مغطى ، وعمود مغطى . فإن المسألة ٨ - ١٤ تضمن مرة أخرى أن حل التعيين الأمثل لا يتغير .

٩ - ٦ تقدم شركة الخطوط الجوية الأملية سكانادو تخفيضاً بسعر يسمح للشخص تغطية كل الرحلة . والتذكرة الصالحة لأسبوعين من تاريخ الشراء لها القيود التالية : لا يسمح بإعادة زيارة أى مدينة على الرحلة ما عدا مدينة البداية . والتي يمكن أن تكون الأخيرة في الرحلة . ويرغب أحد السائحين الأجانب في المدينة 1 (العاصمة) في رؤية مدن أخرى بالمحافظات 2 ، 3 ، 4 قبل العودة إلى العاصمة ، وقرر أن يسافر على الخطوط الجوية . وبين الجدول المبسط مواعيد الطيران بين المدن (بالدقيقة) ، حيث تدل النقاط على أنه لا توجد خدمة بين المواقع المناظرة . حدد خط الرحلة الذي يقلل من زمن الرحلة إلى الحد الأدنى .

المدن	1	2	3	4
1	...	65	53	37
2	65	...	95	...
3	53	95	...	81
4	37	...	81	...

	1	2	3	4
1	10 000	65	53	37°
2	65	10 000	95°	10 000
3	53	95°	10 000	81
4	37°	10 000	81	10 000

جدول A 6

نبدأ بإحلال كل مدخل متقط في جدول التوقيتات برقم كبير جداً لهذه الوصلات في خط رحلة أمثل . والنتيجة في الجدول 6 A . وبطبيق الطريقة الجبرية على هذا الجدول ، نحصل على (من التطبيق الثاني للخطوة 2) ، التخصيص الموضح بالعناصر ذات النجوم ، وهي 3 → 2 ، 2 → 3 ، 4 → 1 ، 1 → 4 . وهذا ليس خط رحلة صالح ، حيث تعيد السائق إلى المدينة 1 مباشرة بعد أول توقف في المدينة 4 .

	1	2	3	4
1	10 000	65°	53	10 000
2	■	10 000	95°	■
3	53	95	10 000	81°
4	37°	10 000	81	10 000

جدول ■ ■

	1	2	3	4
1	10 000	10 000	10 000	37°
2	65°	10 000	■	10 ■
3	53	95°	10 000	10 000
4	10 000	10 000	81°	10 000

جدول C 6

نحدث تقريباً من العنصر ذي النجمة 37 = c_{14} بالجدول 6 A . يتأثر التفريع الأول بإحلال c_{14} بعدد كبير كما في الجدول 6 ■ . ويتأثر التفريع الثاني بإحلال c_{41} مقلوب العنصر كما في كل العناصر ■ في الصف الرابع أو العمود الأول ، ماعدا c_{14} نفسه بعدد كبير . ويتم هذا في الجدول 6 C .

بتطبيق الطريقة الجبرية على كل من مصفوفتي التكلفة الجديديتين ، منفصلتين ، نحصل على الرحلة الصالحة لكل من : 1 → 4 ، 4 → 3 ، 3 → 2 ، 2 → 1 ، و 1 → 2 ، 2 → 3 ، 3 → 4 ، بتكلفة 278 دقيقة للجدول 6 C ، وكلا الحلين أمثل . وفي الحقيقة .. حيثما تتشابه مصفوفة التكلفة ، تبقى الدائرة المثل كحل أمثل ، إذا وصفت بالاتجاه العكسي .

٧ - ٩

صمم طريقة قريبة من المثالية لمشكلة البحار المسافر .

نصمم طريقة أقرب جار . على أساس مبدأ اختيار أرخص وصلة متبقية على التوالي ، بحيث لا يكمل إدخالها دائرة كاملة مباشرة .

الخطوة 1 : نخصص أصغر عنصر في مصفوفة التكلفة ، (إلغ الروابط اختيارياً) حدها بحلقة ■ وحدد الوصلة المرتبطة بها في خط الرحلة .

الخطوة 2 : إذا كان العنصر الجديد داخل الحلقة هو c_{pq} ، استبدل كل العناصر في الصف رقم p ، وكل العناصر في العمود رقم q ، وكذلك مقلوب العنصر c_{qp} بأرقام كبيرة .

الخطوة 3 : نخصص أصغر عنصر خارج الحلقة في مصفوفة التكلفة الأخيرة . أوصلها مؤقتاً بخط الرحلة (غير الكامل) ، فإذا كانت الرحلة الناتجة غير ممكنة ، حدد التكلفة بحلقة ، واذهب إلى الخطوة 5 .

- الخطوة 4 : إذا كانت الرحلة الناتجة غير ممكنة ، إلغِ الوصلة الأخيرة من خط الرحلة ، واستبدل تكلفتها المناظرة برقم كبير . اذهب إلى الخطوة 3 .
- الخطوة 5 : حدد ما إذا كانت الرحلة كاملة ، فإذا كانت كذلك اقبلها كحل أقرب إلى الأمثل . وإذا لم تكن كذلك ، اذهب إلى الخطوة 2 .

تؤكد الخطوة 2 أن أى موقع ، إذا ترك ، فإنه لن يترك مرة أخرى « وأن أى موقع إذا دُخِل لن يُدخِل مرة أخرى . وبالتالي خط الرحلة المؤقت في الخطوة 3 يكون ممكناً ، إلا إذا احتوى على حلقات أقل من عدد n من الوصلات .

٩ - ٨ : استخدم طريقة أقرب جار (المسألة ٩ - ٧) لإيجاد خط رحلة للبحار المسافر « قريب إلى الأمثل » ، إذا كانت مصفوفة التكلفة معطاة بالجدول

	1	2	3	4	5
1	...	35	■	105	165
2	35	...	45	20	80
■	■	45	...	30	75
4	105	20	30	...	60
5	165	80	75	60	...

جدول A ■

	1	2	3	4	5
1	1000	35	80	105	165
2	35	1000	45	20	80
3	80	45	1000	30	75
4	105	20	30	1000	60
5	165	80	75	60	1000

جدول ■ ■

نبدأ أولاً باستبدال المدخلات المتقطعة في مصفوفة التكلفة بأرقام كبيرة (1000) لنحصل على الجدول B 8 . وأصغر مدخل في الجدول هو إما c_{24} أو c_{42} . نختار (اختيارياً) c_{24} . ثم نضعها داخل دائرة ، فنحصل على أننا قبلنا الوصلة $2 \rightarrow 4$ كجزء من خط الرحلة النهائي . نستبدل بعد ذلك كل العناصر الأخرى في الصف الثاني ، وكل العناصر الأخرى في العمود الرابع « وكذلك مقلوب العنصر c_{42} بـ 1000 . وتكون النتيجة كما في الجدول C 8 .

يكون أصغر عنصر خارج حلقة في الجدول C 8 هو $c_{43} = 30$. ويتوصل به بالوصلة $4 \rightarrow 3$ بخط الرحلة الحالي غير الكامل ، نحصل على خط الرحلة (ما زال غير كامل) $2 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ وهو ليس ممكناً . وبالتالي نضع c_{43} داخل حلقة « ونستبدل كل العناصر في الصف الرابع ، وكل العناصر في العمود الثالث في الجدول C 8 ، وكذلك مقلوب العنصر c_{34} بـ 1000 . وتكون النتيجة في الجدول D 8 .

	1	2	3	4	5
1	1000	35	80	1000	165
2	1000	1000	1000	(20)	1000
3	80	45	1000	1000	75
4	105	1000	30	1000	60
5	165	80	75	1000	1000

جدول C 8 ■

	1	2	3	4	5
1	1000	35	1000	1000	165
2	1000	1000	1000	(20)	1000
3	80	45	1000	1000	75
4	1000	1000	(30)	1000	1000
5	165	80	1000	1000	1000

جدول ■ ■

أصغر عنصر خارج حلقة في الجدول D 8 هو $c_{12} = 35$. يتوصل بالوصلة $1 \rightarrow 2$ بخط الرحلة غير الكامل « نوجد خط الرحلة $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ وهو ليس ممكناً . وبالتالي نضع c_{12} داخل حلقة ، ونستبدل كل العناصر الأخرى في الصف الأول وكل العناصر الأخرى في العمود الثاني للجدول D 8 ، وكذلك مقلوب العنصر c_{21} بـ 1000 . تكون النتيجة كما في الجدول E 8 .

باستمرارية الطريقة ، نجد على التوالى الجداول 8 ، G . وخط الرحلة الموضح بالعناصر داخل الحلقات فى الجدول G — بالتحديد 5 → 1 ، 3 → 5 ، 4 → 3 ، 2 → 4 ، 1 → 2 يكون كاملاً ، لذلك فيكون حلاً أقرب إلى الأمثل . تكلفته الكلية

$$z = 35 + 20 + 75 + 30 + 165 = 325$$

انظر المسألة ٩ — ١٧ أيضاً .

	1	2	3	4	5
1	1000	(35)	1000	1000	1000
2	1000	1000	1000	(20)	1000
3	80	1000	1000	1000	75
4	1000	1000	(30)	1000	1000
5	165	1000	1000	1000	1000

جدول F ■

جدول ■

	1	2	3	4	5
1	1000	(35)	1000	1000	1000
2	1000	1000	1000	(20)	1000
3	1000	1000	1000	1000	(75)
4	1000	1000	(30)	1000	1000
5	(165)	1000	1000	1000	1000

جدول G ■

٩ - ٩ طبق طريقة أقرب جار على المسألة ٩ - ٦

أصبح مدخل فى الجدول 6 A ، والذي يمثل مصفوفة التكلفة الأولية للمسألة هو إما c_{14} ، أو c_{41} . ونحدد c_{14} اختيارياً داخل حلقة ، ونستبدل كل العناصر الأخرى فى الصف الأول ، كل العناصر الأخرى فى العمود الرابع ، c_{41} بعدد كبير . وتكون النتيجة الجدول 9 A .

	1	2	3	4
1	10 000	10 000	10 000	(37)
2	65	10 000	95	10 000
3	53	95	10 000	10 000
4	10 000	10 000	81	10 000

جدول 9 A ■

	1	2	3	4
1	10 000	10 000	10 000	(37)
2	10 000	10 000	95	10 000
3	(53)	10 000	10 000	10 000
4	10 000	10 000	81	10 000

جدول 9 ■

بتطبيق طريقة أقرب جار على الجدول 9 A نحصل على الجدول 9 B بخط الرحلة المكمل جزئياً 1 → 4 ، 3 → 1 . وأصغر مدخل فى الجدول 9 B هو $c_{43} = 81$. بتوصيل الوصلة 4 → 3 لخط الرحلة الحالى تؤول إلى 1 → 4 ، 3 → 1 ، 4 → 3 ، وهو ليس ممكناً ، حيث إن هذه الدائرة تحذف المدينة 2 ، وبالتالي لا نقبل 4 → 3 كجزء من خط الرحلة النهائى ، ونستبدل تكلفتها c_{43} بعدد كبير . وتكون النتيجة الجدول 9 C .

	1	2	3	4
1	10 000	10 000	10 000	(37)
2	10 000	10 000	10 000	10 000
3	(53)	10 000	10 000	10 000
4	10 000	10 000	10 000	10 000

جدول C ■

	1	2	3	4
1	10 000	10 000	10 000	(37)
2	10 000	10 000	(95)	10 000
3	(53)	10 000	10 000	10 000
4	10 000	(10 000)	10 000	10 000

جدول D 9

باستمرارية الطريقة « نحصل على الجدول 9 D بعد محاولتين . ويكون الحل الأقرب إلى الأمثل بعناصر التكلفة داخل الحلقات هو $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ عند $z = 37 + 10\,000 + 95 + 53 = 10\,185$ وهذه القيمة للبالغة المدفوعة عالية جداً . في هذه الحالة فإن الحل الأقرب إلى الأمثل يكون فعلياً بعيداً عن الأمثل .

مسائل مكملية

Supplementary Problems

٩ - ١٠ تلقى صاحب مصنع طلباً من مدينة كبيرة بستة أنوبيسات ذات الدورين « على أن يقوم بتسليم اثنين في كل مرة خلال الثلاثة أشهر التالية . يوضح الجدول ٩ - ٢ بيانات الإنتاج بالمصنع

الشهر			
1	2	3	
1	2	3	الطاقة الإنتاجية العادية بالوحدة
2	2	2	الطاقة الإنتاجية الإضافية بالوحدة
35	43	40	تكلفة الإنتاج العادية ١٠٠٠ دولار للوحدة
39	47	45	تكلفة الإنتاج الإضافية ١٠٠٠ دولار للوحدة

جدول ٩ - ٢

يمكن تسليم الأنوبيسات للمدينة في نهاية نفس شهر التجميع ، أو مخزون لدى الصانع « بتكلفة ٣٠٠٠ دولار في الشهر لكل أنوبيس لتقلها خلال الشهر التالي . لا يوجد مخزون حال لدى الصانع من هذه الأنوبيسات ، ولا يرغب في وجود مخزون بعد استكمال هذا العقد . حدد جدول الإنتاج الذي يواجه احتياج المدينة بأقل تكلفة للصانع .

٩ - ١١ تقدر إحدى شركات الأدوية الاحتياج (بالمليون جرعة) من أحد الأمصال كما يلي : أكتوبر 7.1 ، نوفمبر 13.2 ، ديسمبر 12.8 ، يناير 7.7 ، وفبراير 2.1 . ويوجد احتياج طفيف من المصل في الأشهر الأخرى . وسياسة الشركة للإمداد بهذه

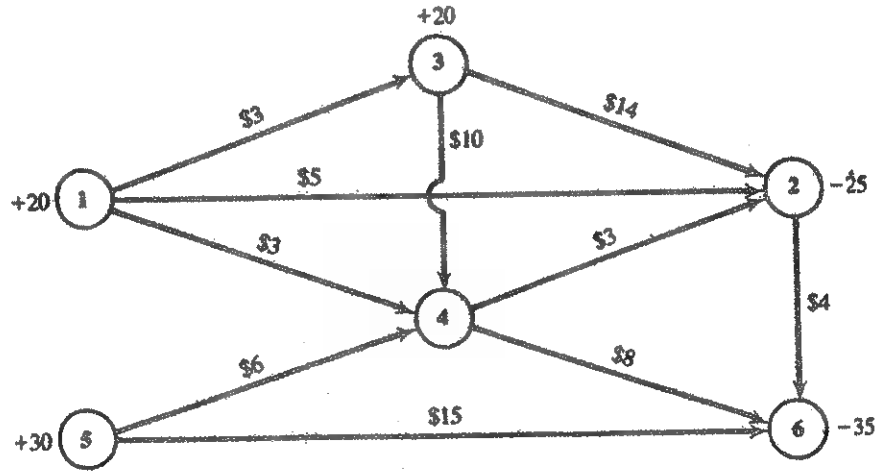
الاحتياجات هي امتلاك مليون جرعة بالمخزن في نهاية شهر فبراير . يأخذ المصل أربعة أسابيع للإنتاج ، لذلك لا توجد أى كمية جاهزة للنقل خلال شهر الإنتاج . وعندما يكون المصل جاهزاً ، مع ذلك ، يتقل فوراً إلى المستهلكين ، أو يخزن بتكلفة ١٠ سنت لكل جرعة لكل شهر . وجرى العادة أن تتج الشركة المصل في المدة بين أغسطس وديسمبر . ويعلم أى مصل متبق من السنة السابقة في ١ سبتمبر .

وتقدر الطاقات الإنتاجية للشركة (بالمليون جرعة) = وتكلفة الإنتاج المتوقعة (سنت لكل جرعة) لكل شهر من دورة الإنتاج المقبلة كما يلى :

	ديسمبر	نوفمبر	أكتوبر	سبتمبر	أغسطس
الطاقة	5.5	8.1	9.5	11.0	12.5
التكلفة	48	52	75	68	63

حدد جدول الإنتاج الذى يفى بكل الاحتياجات بأقل تكلفة كلية

٩ - ١٢ حدد جدول النقل بحد أدنى للتكلفة لمسألة النقل بالشحن الموضحة في الشكل ٩ - ٣ .



شكل ٩ - ٣

٩ - ١٣ عند أحد مصانع السيارات أوامر توريد من الموقع ٥ ، ٦ ، ٧ بعدد ٦٠ ، ٨٠ وحدة على التوالي من موديل معين . تتكون عملية الإنتاج من صنع الجسم إما في الموقع ١ ، أو ٢ ، وينقل الجسم إلى أحد المواقع ٣ أو ٤ . حيث يجمع مع بقية السيارة . ثم تنقل الوحدة إلى المستهلك المنتظر . تكلفة الإنتاج للجسم في الموقع الأول هي 533 دولار ، و 550 دولار بالموقع الثانى . وتكلفة التجميع في المواقع ٣ ، ٤ هي : 2256 دولار ، و 2239 دولار على التوالي . وتكلفة النقل (بالدولار) بين المواقع كما يلى .

الموقع	3	4	الموقع	5	6	7
1	45	59	3	72	65	79
2	65	52	4	81	74	63

الطاقة الإنتاجية في المواقع ، 2 هي : 150 ، 170 جسم على التوالى . وتستطيع المواقع ، ، تجمع كل الأجسام المدفوعة إليها .
حدد جدول الإنتاج والنقل اللذان يفيا بالاحتياجات بأقل تكلفة . (نقطة مساعدة ، تعامل معها كمسألة نقل بالشحن) .

٩ - ١٤ عند إحدى شركات تأجير السيارات نقص (في عدد السيارات) في بعض المدن ، وزيادة في مدن أخرى .
وبالأخص فإن المدن ، 2 عندها زيادة 15 ، 20 سيارة على التوالى ، بينما المدن 3 ، 4 ، 5 تحتاج 7 ، 18 ،
سيارات إضافية على التوالى . يمكن نقل السيارات مباشرة بين المواقع ، أو نقلها من خلال مدن وسيطة ، حيث يكون للشركة
وكلاء . فإذا كانت تكلفة النقل (بالدولار لكل عربة) كما هو معطى بالجدول 14 ، حدد جدول النقل بتكلفة أقل ما يمكن
لشركة تأجير العربات .

المدن	1	2	3	4	5
1	...	7	12	25	65
2	7	...	22	25	75
3	12	22	...	17	28
4	25	25	17	...	15
5	65	75	28	15	...

جدول 14

٩ - ١٥ ترغب إحدى شركات الوجبات السريعة في بناء أربعة مخازن بمنطقة شيكاغو . وقد تعاملت الشركة في الماضي مع ست شركات
إنشاءات مختلفة ، ولما كانت راضية عنهم جميعاً ، فقد دعيتهم لتقديم عروض لكل عملية . وكانت العروض النهائية (بالآلف
دولار) كما هو بالجدول ٩ - ٣

جدول ٩ - ٣

	شركات الإنشاءات					
	1	2	3	4	5	6
المخزن 1	85.3	88	87.5	82.4	89.1	86.7
المخزن 2	78.9	77.4	77.4	76.5	79.3	78.3
المخزن 3	82	81.3	82.4	80.6	83.5	81.7
المخزن 4	84.3	84.6	86.2	83.3	84.4	85.5

ولما كانت شركة الوجبات السريعة ترغب في إنهاء هذه المخازن بأسرع وقت ممكن ، فإنها ستعطي كل شركة عملية واحدة على
الأكثر . ما هو التخصيص الذى ينتج عنه أقل تكلفة كلية لشركة الوجبات السريعة .

١٦ - ٩ حل المسألة ١ - ٢٣

١٧ - ٩ اوجد الحل الصحيح للمسألة ٩ - ٨ « وقارن بخط الرحلة الأقرب إلى الأمثل في نفس المسألة .

١٨ - ٩ يبين الجدول التالي مصفوفة التكلفة (غير المتماثلة) للسفر بين عدة مواقع . حدد خط رحلة للبحار المسافر بأقل تكلفة .

المدن	1	2	3	4	5
1	...	1	8	3	4
2	1	...	8	2	3
3	1	3	...	5	1
4	2	5	6	...	5
5	5	3	7	6	...

١٩ - ٩ استخدم طريقة أقرب جار لإيجاد حل أقرب إلى الأمثل للمسألة ٩ - ١٨

٢٠ - ٩ بين أن طريقة التفرع لمسألة البحار المسافر توجد مسألتين جديدتين « في أحدهما الوصلة $p \rightarrow q$ يجب أن تؤخذ ، وفي الأخرى الوصلة $p \rightarrow q$ يجب ألا تؤخذ .

٢١ - ٩ بين بأحد الأمثلة أن خط الرحلة الأمثل لمسألة البحار المسافر لا يبقى أمثل ، بإهمال شرط ، أن كل موقع يزور مرة واحدة .

الفصل العاشر

البرمجة غير الخطية : أمثلة المتغير المفرد

Nonlinear Programming: Single-Variable Optimization

المشكلة THE PROBLEM

البرنامج غير الخطي ، غير المقيد ، للمتغير المفرد يأخذ الصيغة

$$z = f(x) : \text{أمثلة : } (1-10)$$

حيث إن $f(x)$ تكون دالة (غير خطية) في المتغير المفرد x ، ويكون البحث عن الأمثلة (تعظيم أو تصغير) في الفترة غير المحددة $(-\infty, \infty)$. وإذا كان البحث مقيداً في فترة محددة أقل $[a, b]$ ، فإن المسألة تصبح

$$z = f(x) : \text{أمثلة : } (2-10)$$

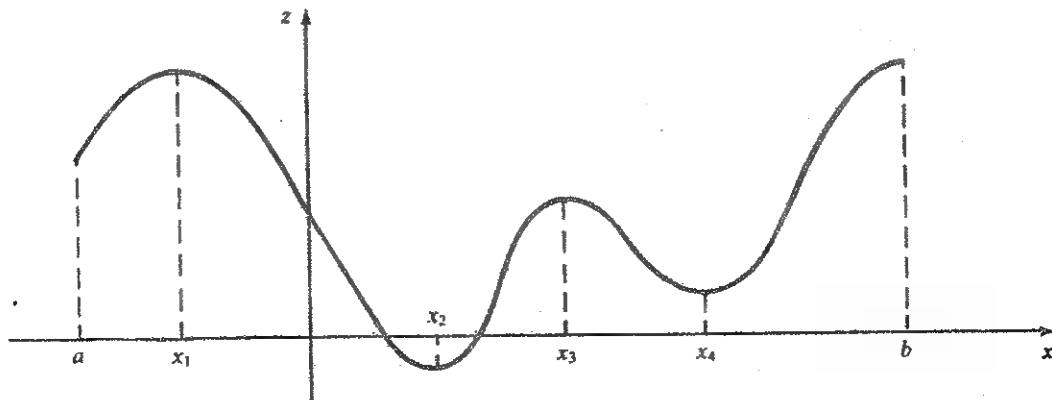
$$a \leq x \leq b : \text{علماً بأن :}$$

الذي يعتبر برنامجاً مقيداً لمتغير واحد .

LOCAL AND GLOBAL OPTIMA الأمثلة المحلية والشاملة

للدالة الهدفية $f(x)$ حد أدنى محلي (أو نسبي) عند x_0 إذا وجدت فترة (صغيرة) ذات مركز عند x_0 ، بحيث إن $f(x) \geq f(x_0)$ لكل قيم x في هذه الفترة التي تحدد فيها الدالة . إذا كانت $f(x) \geq f(x_0)$ لكل قيم x التي تُحدد فيها الدالة ، فيكون الحد الأدنى عند x_0 (بجانب كونه محلياً) حداً أدنى شاملاً (أو مطلقاً) . تعرف الحدود الأعلى المحلية والشاملة بالتماثل بمعرفة المتباينات المعكوسة .

مثال ١-١٠ : الدالة المرسومة في الشكل ١-١٠ تحدد على $[a, b]$ فقط . ولها حد أدنى نسبي عند x_0 ، وحد أعلى x_1 ، وحد أدنى شامل عند x_2 ، وحد أعلى شامل عند x_3 ، وحد أدنى شامل عند x_4 ، وحد أعلى شامل عند x_5 .



شكل ١-١٠

يبحث البرنامج (١٠ - ١) عن أمثلة شاملة وكذلك البرنامج (١٠ - ٢) أيضاً إلى الحد الذي يبحث فيه عن أفضل أمثلة محلية في الفترة $[a, b]$. ومن الممكن أن تفرض الدالة الهدفية قيماً أفضل خارج $[a, b]$. ولكن هذا خارج الاهتمام .

النتائج من التفاضل والتكامل RESULTS FROM CALCULUS

النظرية ١٠ - ١ : إذا كانت $f(x)$ مستمرة في الفترة المغلقة والمحددة $[a, b]$ ، فإن $f(x)$ يكون لها أمثلة شاملة (كلاً من التعظيم والتصغير) على هذه الفترة .

النظرية ١٠ - ٢ : إذا كانت $f(x)$ أمثلة محلية عند x_0 ، إذا كانت $f(x)$ قابلة للتفاضل في جزء الفترة ذات المركز عند x_0 فإن $f'(x_0) = 0$.

النظرية ١٠ - ٣ : إذا كانت $f(x)$ يمكن تفاضلها مرتين في جزء الفترة ذات المركز عند x_0 ، وإذا كانت $f'(x_0) = 0$ ، فإن $f''(x_0) > 0$ فيكون لـ $f(x)$ حداً أدنى محلي عند x_0 . وإذا كان بدلاً من $f'(x_0) = 0$ ، $f''(x_0) < 0$ فإن $f(x)$ يكون لها حداً أعلى محلي عند x_0 .

ويتبع من النظريتين الأولىين أنه إذا كانت $f(x)$ متصلة في الفترة $[a, b]$ ، فإن الأمثلة المحلية والشاملة للبرنامج (١٠ - ٢) تحدث بين النقط التي لا تتواجد فيها $f'(x)$ ، أو بين النقط حيث $f'(x) = 0$ (وغالباً ما تسمى بالنقط الساكنة أو الحرجة) ، أو بين النقط النهائية $x = a$ و $x = b$. (انظر المسائل ١٠ - ١ ، حتى ١٠ - ٣) .

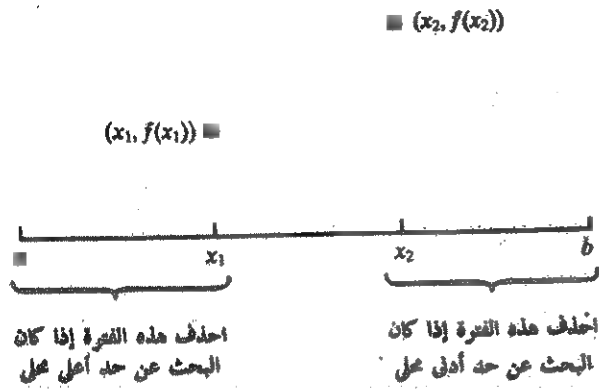
وحيث إن البرنامج (١٠ - ١) غير مقيد بفترة مغلقة ومحددة ، فإنه لا توجد نقط نهائية للأخذ في الاعتبار . وبدلاً من ذلك ، فإن قيم الدالة الهدفية عند النقط الساكنة وعند النقط التي لا توجد فيها $f'(x)$ تقارن بالقيم النهائية لـ $f(x)$ عندما $x \rightarrow \pm\infty$. وقد يحدث ألا توجد أي نهاية منهما (اعتبر $f(x) = \sin x$) ، ولكن إذا وجدت أي من النهايتين $\pm\infty$ « كنهاية » - وأدت إلى أفضل قيمة لـ $f(x)$ (الأكبر لبرنامج تعظيم ، والأصغر لبرنامج تصغير) ، فإن الأمثلة الشاملة لـ $f(x)$ لا توجد . وإذا حدثت أفضل قيمة عند إحدى النقط المحددة ، فإن أفضل قيمة هذه تكون أمثلة شاملة . (انظر المسألة ١٠ - ٤) .

أساليب البحث التتابعى (التسلسلى) SEQUENTIAL-SEARCH TECHNIQUES

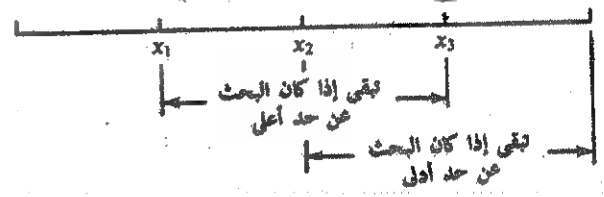
من الناحية العملية .. فإن تحديد الأمثلة بالتفاضل والتكامل يكون غير مثير : إما لأن الدالة الهدفية تكون غير معروفة حسابياً ، فيكون التفاضل مستحيلاً ، أو أن النقط الساكنة لا يمكن الحصول عليها جبرياً . (انظر المسألة ١٠ - ١) . في هذه الحالات تستخدم الطرق العددية لتقريب مكان الأمثلة المحلية في حدود تفاوتات مقبولة .

تبدأ أساليب البحث التتابعى بفترة محددة يفترض أن تكون فيها الدالة الهدفية ذات نموذج أحادى ، بمعنى أن هذه الفترة يفترض أن تحتوي على نقطة واحدة فقط عندها $f(x)$ يكون لها حد أدنى ، أو حد أعلى محلي ، ثم تقلل هذه الأساليب بانتظام الفترة حول القيمة المثلى المحلية ، حتى تضيق القيمة المثلى داخل حدود مقبولة ؛ وهذا التقليل يتأثر بالتقييم المتتابع للدالة الهدفية عند نقط مختارة ، ثم استخدام خاصية النموذج الأحادى لحذف أجزاء من الفترة الحالية .

مثال ١٠ - ٢ : يعرض الشكل ١٠ - ٢ قيم الدالة المدفعة عند النقط $x_1 = x_2$. إذا عرف حد أدنى على ليكون الطرف الوحيد في الفترة $[a, b]$. فإن هذا الحد الأدنى يجب أن يكون إلى اليسار من x_2 ؛ لذلك فإن $f(x)$ تبدأ في الزيادة حول هذه النقطة ، وبخاصية النموذج الأحادي ، يجب أن تستمر في الزيادة لجهة اليمين منها . ومن ثم جزء الفترة $[x_2, b]$ يمكن حذفه . وإذا كان الحد الأعلى المحلي هو الطرف الوحيد في الفترة $[a, b]$ ، فإنه يجب أن يكون على اليمين من x_1 ، ويمكن حذف جزء الفترة $[a, x_1]$.



شكل ١٠ - ٢



شكل ١٠ - ٣

يمكن اعتبار البحوث التابعة النوعية في الأجزاء الثلاثة الآتية :

THREE-POINT INTERVAL SEARCH بحث فترة الثلاث نقط

تقسم الفترة تحت الاعتبار إلى أربع ، وتقيم الدالة المدفعة عند الثلاث نقط الداخلية على مسافات متساوية ، وتحدد النقطة الداخلية التي تؤدي إلى أفضل قيمة للهدف (في حالة الاشتراك اختر إحدى النقط) ، ويحل جزء الفترة التي مركزها عند هذه النقطة ، والمكونة من ربعين من الفترة الحالية يحل محل الفترة الحالية . وتوجد ١٠ أنماط ممكنة من العينات بما فيها المشتركة ، يمثل أحدها في الشكل ١٠ - ٣ .

انظر المسائل ١٠ - ٦ ، ١٠ - ٧ .

وبحث فترة الثلاث نقط هو أكفأ طريقة بحث على مسافات متساوية بالنسبة للوصول إلى تفاوت عدد منبثقاً بأقل عدد من تقييمات الدوال . وهو أيضاً أحد أسهل البحوث التابعة لاستخدام الحاسبات .

FIBONACCI SEARCH بحث فيبوناكس

مثل تتابع فيبوناكس $\{F_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots\}$ أساس أحد أكفأ أساليب البحث التابهي . ويتم الحصول على كل عدد في التابع بإضافة العددين السابقين ، باستثناء العددين الأولين ، F_0 ، F_1 ، الذين يكونان ١ .

ينشأ بحث فيبوناكس بتحديد أصغر عدد فيبوناكس يحقق $F_N \geq b - a$ ، حيث إن ϵ هي تفاوت عدد مسبقاً ، و $[a, b]$ الفترة الأصلية . كون $\epsilon' = (b - a)/F_N$. تقع النقطتان الأولتان في البحث إلى الداخل عدد F_{N-1} وحدة من نقط النهاية $[a, b]$ ، حيث إن F_{N-1} هو عدد فيبوناكس الذي يسبق F_N . ويمكن أخذ النقط الأخرى في الاعتبار واحدة بواحدة . وتوضع إلى الداخل عدد F_j وحدة من أجدد نقطة نهاية للفترة الحالية . (انظر المسألة ١٠ - ٨) . لاحظ أنه بطريقة فيبوناكس يمكن مقدماً تحديد عدد تقييمات الدوال المطلوبه لتحقيق دقة معينة ، وأكثر من ذلك ، هذا العدد لا يعتمد على الدالة الخاصة الأحادية النموذج .

بحث المتوسط الذهبي GOLDEN-MEAN SEARCH

يُبنى بحث فيوناكس القريب من الكفاءة على $(\sqrt{5}-1)/2 = 0.6180 \dots$ الذي يُعرف ، بالمتوسط الذهبي . وتقع النقطتان الأولتان للبحث على مسافة $(0.6180)(b-a)$ وحدة إلى الداخل من النقط النهائية للفترة الأولية $[a, b]$. وتتخذ النقط التالية التالية في الاعتبار ، واحدة بعد الأخرى ، وتوضع إلى الداخل $0.6180L$ وحدة من أجل نقطة نهائية للفترة الحالية ، حيث L تدل على طول هذه الفترة . انظر المسألة (٩ - ١٠) .

الدوال المقعرة CONVEX FUNCTIONS

تضمن طرق البحث تقريب القيم المثل الشاملة في فترة البحث فقط ، عندما تكون الدالة الهدفية أحادية النموذج . وعملياً .. لا نعرف ما إذا كانت الدالة الهدفية أحادية النموذج في فترة محددة . وعند تطبيق طريقة البحث في هذه الحالة ، فإنه ليس من المؤكد أنها ستكشف القيمة المثل الشاملة المطلوبة . (انظر المسألة ١٠ - ١١) . ويستثنى من ذلك البرامج التي تحتوي على دوال هدفية محدبة أو مقعرة .

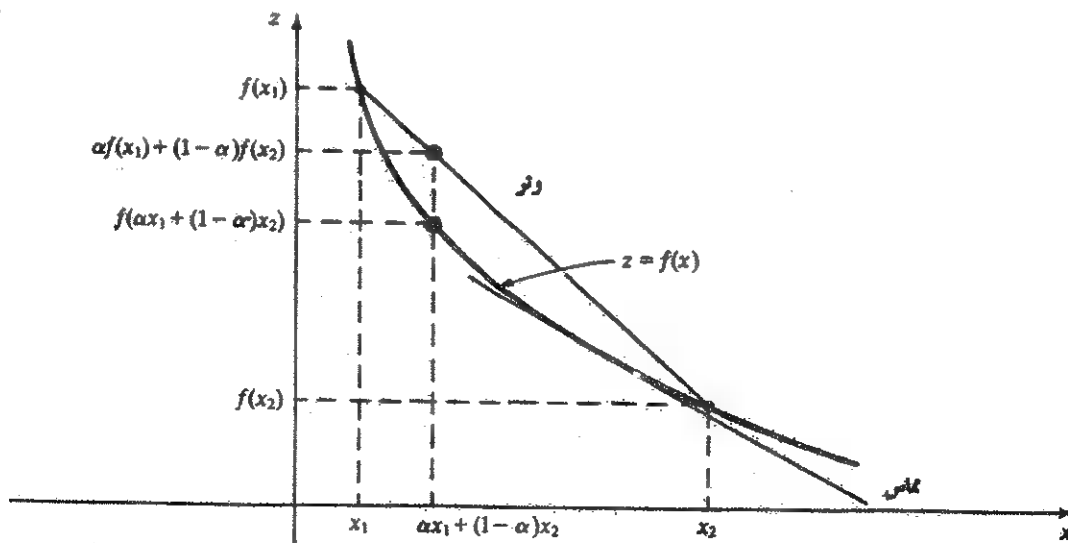
تكون الدالة $f(x)$ مقعرة في الفترة D (محدبة أو غير محدبة) ، إذا كانت النقطتان x_1 ، x_2 في D ولكل $0 \leq \alpha \leq 1$

$$(10-3) \quad f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

إذا كانت (١٠ - ٣) تتحقق بمعكوس المتباينة ، فإن $f(x)$ تكون محدبة ، لذلك فالقيمة السالبة للدالة المقعرة تكون محدبة ، والعكس صحيح . يبين شكل ١٠ - رسم الدالة المقعرة ، وتحديد الخصائص الهندسية للرسم ، فإن المنحنى يقع على أو فوق أحد ممساته . والدوال المحدبة أو المقعرة تكون أحادية النموذج .

نظرية ١٠ - ٤ : إذا كانت $f(x)$ تنافضل مرتين في D ، فإن $f(x)$ تكون مقعرة في D إذا كانت فقط $f''(x) \geq 0$ لكل قيم x في D ، وتكون محدبة إذا كانت فقط $f''(x) \leq 0$ لكل قيم x في D .

نظرية ١٠ - ٥ : إذا كانت $f(x)$ مقعرة في D ، فإن أي حد أدنى محلي في D يكون حداً أدنى شاملاً في D . وإذا كانت $f(x)$ محدبة في D ، فإن أي حد أدنى محلي في D يكون حداً أعلى في D .



شكل ١٠ - ٤

إذا كانت (١٠ - ٣) تتحقق بمشايمة محددة ماعدا عند $\alpha = 0$ ، $\alpha = 1$ ، فتكون الدالة مقعرة بالتحديد . مثل هذه الدالة تكون لها مشتقة ثانية موجبة محددة . وأي حد أدنى محلي (وبالتالي شامل) يكون أحادياً . وتتحقق النتائج المناظرة للدوال المحدبة المحددة .

مسائل محلولة

Solved Problems

١٠ - ١ تعظيم $z = x(5\pi - x) \quad [0, 20]$

هنا $f(x) = x(5\pi - x)$ متصلة و $f'(x) = 5\pi - 2x$. وبمعريف المشتقة لأي مكان . يحدث الحد الأعلى الشامل في $[0, 20]$ عند النقطة النهائية $x = 0$ or $x = 20$ أو عند نقطة ساكنة ، حيث $f'(x) = 0$. نجد أن $x = 5\pi/2$ هي النقطة الساكنة الوحيدة في $[0, 20]$. بتقييم الدالة الهدفية عند كل من هذه النقط نحصل على الجدول :

x	0	$5\pi/2$	20
$f(x)$	0	61.69	-85.84

ومنه نستنتج أن $x^* = 5\pi/2$ ، $z^* = 61.69$

١٠ - ٢ تعظيم $z = |x^2 - 8|$ on $[-4, 4]$

هنا

$$f(x) = |x^2 - 8| = \begin{cases} x^2 - 8 & x \leq -\sqrt{8} \\ 8 - x^2 & -\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8} \\ x^2 - 8 & \sqrt{8} \leq x \end{cases}$$

دالة متصلة عند

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < -\sqrt{8} \\ -2x & -\sqrt{8} < x < \sqrt{8} \\ 2x & \sqrt{8} < x \end{cases}$$

لأن توجد المشتقة عند $x = \pm\sqrt{8}$ وتكون صفرية عند $x = 0$ ، وتكون كل الثلاث نقط في $[-4, 4]$. وبتقييم الدالة الهدفية عند كل من هذه النقط . وعند نقطة النهاية $x = \pm 4$ نكون الجدول

x	-4	$-\sqrt{8}$	0	$\sqrt{8}$	4
$f(x)$	8	0	8	0	8

ومنه نستنتج أن الحد الأعلى الشامل في $[-4, 4]$ هو $z^* = 8$. والمفترض أن يكون عند الثلاث نقط $x^* = -4$

و $x^* = 0$

١٠ - ٣ تصغير $z = f(x)$ في $[0, 1]$ ، حيث

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

لاتطبيق النظرية ١٠ - ١ إذا كانت الدالة غير متصلة في الفترة المذكورة « كما في هذه الحالة . وفي الحقيقة لا يوجد أى حد أدنى محلي أو شامل لهذه المسألة ، حيث نفترض الدالة اختيارياً قيماً صغيرة موجبة « وليست قيماً صفرية .

١٠ - ٤ تعظيم $z = xe^{-x^2}$

هنا

$$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

ونعرف لكل قيم « ، ونختفى فقط عند $x = \pm 1/\sqrt{2}$. وحيث إن « غير محددة ، فتكون قيم الدالة الهدفية عند النقطة الساكنة

$$f(\pm 1/\sqrt{2}) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2} = \pm 0.429$$

يجب أن تقارن بالقيم النهائية لـ $f(x)$ مثل $x \rightarrow \pm\infty$ ، التي تكون صفرًا في كلتا الحالتين . وتسجيل هذه النتائج

x	$x \rightarrow -\infty$	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$x \rightarrow \infty$
$f(x)$	0	-0.429	0.429	■

نرى أن الحد الأعلى الشامل يوجد عند $x^* = 1/\sqrt{2}$ ، ويكون $z^* = 0.429$.

١٠ - ٥ تصغير $z = x \sin 4x$ في $[0, 3]$

هنا $f'(x) = \sin 4x + 4x \cos 4x$ حيث نعرف في أى مكان . ومعادلة النقط الساكنة

$$\sin 4x + 4x \cos 4x = 0$$

لا يمكن أن نحل جبرياً ، ولذلك فلا يمكن تعريف النقط الساكنة بدقة في $[0, 3]$. ومع ذلك ، في حانة الدوائر المستقيمة لهذه الدالة ، فإن جزءاً كبيراً يمكن أن تعلمه من الرسم في شكل (١٠ - ٥) . من المشاهد أن النقط الساكنة تتبادر مع الأصغار في $f(x)$ (نظرية رول) والتي تكون أصغراً في $\sin 4x$. الحد الأدنى الشامل لـ $f(x)$ يجب أن يبقى في الفترة الأصغر $[7\pi/8, 3]$ ، بمعنى

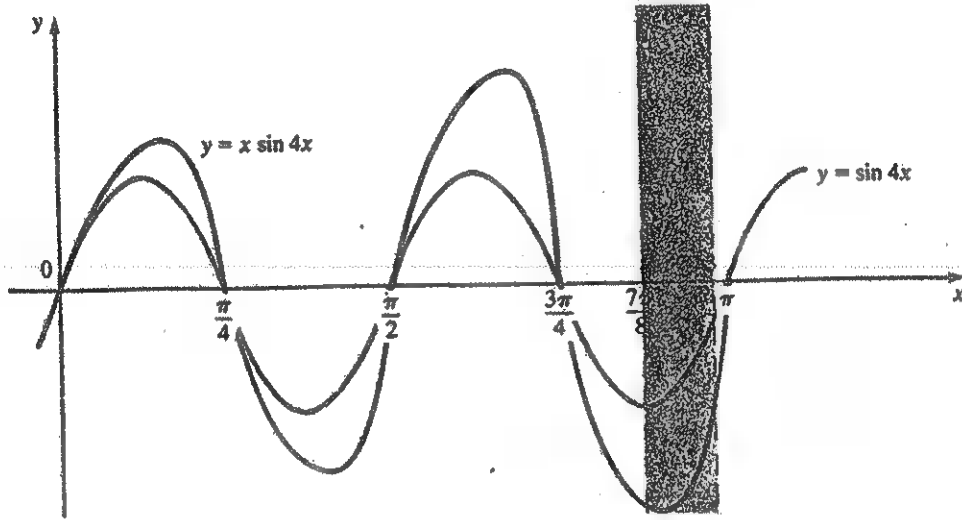
$$2.75 \leq x^* \leq 3$$

لأن هذه هي المنطقة التي تضرب فيها القيم السالبة لـ $\sin 4x$ بأكبر قيمة موجبة لـ x . وبعمل التقدير

$$f(7\pi/8) = \frac{7\pi}{8}(-1) = -2.75$$

$$f(3) = 3 \sin 12 = -1.61$$

نستنتج أن الحد الأدنى الشامل يحدث عند الحد الأدنى المحلي الثاني في $f(x)$ ، وبالتقريب من $x = 7\pi/8$ ، وليس عند النقطة النهائية $x = 3$.



شكل ١٠ - ■

١٠ - ٦ استخدم بحث فترة الثلاث نقاط لتقريب موقع الحد الأدنى الشامل لـ $f(x) = x \sin 4x$ في $[0, 3]$ داخل $\epsilon = 0.01$.
 كنتيجة للتحليل بالرسم في المسألة ١٠ - ■ ، نحدد الانتباه إلى الفترة الأصغر $[7\pi/8, 3]$ ، فيحدث الحد الأدنى الشامل في هذه الفترة الأصغر ، وتكون الدالة هنا أحادية النموذج .

المحاولة الأولى : بقسمة $[7\pi/8, 3]$ إلى أرباع ، نأخذ $x_1 = 2.8117$ ، $x_2 = 2.8744$ ، $x_3 = 2.9372$ كنقاط داخلية ونحسب :

$$f(x_1) = x_1 \sin 4x_1 = 2.8117 \sin 4(2.8117) = -2.7234$$

$$f(x_2) = x_2 \sin 4x_2 = 2.8744 \sin 4(2.8744) = -2.5197$$

$$f(x_3) = x_3 \sin 4x_3 = 2.9372 \sin 4(2.9372) = -2.1426$$

وهنا x_1 هي النقطة الداخلية التي تؤدي إلى أصغر قيمة لـ $f(x)$ ؛ لذلك نأخذ جزء الفترة ذات المركز في x_1 ، وبالتحديد $[7\pi/8, 2.8744]$ ، كفترة جديدة مرغوب فيها .

المحاولة الثانية : بقسمة $[7\pi/8, 2.8744]$ إلى أرباع نحصل على
 كنقاط داخلية لهذه الفترة . لذلك $x_4 = 2.7803$ ، $x_1 = 2.8117$ ، $x_5 = 2.8430$

$$f(x_4) = x_4 \sin 4x_4 = 2.7803 \sin 4(2.7803) = -2.7584$$

$$f(x_1) = -2.7234 \quad (\text{as before})$$

$$f(x_5) = x_5 \sin 4x_5 = 2.8430 \sin 4(2.8430) = -2.6439$$

من هذه النقط الداخلية x_4 تؤدي إلى أصغر قيمة $f(x)$ ، لذلك نأخذ الفئة الأصغر المركزة فيها $[7\pi/8, 2.8117]$ كفترة جديدة .

المحاولة الثالثة : تقسم $[7\pi/8, 2.8117]$ إلى أرباع عند $x_6 = 2.7646$ ، $x_4 = 2.7803$ ، $x_7 = 2.7960$ ثلاث نقط داخلية ، ولذلك

$$f(x_6) = x_6 \sin 4x_6 = 2.7646 \sin 4(2.7646) = -2.7591$$

$$f(x_4) = -2.7584 \quad (\text{as before})$$

$$f(x_7) = x_7 \sin 4x_7 = 2.7960 \sin 4(2.7960) = -2.7465$$

وهنا x_6 هي النقطة الداخلية التي تؤدي إلى أصغر قيمة للدالة الهدفية . فكون الفترة الجديدة المرغوبة هي الموجودة بمركزها ، بالتحديد $[7\pi/8, 2.7803]$

المحاولة الرابعة : تقسم $[7\pi/8, 2.7803]$ إلى أرباع عند $x_8 = 2.7567$ ، $x_6 = 2.7646$ ، $x_9 = 2.7724$ ثلاث نقط داخلية جديدة ، والآن

$$f(x_8) = x_8 \sin 4x_8 = 2.7567 \sin 4(2.7567) = -2.7554$$

$$f(x_6) = -2.7591 \quad (\text{as before})$$

$$f(x_9) = x_9 \sin 4x_9 = 2.7724 \sin 4(2.7724) = -2.7602$$

وحيث إن x_9 هي النقطة الداخلية التي تعطي أصغر قيمة $f(x)$ ، نأخذ الفترة الجزئية ذات المركز عند x_9 ، بالتحديد $[2.7646, 2.7803]$ كفترة جديدة ، ونقطة المنتصف لهذه الفترة ، مع ذلك ، تقع داخل التفاوت المحدد مسبقاً $\epsilon = 0.01$ لكل النقط الأخرى في الفترة ، ولذلك فإننا نقبلها كموضع للحد الأدنى ، أي أن : $x^* = x_9 = 2.7724$ عند $z^* = f(x_9) = -2.7602$

١٠ - ٧ . استخدم بحث فترة الثلاث نقاط لتقريب الحد الأعلى في $f(x) = x(5\pi - x)$ في الفترة $[0, 20]$ داخل $\epsilon = 1$.

حيث $f''(x) = -2 < 0$ في أي مكان ينتج من النظرية ١٠ - ٤ أن $f(x)$ تكون محدبة . وبالتالي أحادية النموذج في $[0, 20]$. لذلك يؤكد بحث فترة الثلاث نقط الاقتراب من الحد الأعلى الشامل .

المحاولة الأولى : بقسمة $[0, 20]$ إلى أرباع نحصل على $x_1 = 5$ ، $x_2 = 10$ ، $x_3 = 15$ ثلاث نقط داخلية . لذلك

$$f(x_1) = x_1(5\pi - x_1) = 5(5\pi - 5) = 53.54$$

$$f(x_2) = x_2(5\pi - x_2) = 10(5\pi - 10) = 57.08$$

$$f(x_3) = x_3(5\pi - x_3) = 15(5\pi - 15) = 10.62$$

حيث x_2 هي النقطة الداخلية التي تعطي أكبر قيمة للدالة الهدفية . نأخذ الفترة $[5, 15]$ التي مركزها عند x_2 كفترة جديدة .

المحاولة الثانية : نقسم [5, 15] إلى أرباع عند $x_2 = 10$ ، $x_3 = 12.5$ ، $x_4 = 7.5$ كنقطة داخلية . لذلك

$$\begin{aligned} f(x_4) &= x_4(5\pi - x_4) = (7.5)(5\pi - 7.5) = 61.56 \\ f(x_2) &= 57.08 \quad (\text{as before}) \\ f(x_3) &= x_3(5\pi - x_3) = (12.5)(5\pi - 12.5) = 40.10 \end{aligned}$$

وحيث x_4 هي النقطة الداخلية المؤدية إلى أكبر قيمة لـ $f(x)$ ، نأخذ الفترة [5, 10] التي مركزها x_4 كفترة جديدة .

المحاولة الثالثة : نقسم [5, 10] إلى أرباع عند $x_6 = 6.25$ ، $x_7 = 8.75$ ، $x_4 = 7.5$ كنقطة داخلية . لذلك

$$\begin{aligned} f(x_6) &= (6.25)(5\pi - 6.25) = 59.11 \\ f(x_4) &= 61.56 \quad (\text{as before}) \\ f(x_7) &= (8.75)(5\pi - 8.75) = 60.88 \end{aligned}$$

حيث تؤدي x_4 إلى أكبر قيمة لـ $f(x)$ ، نأخذ الفترة [6.25, 8.75] ، التي مركزها عند x_4 ، كفترة جديدة .

المحاولة الرابعة : بقسمة [6.25, 8.75] إلى أرباع ، نوجد $x_8 = 6.875$ ، $x_9 = 8.125$ ، $x_4 = 7.5$ كنقطة داخلية جديدة . لذلك

$$\begin{aligned} f(x_8) &= (6.875)(5\pi - 6.875) = 60.73 \\ f(x_4) &= 61.56 \quad (\text{as before}) \\ f(x_9) &= (8.125)(5\pi - 8.125) = 61.61 \end{aligned}$$

والآن x_9 هي النقطة الداخلية التي تعطي أكبر قيمة للدالة الهدفية ، نأخذ الفترة الأصغر عند المركز x_9 ، وبالتحديد [7.5, 8.75] كفترة جديدة للاعتبار ، ومع ذلك تقع نقطة المنتصف لهذه الفترة داخل التفاوت المحدد مسبقاً $\epsilon = 1$ من كل النقط الأخرى في الفترة ، ومن ثم نأخذ

$$x^* = x_9 = 8.125$$

$$z^* = f(x_9) = 61.61 \quad \text{عند}$$

٨ - ١٠ حل المسألة ١٠ - ٧ مرة أخرى باستخدام بحث فيوناكس
النقط الأولية . عدد فيوناكس الأول ، بحيث إن $F_N(1) \geq 20 - 0$ هو $F_7 = 21$ نضع $N = 7$ ،

$$\epsilon' = \frac{b-a}{F_N} = \frac{20-0}{21} = 0.9524$$

موقع النقطتين الأولين في البحث

$$F_0\epsilon' = 13(0.9524) = 12.38 \text{ units}$$

إلى الداخل من كل نقطة نهائية . وبالتالي

$$x_1 = 0 + 12.38 = 12.38 \quad x_2 = 20 - 12.38 = 7.62$$

$$f(x_1) = (12.38)(5\pi - 12.38) = 41.20$$

$$f(x_2) = (7.62)(5\pi - 7.62) = 61.63$$

والتي ترسم في الشكل ١٠ - ٦ (أ) . باستخدام خاصية النموذج الأحادي ، فإننا نستنتج أن الحد الأعلى يحدث إلى اليسار من 12.38 ، ونختصر الفترة إلى $[0, 12.38]$.

المحاولة الأولى : عدد فيبوناكس الأصغر التالي (F_6) كانت آخر قيمة مستخدمة (هو $F_5 = 5$) ؛ وبالتالي توقع النقطة التالية في البحث

$$F_5\epsilon' = 8(0.9524) = 7.619 \text{ وحدة}$$

إلى الداخل من أجدد نقطة نهائية 12.38 لذلك

$$x_3 = 12.38 - 7.619 = 4.761$$

$$f(x_3) = (4.761)(5\pi - 4.761) = 52.12$$

بإضافة هذه النقطة إلى الجزء الموجود في الشكل ١٠ - ٦ (أ) نوجد شكل ١٠ - ٦ (ب) ، ومنه نستنتج أن الحد الأقصى يجب أن يحدث في الفترة الجديدة $[4.761, 12.38]$.

المحاولة الثانية : عدد فيبوناكس الأصغر التالي الآن هو $F_4 = 5$. لذلك

$$x_4 = 4.761 + F_4\epsilon' = 4.761 + 5(0.9524) = 9.523$$

$$f(x_4) = (9.523)(5\pi - 9.523) = 58.90$$

بإضافة هذه النقطة إلى الجزء الموجود في الشكل ١٠ - ٦ (ب) ، نحصل على الشكل ١٠ - ٦ (ج) ، ومنه نستنتج أن الفترة الجديدة هي $[4.761, 9.523]$.

المحاولة الثالثة : عدد فيبوناكس الأصغر التالي هو $F_3 = 3$. ومن ثم

$$x_5 = 9.523 - 3(0.9524) = 6.666$$

$$f(x_5) = (6.666)(5\pi - 6.666) = 60.27$$

بإضافة هذه النقطة إلى الجزء الموجود في الشكل ١٠ - ٦ (ج) نحصل على الشكل ١٠ - ٦ (د) ، ويتبع من خاصية النموذج الأحادي أن الفترة الجديدة هي $[6.666, 9.523]$.

المحاولة الرابعة : عدد فيبوناكس الأصغر التالي الآن هو $F_2 = 2$. ومن ثم

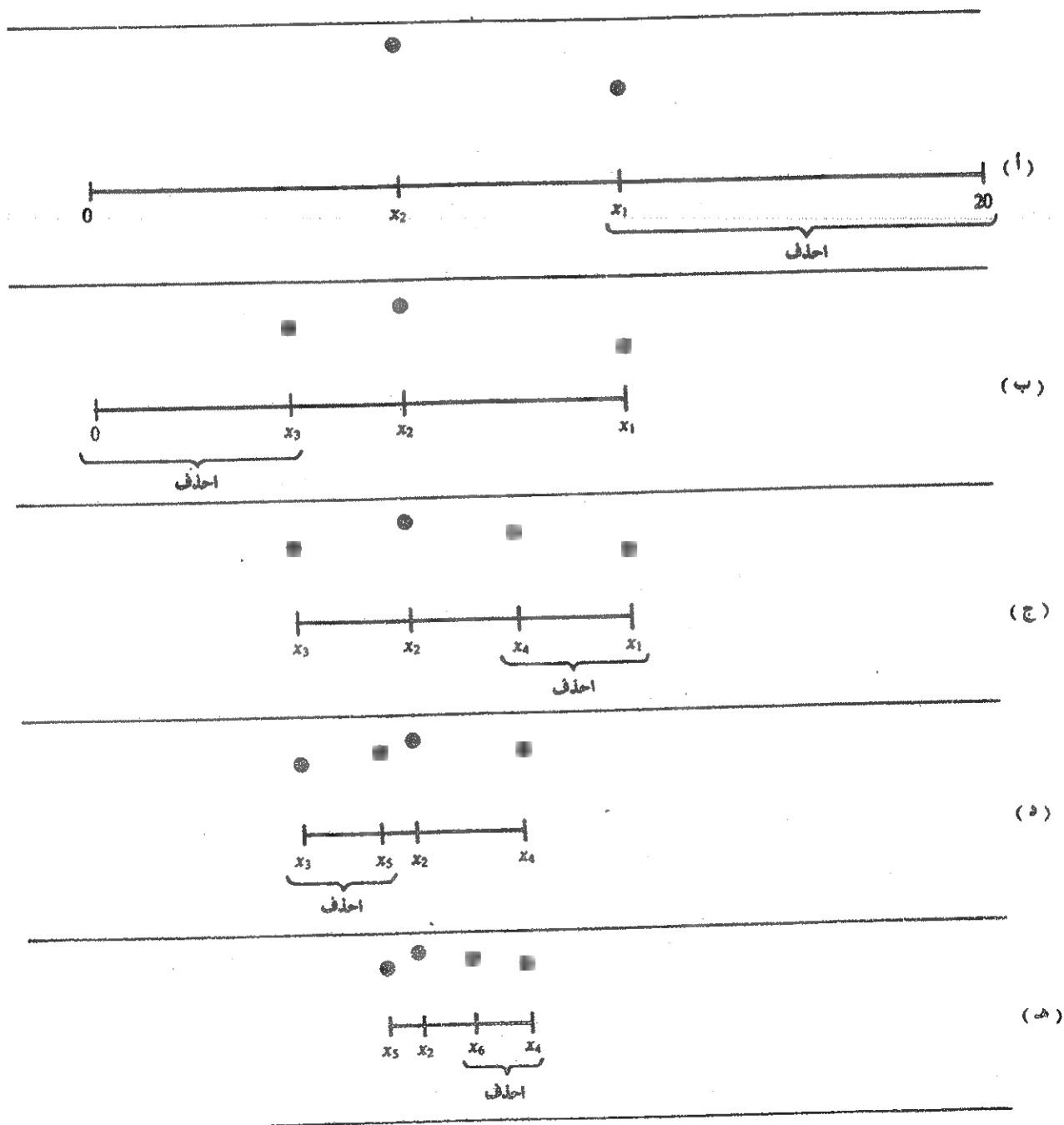
$$x_6 = 6.666 + 2(0.9524) = 8.571$$

$$f(x_6) = (8.571)(5\pi - 8.571) = 61.17$$

بإضافة هذه النقطة إلى الجزء الموجود في الشكل ١٠ - ٦ (د) نحصل على الشكل ١٠ - ٦ (هـ) ،
ومنه نستنتج أن $[6.666, 8.571]$ هي الفترة الجديدة . ومع ذلك منتصف هذه النقطة يقع داخل $\epsilon \approx 1$
(في الحقيقة داخل $\epsilon' = 0.9524$) من كل نقطة أخرى في الفترة . (نظرياً يجب أن تنطبق نقطة
المنتصف مع x_2 والاختلاف البسيط الواضح ينتج من التقريب) ، ولذلك نقبل x_2 كموقع الحد الأقصى .
بمعنى

$$x^* = x_2 = 7.62$$

$$z^* = f(x_2) = 61.63 \text{ عند}$$



شكل ١٠ - ٦

١٠ - ٩ حل المسألة ١٠ - ٧ مرة أخرى باستخدام بحث المتوسط الذهبي .
النقط الأولى . طول الفترة الأولى هو $L_1 = 20$ ، لذلك توقع النقطتين الأوليين في البحث

$$\text{وحدة } (0.6180)(20) = 12.36$$

للدخول من كل نقطة نهائية . لذلك

$$x_1 = 0 + 12.36 = 12.36 \quad x_2 = 20 - 12.36 = 7.64$$

$$f(x_1) = (12.36)(5\pi - 12.36) = 41.38$$

$$f(x_2) = (7.64)(5\pi - 7.64) = 61.64$$

والنقط $(x_1, f(x_1))$ و $(x_2, f(x_2))$ قريبة جداً من النقط المبينة في الشكل ١٠ - ٦ (أ) . ونتج من خاصية النموذج الأحادي أن الحد الأعلى يجب أن يحدث إلى اليسار من 12.36 ، ومن ثم تبقي $[0, 12.36]$ هي الفترة الجديدة .
المحاولة الأولى : الفترة الجديدة طولها $L_2 = 12.36$ ، ولذلك فإن النقطة التالية في البحث تقع $0.6180 L_2$ وحدة إلى الداخل من أجدد نقطة نهائية . لذلك .

$$x_3 = 12.36 - (0.6180)(12.36) = 4.722$$

$$f(x_3) = (4.722)(5\pi - 4.722) = 51.88$$

وبإضافة هذه النقطة الجديدة يستعمل الشكل ١٠ - ٦ (ب) ، ونحصل على $[4.722, 12.36]$ كفترة جديدة .

المحاولة الثانية : $L_3 = 12.36 - 4.722 = 7.638$ لذلك

$$x_4 = 4.722 + (0.6180)(7.638) = 9.442$$

$$f(x_4) = (9.442)(5\pi - 9.442) = 59.16$$

ويصبح الشكل كما في ١٠ - ٦ (ج) ، ومنه نستنتج أن $[4.722, 9.442]$ هي الفترة الجديدة .

المحاولة الثالثة : $L_4 = 9.442 - 4.722 = 4.720$ لذلك

$$x_5 = 9.442 - (0.6180)(4.720) = 6.525$$

$$f(x_5) = (6.525)(5\pi - 6.525) = 59.92$$

ويصبح الشكل هو ١٠ - ٦ (د) ، ومنه نستنتج أن $[6.525, 9.442]$ هي الفترة الجديدة .

المحاولة الرابعة : $L_5 = 9.442 - 6.525 = 2.917$ ، ومن ثم

$$x_6 = 6.525 + (0.6180)(2.917) = 8.328$$

$$f(x_6) = (8.328)(5\pi - 8.328) = 61.46$$

بهذه النقطة الجديدة نصل إلى الشكل ١٠ - ٦ (هـ) ، ونجد أن $[6.525, 8.328]$ هي الفترة الجديدة .

لاحظ أن طول هذه الفترة الجديدة يقل عن $2\epsilon = 2$ ، ولكن النقطة العينة المحتواة x_2 لا تقع داخل ϵ لكل النقط الأخرى في الفترة . لذلك فإن محاولة أخرى تكون مطلوبة .

المحاولة الخامسة : $L_6 = 8.328 - 6.525 = 1.803$. لذلك

$$x_7 = 8.328 - (0.6180)(1.803) = 7.214$$

$$f(x_7) = (7.214)(5\pi - 7.214) = 61.28$$

هذه النقطة الجديدة تحدد $[x_7, x_6] = [7.214, 8.328]$ كفترة جديدة . ومع ذلك فالنقطة الداخلية $x_2 = 7.64$ تكون داخل $\epsilon = 1$ لكل النقط الأخرى في الفترة . لذلك نأخذها كموقع الحد الأقصى ، بمعنى

$$x^* = x_2 = 7.64$$

$$z^* = f(x_2) = 61.64 \quad \text{عند}$$

١٠ - ١٠ : قارن كفاءة طرق البحث الثلاث في تحديد الحد الأقصى $x(5\pi - x)$ في $[0, 20]$.

نجحت كل طريقة في تقريب موقع الحد الأقصى $x^* = 5\pi/2 = 7.854$ إلى داخل $\epsilon = 1$ كما هو المطلوب . وكان بحث فيبوناكس هو الأمثلاً (انظر المسألة ١٠ - ٨) وتحقيق الدقة المطلوبة بستة تقييمات للدوال . ويتطلب بحث فترة الثلاث نقط (انظر المسألة ١٠ - ٧) وبحث المتوسط الذهبي (انظر المسألة ١٠ - ٩) تسعة وسبعة تقييمات للدوال على التوالي .

١٠ - ١١ : حل المسألة ١٠ - ٦ مرة أخرى بدون تقييد الفترة $[0, 3]$ من البداية بفترة أصغر تكون الدالة فيها أحادية النموذج . ناقش النتيجة .

بتطبيق بحث الفترة ذات الثلاث نقاط على $f(x) = x \sin 4x$ في $[0, 3]$ مباشرة ، نوجد بالتتابع مدخلات الجدول ١٠ - ١ . ويتبع ذلك أن

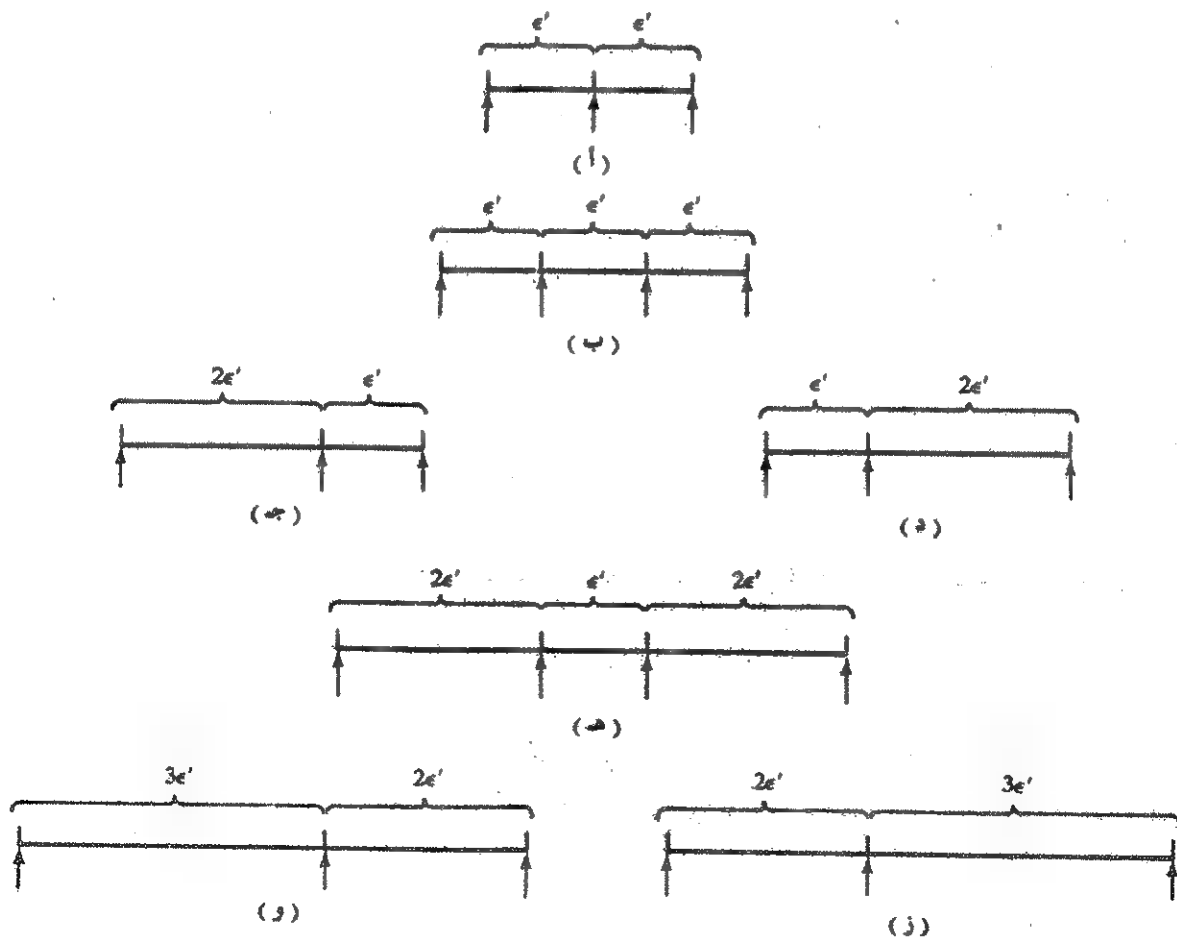
$$x^* \approx 1.231$$

$$z^* = f(x^*) = -1.20354 \quad \text{عند}$$

واضح من شكل ١٠ - ٥ أن طريقة البحث قد اقترنت من الحد الأدنى المحلى بقرب $3\pi/8$ ، وليس للحد الأدنى الشامل في $[0, 3]$ الذى وجد في المسألة ١٠ - ٦ . وكانت ستحدث نفس النتيجة إذا طبق بحث فيبوناكس ، أو بحث المتوسط الذهبي للفترة الكلية $[0, 3]$.

جدول ١٠ - ١

الفترة الحالية	النقط الداخلية			$f(x) = x \sin 4x$		
	a	b	c	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$
[0, 3]	0.75	1.5	2.25	0.1058	-0.4191	0.9273
[0.75, 2.25]	1.125	1.5	1.875	-1.100	-0.4191	1.759
[0.75, 1.5]	0.9375	1.125	1.313	-0.5358	-1.100	-1.126
[1.125, 1.5]	1.219	1.313	1.406	-1.203	-1.126	-0.8611
[1.125, 1.313]	1.172	1.219	1.266	-1.172	-1.203	-1.189
[1.172, 1.266]	1.196	1.219	1.243	-1.193	-1.203	-1.201
[1.196, 1.243]	1.208	1.219	1.231	-1.199	-1.20272	-1.20354
[1.219, 1.243]	1.225	1.231	1.237	-1.20350	-1.20354	-1.2028
[1.225, 1.237]						



شكل ١٠ - ٧

$N-3$
٣

$N-2$
٢

$N-1$
١

١٠ - ١٢ استنتج طريقة بحث فيبوناكس

إذا كانت آخر فترة تحت الاعتبار $N-1$ أكبر مما يمكن ، فإنها تحتوي على تقريب إلى الأمثلة المحلية المناسبة داخل 'ع' . ويجب أن توقع نقط البحث التي أوجلت هذه الفترة كما هو مبين بالأسهم في الشكل ١٠ - ٧ (أ) . ونقطة المنتصف لهذه الفترة هي التقريب النهائي . والآن $N-1$ نفسها يمكن الحصول عليها من الفترة الأكبر $N-2$. بحذف الجزء من الفترة الأكبر بناءً على خاصية أحادي النموذج . ويتضمن الشكل ١٠ - ٧ (أ) دالة أحادية النموذج اختيارية ، $N-2$ يجب أن يكون لها الشكل المتماثل كما في شكل ١٠ - ٧ (ب) ، حيث تدل الأسهم ، مرة أخرى على مواقع نقط البحث أو النقط النهائية للفترة الأصلية . وبحذف إما ثلث الطرف الأيمن أو ثلث الطرف الأيسر من الشكل ١٠ - ٧ (ب) ليؤول إلى الشكل ١٠ - ٧ (أ) . ومع ذلك .. فإن الشكل ١٠ - ٧ (ب) هو نفسه نتيجة إضافة نقطة بحث واحدة . وقبل إضافة هذه النقطة $N-2$ يجب أن تكون من صورة الشكل ١٠ - ٧ (ج) ، أو كما في الشكل ١٠ - ٧ (د) .

يمكن الحصول على $N-2$ من الفترة الأكبر $N-3$ بحذف جزء من الفترة الأكبر بناءً على خاصية النموذج الأحادي . ويتضمن الشكل ١٠ - ٧ (ج) أو ١٠ - ٧ (د) (١) يجب أن تأخذ الشكل ١٠ - ٧ (هـ) . ويجب حذف أي من الطرف الأيسر من الفترة الأصغر ، أو الطرف الأيمن من الفترة الأصغر من الشكل ١٠ - ٧ (هـ) لتوليد (٢) ومع ذلك فإن ١٠ - ٧ (هـ) هو نتيجة إضافة نقطة بحث . وقبل إضافة هذه النقطة (٣) يجب أن تكون قد أخذت الشكل ١٠ - ٧ (و) أو الشكل ١٠ - ٧ (ز) .

بالاستمرار في هذه الطريقة ، وبالتعبير عن طول L_i نجد أن $L_{N-1} = 2\epsilon'$ $L_{N-2} = 3\epsilon'$ $L_{N-3} = 5\epsilon'$ $L_{N-4} = 8\epsilon'$ $L_{N-5} = 13\epsilon'$ وهكذا . وحيث إن المعاملات جزء من تتابع فيبوناكس نحصل على

$$(1) \quad L_{N-1} = F_2\epsilon' \quad L_{N-2} = F_3\epsilon' \quad \dots \quad L_2 = F_{N-1}\epsilon' \quad L_1 = F_N\epsilon'$$

ولكن N مختار ، بحيث إن $F_N\epsilon' = b - a$. لذلك L_1 هي الفترة الأولية ، ونكون قد وصلنا إلى خطوات بحث فيبوناكس (بطريقة معكوسة) .

١٠ - ١٣ استنتج طريقة بحث المتوسط الذهبي

من (١) في المسألة ١٠ - ١٢ $L_1 = F_N\epsilon'$ $L_2 = F_{N-1}\epsilon'$ وإذا كانت N كبيرة تعطى المسألة ١٠ - ٢٦

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{F_{N-1}}{F_N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F_{N-1}}{F_N} = 0.6180 \dots$$

و $L_2 \approx 0.6180 L_1$ وبشابه الأسباب ، وحيث إن N كبيرة ، فإن نفس التقريب يتحقق لأي فترتين متتابعتين في بحث فيبوناكس . بمعنى أن $L_1 \approx 0.6180 L_{i-1}$ ، وهي المعادلة التعريفية لبحث المتوسط الذهبي .

مسائل مكملية

Supplementary Problems

- ١٠ - ١٤ أوجد الأمثلة المحلية والشاملة لـ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$ في (a) $[0, 3]$, (b) $[1, 4]$, (c) $[-1, 5]$.
- ١٠ - ١٥ أوجد كل الأمثلة المحلية والشاملة لـ $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ في (أ) $[0, 3]$ ، (ب) $[0, 2]$ ، (ج) $[0, \infty)$.
- ١٠ - ١٦ أوجد كل الأمثلة المحلية والشاملة لـ $f(x) = x + x^{-1}$ في (أ) $(0, \infty)$ ، (ب) $(-\infty, 0)$ ، (ج) $[5, 10]$ (ملحوظة : في الأجزاء (أ) ، (ب) $x = 0$ تعامل كنقطة نهائية غير محددة).
- ١٠ - ١٧ بين أن $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$ هي محدبة بالتحديد في $(-\infty, 2)$ ، ومقعرة بالتحديد في $(2, \infty)$.
- ١٠ - ١٨ حدد الفترات التي تكون فيها $f(x) = x + 4x^{-1}$ محدبة أو مقعرة.
- ١٠ - ١٩ استخدم بحث الفترة ذات الثلاث نقط للتقريب الى داخل $\epsilon = 0.1$ موقع الحد الأدنى الشامل في $(0, 2)$ ، في الدالة بالمسألة ١٠ - ١٨ (ملحوظة : استمر كما لو كانت الفترة $[0, 2]$).
- ١٠ - ٢٠ قرب موقع الحد الأعلى الشامل في $[0, \pi]$ لـ $f(x) = x^2 \sin x$ باستخدام بحث الثلاث نقط للفترة غير المحددة بخمسة تقييمات للدوال (بمعنى بحث الخمس نقط) . ماهي جودة هذا التقريب ؟
- ١٠ - ٢١ أعد حل المسألة ١٠ - ١٩ باستخدام بحث فيبوناكس
- ١٠ - ٢٢ أعد حل المسألة ١٠ - ٢٠ باستخدام بحث فيبوناكس (ملحوظة : مجموع بحث الخمس نقط يتطلب أن النقطتين الأوليين توضع $F_{2\epsilon}$ للداخل من النقط النهائية للفترة الأصلية . لذلك $N = 6$ لتحديد ϵ').
- ١٠ - ٢٣ أعد حل المسألة ١٠ - ١٩ يبحث المتوسط الذهبي .

٢٤ - ١٠ أعد حل المسألة ١٠ - ٢٠ يبحث المتوسط الذهبي .

٢٥ - ١٠ بين أن الحد رقم n في تتابع فيبوناكس هو

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

(ملحوظة : تحقق من أن الاصطلاح الرياضي المعطى يحقق العلاقة الرجعية والشروط الأولية)

٢٦ - ١٠ من المسألة ١٠ - ٢٥ اشتق

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F_{N+1}}{F_N} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{-1} = 0.6180 \dots$$

البرمجة غير الخطية : أمثلة متعددة المتغيرات بدون قيود

Nonlinear Programming: Multivariable Optimization without Constraints

سيحتوى هذا الفصل كثيراً على تعميم نتائج الفصل العاشر للحالات ذات أكثر من متغير ، ولكن المناظرة فقط لـ (١٠ - ١) .

$$(1-11) \quad \text{أمثلة } z = f(X) \text{ حيث إن } X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

سوف يعامل وليس المناظر لـ (١٠ - ٢) . بالإضافة إلى ذلك .. سنفرض دائماً الأمثلة في (١١ - ١) لتكون تعظيماً ، وتنطبق جميع النتائج على برامج التصغير إذا استبدلت $f(X) \rightarrow -f(X)$ انظر المسألة ١١ - ٢ ، ١١ - ٣ .

الحدود العظمى المحلية والشاملة LOCAL AND GLOBAL MAXIMA

تعريف : الجوار ($\epsilon > 0$) حول \hat{X} ، هو مجموعة كل المتجهات X بحيث إن

$$(X - \hat{X})^T (X - \hat{X}) = (x_1 - \hat{x}_1)^2 + (x_2 - \hat{x}_2)^2 + \dots + (x_n - \hat{x}_n)^2 \leq \epsilon^2$$

بالتعبير بالهندسة التحليلية ، يكون الجوار ϵ حول \hat{X} هو المداخل والحدود لكرة متعددة الأبعاد نصف قطرها ϵ ومركزها \hat{X} .
والدالة الهدفية $f(X)$ لها حد أعلى محلي عند \hat{X} إذا وجد جوار ϵ حول \hat{X} ، بحيث إن $f(X) \leq f(\hat{X})$ لكل قيم X في هذا الجوار ϵ الذى تحدده فيه الدالة . وإذا تحقق الشرط لكل قيمة موجبة ϵ (ليس المهم القيمة نفسها) ، فإن $f(X)$ يكون لها حد أعلى شامل عند \hat{X} .

المتجه المتدرج ومصفوفة هسى GRADIENT VECTOR AND HESSIAN MATRIX

المتجه المتدرج ∇f المرتبط بالدالة $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ الذى تعرف له المشقة الجزئية الأولى

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T$$

والتعبير $\nabla f|_{\hat{X}}$ يحقق قيمة المتدرج عند \hat{X} لأى إزاحة صغيرة من \hat{X} فى الاتجاهات المختلفة ، واتجاه أعلى زيادة فى $f(X)$ هو اتجاه المتجه $\nabla f|_{\hat{X}}$. انظر المسألة (١١ - ٧) .

مثال ١١ - ل $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2x_2 - x_2^2x_3^2$ مع $\bar{x} = [1, 2, 3]^T$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 6x_1x_2 \\ 3x_1^2 - 2x_2x_3^2 \\ -3x_2^2x_3 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f|_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 6(1)(2) \\ 3(1)^2 - 2(2)(3)^2 \\ -3(2)^2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -105 \\ -108 \end{bmatrix} \quad \text{حيث إن}$$

لذلك عند $\bar{x} = [1, 2, 3]^T$ يهبط الدالة بسرعة في الاتجاه $[12, -105, -108]^T$.

ومصفوفة هسي المرتبطة بالدالة $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ التي لها مشتقة جزئية ثانية تكون

$$H_f = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right] \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

والعبر $H_f|_{\bar{x}}$ يحقق قيمة المصفوفة هسي عند \bar{x} . وكإعداد للجدول ١١ - ١١، بأسفل، سنحتاج الآتي :

تعريف : المصفوفة المتماثلة A $n \times n$ (بحيث إن $A = A^T$) تكون سالبة مؤكدة (سالبة نصف مؤكدة) إذا كانت $X^T A X$ سالبة (غير موجبة) لكل متجه ذي أبعاد n $X \neq 0$.

نظرية ١١ - ١ د $A = [a_{ij}]$ لتكون مصفوفة متماثلة $n \times n$ وحدد المحددات

$$A_1 = |a_{11}| \quad A_2 = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad A_3 = + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \dots \quad A_n = (-1)^{n-1} \det A$$

ف تكون A سالبة مؤكدة إذا كانت فقط A_1, A_2, \dots, A_n كلها سالبة، وتكون A سالبة نصف مؤكدة إذا كانت فقط A_1, A_2, \dots, A_r كلها سالبة، وعناصر A الباقية تكون صفراً.

مثال ١١ - ٢ لدالة المثال ١١ - ١

$$H_f = \begin{bmatrix} 6x_2 & 6x_1 & 0 \\ 6x_1 & -2x_3^2 & -6x_2x_3 \\ 0 & -6x_2x_3 & -6x_2^2x_3 \end{bmatrix}$$

$$H_f|_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 6 & -54 & -108 \\ 0 & -108 & -72 \end{bmatrix} \quad \text{حيث}$$

ل $A_1 = 12 > 0$ $H_f|_{\bar{x}}$ بحيث إن H_f لا تكون سالبة مؤكدة أو حتى سالبة نصف مؤكدة عند \bar{x} .

النتائج من التفاضل والتكامل RESULTS FROM CALCULUS

نظرية ١١ - ٢ إذا كانت $f(X)$ متصلة في منطقة محددة مغلقة ، فإن $f(X)$ يكون لها حد أعلى شامل (وحد أدنى شامل أيضاً) في هذه المنطقة .

نظرية ١١ - ٣ إذا كانت $f(X)$ لها حد أعلى محلي (أو حد أدنى محلي) عند X^* ، وإذا كانت ∇f توجد في بعض الجوار حول X^* ، فإن $\nabla f|_{X^*} = 0$.

نظرية ١١ - ٤ إذا كانت $f(X)$ لها مشتقة جزئية ثانية في الجوار ϵ حول X^* ، وإذا كانت $\nabla f|_{X^*} = 0$ ، $H_f|_{X^*}$ سالبة مؤكدة ، فإن $f(X)$ يكون لها حد أعلى محلي عند X^* .

يتبع من النظريات ١١ - ٢ ، ١١ - ٣ أن $f(X)$ متصلة ، ويفرض الحد الأعلى الشامل لها بين هذه النقط التي لا توجد عندها ∇f ، أو التي عندها $\nabla f = 0$ (النقط الساكنة) ، إلا إذا فرضت الدالة قيماً أكبر مثل $X^T X \rightarrow \infty$. في الحالة الأخيرة لا يوجد حد أعلى شامل . (انظر المسألة ١١ - ١)

والحلول التحليلية المبينة على التفاضل والتكامل من الصعب الحصول عليها للبرامج المتعددة المتغيرات ، عنها في حالة البرامج المفردة المتغيرات ، لذلك ، مرة أخرى ، تستخدم الطرق العددية لتقريب الحدود العليا (المحلية) في حدود تفاوت موصف .

طريقة أقصى ميل صعود THE METHOD OF STEEPEST ASCENT

اختر متجهاً أولاً X_0 . واستفد من أي معلومة سابقة لمعرفة أين يجب أن يوجد الحد الأعلى الشامل المطلوب . ثم حدد المتجهات X_1, X_2, X_3, \dots بالعلاقة التكرارية .

$$X_{k+1} = X_k + \lambda_k^* \nabla f|_{X_k} \quad (١١ - ٢)$$

وهنا λ_k^* تكون كمية قياسية موجبة تعظم $f(X_k + \lambda \nabla f|_{X_k})$. ويجعل هذا البرنامج ذو المتغير المفرد بطرق الفصل المباشر ، ويكون الأفضل إذا مثلت λ_k^* حداً أعلى شاملاً ، ومع ذلك ، فإن الحد الأعلى المحلي يقوم بذلك . وتنتهي عملية التكرار حينما يكون الفرق بين قيم الدالة الهدفية عند متجهين X متتاليين أصغر من تفاوت موصف ، ويصبح آخر متجه محسوب لـ X هو التقريب النهائي لـ X^* (انظر المسائل ١١ - ٤ ، ١١ - ٥) .

طريقة نيوتن — رافسون THE NEWTON-RAPHSON METHOD

اختر متجهاً ابتدائياً X_0 كما في طريقة أقصى ميل صعود . تحدد المتجهات X_1, X_2, X_3, \dots بالتكرار بواسطة

$$X_{k+1} = X_k - (H_f|_{X_k})^{-1} \nabla f|_{X_k} \quad (١١ - ٣)$$

وقاعدة الإيقاف هي نفسها كما في طريقة أقصى ميل صعود . (انظر المسائل ١١ - ٨ ، ١١ - ٩) .

وتقرب طريقة نيوتن — رافسون إلى الحد الأعلى المحلي إذا كانت H_f سالبة مؤكدة في بعض الجوار حول الحد الأعلى . وإذا كانت X_0 تقع في هذا الجوار .

ملاحظة ٩ : إذا كانت H_f سالبة مؤكدة ، H_f^{-1} توجد وسالبة مؤكدة . إذا لم تختار X_0 صحيحة ، فإن الطريقة يمكن أن تقرب إلى حد أدنى محلي (انظر المسألة ١١ - ١٠) ، أو قد لا تقرب على الإطلاق (انظر المسألة ١٠ - ٩) . وفي أي حالة تنتهي العملية التكرارية وتبدأ من جديد بتقريب أولى أفضل .

طريقة فلتشر — بويل THE FLETCHER-POWELL METHOD

هذه الطريقة ، ذات ثمانية خطوات ، تبدأ باختيار متجه أولى \hat{X} ، وتحديد التفاوت ϵ ، وإنشاء $n \times n$ مصفوفة G مساوية للمصفوفة الأحادية . فإن كلاً من \hat{X} و G تعدل باستمرار حتى يكون الاختلاف بين قيمتين للدالة الهدفية أقل من ϵ . حيث تؤخذ القيمة الأخيرة من \hat{X} كـ X^*

الخطوة ١ : قيم $\alpha = f(\hat{X})$ ، $B = \nabla f|_{\hat{X}}$

الخطوة ٢ : حدد λ^* بحيث إن $f(\hat{X} + \lambda GB)$ تكون حداً أعلى ، حيث $\lambda = \lambda^*$ انشئ $D = \lambda^* GB$

الخطوة ٣ : اجعل $\hat{X} + D$ كقيمة معدلة من \hat{X}

الخطوة ٤ : احسب $\beta = f(\hat{X})$ للقيمة المعدلة من \hat{X} . إذا كانت $\beta - \alpha < \epsilon$ ، فاذهب إلى الخطوة ٥ ، وإذا لم تكن كذلك ، فاذهب إلى الخطوة ٦ .

الخطوة ٥ : انشئ ، $X^* = \hat{X}$ ، $f(X^*) = \beta$ ، ثم توقف .

الخطوة ٦ : قيم $C = \nabla f|_{\hat{X}}$ للمتجه المعدل \hat{X} وانشئ $Y = B - C$

الخطوة ٧ : احسب المصفوفات $n \times n$

$$L = \left(\frac{1}{D^T Y} \right) D D^T , \quad M = \left(\frac{-1}{Y^T G Y} \right) G Y Y^T G$$

الخطوة ٨ : اجعل $G + L + M$ كقيمة معدلة في G ، وانشئ α مساوية للقيمة الحالية من B ، β مساوية للقيمة الحالية من C ، وارجع إلى الخطوة ٢ .

بحث نمط هوك — جيف HOOKE-JEEVES' PATTERN SEARCH

هذه الطريقة هي طريقة بحث مباشرة ، تستخدم التحركات الاستكشافية ، والتي تحدد انجماً مناسباً ، وكذلك تحركات نمط ، والتي تعجل البحث . تبدأ الطريقة باختيار متجه أولى $B = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$ وخطوة حجمها h .

الخطوة ١ : تم التحركات الاستكشافية حول B بالتشويش على عناصر B ، وبالتالي بواسطة $\pm h$ وحدة ، إذا أدى هذا التشويش إلى تحسين (زيادة) قيمة الدالة الهدفية بعد القيمة الحالية ، فإن القيمة الابتدائية $f(B)$ ، وهي القيمة المشوشة لهذا العنصر تبقى كما هي ، وإلا تحفظ القيمة الأصلية للعنصر ، وبعد اختبار كل عنصر فإن المتجه الناتج يسمى C ، إذا كان $C = B$ ، فاذهب إلى الخطوة ٢ ، وإلا فاذهب إلى الخطوة ٣ .

الخطوة ٢ : B هو موقع الحد الأعلى إلى داخل التفاوت h إذا اختصرت h وأعيدت الخطوة ١ ، أو انتهى البحث عند $X^* = B$

الخطوة ٣ : اصنع حركة نمط للمتجه الوقتي $T = 2C - B$ (نصل إلى T بالتحرك من B إلى C والاستمرار حتى مسافة مساوية في نفس الاتجاه) .

الخطوة ٤ : اصنع تحركات استكشافية حول T ممتثلة للتحركات حول B الموضحة في الخطوة ١ . سم المتجه الناتج S . إذا كانت $S = T$ ، فاذهب إلى الخطوة ٥ ، وإلا فاذهب إلى الخطوة ٦ .

الخطوة ٥ : انشئ $C = S$ ، وارجع إلى الخطوة ١ .

الخطوة ٦ : انشئ $B = C$ ، $C = S$ ، وارجع إلى الخطوة ٣ .

A MODIFIED PATTERN SEARCH بحث النمط المعدل

ينتهي بحث هوك — جيف عندما لا يؤدي أى تشويش لعناصر ■ إلى تحسين في الدالة الهدفية ، وفي بعض الحالات تحدث هذه النهاية قبل وقتها ، ذلك أن هذه التشويشات لإثنين أو أكثر من العناصر في وقت واحد قد تؤدي إلى تحسين في الدالة الهدفية . ويمكن أن تتضمن الطريقة تشويشات آتية بتعديل الخطوة ٢ كما يلي :

الخطوة ٢ : نفذ بحثاً موسعاً على سطح المكعب الزائد ذي المركز ■ باعتبار كل التشويشات الممكنة لعناصر ■ بواسطة kh وحدة ، حيث إن $k = -1, 0, 1$ لتتجه ذى عناصر n ، يوجد $3^n - 1$ تشويشاً للاعتبار . وبمجرد تحقيق التحسن ، إله البحث الموسع « وانشئ المتجه المحسن مساوياً B ، وارجع إلى الخطوة ١ . وإذا لم يحقق أى تحسن ، فتكون B هي موقع الحد الأعلى في داخل التفاوت h . إما تختصر h وتكرر الخطوة ١ ، أو ينتهي البحث عند $X^* = B$

CHOICE OF AN INITIAL APPROXIMATION اختيار التقريب الأولي

تبدأ كل طريقة عددية بتقريب أول إلى الحد الأعلى المطلوب ، ويكون هذا التقريب في بعض الأحيان ظاهراً من النواحي الطبيعية أو الهندسية للمسألة (انظر المسألة ١١ - ١٢) . وفي حالات أخرى .. يستخدم أحد مولدى الأرقام العشوائية لإيجاد قيم مختلفة لـ X ، ثم تحسب $f(X)$ لكل قيمة عشوائية لـ X ، وتؤخذ قيمة X التي تعطي أفضل قيمة للدالة الهدفية كتقريب أولي . وحتى طريقة العينات العشوائية هذه تتضمن تحميماً أولياً لموقع الحد الأعلى ، وعلى ذلك .. فإن الأعداد العشوائية يجب أن تراجع بحيث تقع في فترة ثابتة . (انظر المسألة ١١ - ٤)

CONCAVE FUNCTIONS الدوال المحدبة

إن أى طريقة عددية لا يوجد ضمان بأنها ستكشف عن حد أعلى شامل ، فقد تقترب من الحد الأعلى المحلي ، أو ، أسوأ من ذلك ، قد لا تقترب بالمرّة وتستثنى من ذلك البرامج التي لها دوال هدفية محدبة .

تكون الدالة $f(X)$ مقعرة في منطقة مقعرة \mathcal{R} (انظر الفصل الثالث) إذا كان للمتجهين X_1, X_2 في \mathcal{R} ، ولكل قيم $0 \leq \alpha \leq 1$

$$f(\alpha X_1 + (1 - \alpha)X_2) \leq \alpha f(X_1) + (1 - \alpha)f(X_2) \quad (١١ - ٤)$$

[قارن (١٠ - ٢)] وتكون الدالة محدبة في \mathcal{R} إذا كانت فقط قيمتها السلبية مقعرة في \mathcal{R} قد تكون المنطقة المقعرة ■ محدودة أو غير محدودة .

نظرية ١١ - ٥ : إذا كان للدالة $f(X)$ مشتقة جزئية ثانية في \mathcal{R} ، فإن $f(X)$ تكون محدبة في ■ إذا كانت فقط مصفوفة هيس H_f سالبة نصف مؤكدة لكل X في \mathcal{R} .

نظرية ١١ - ٦ : إذا كانت $f(X)$ محدبة في \mathcal{R} ، فإن أى حد أعلى في \mathcal{R} هو حد أعلى شامل في \mathcal{R} .

هاتان النظريتان تضمنان أنه إذا كانت H_f سالبة نصف مؤكدة في أى مكان ■ فإن أى حد أعلى محلي يؤدي إلى حل للبرنامج (١١ - ١) . وإذا كانت H_f سالبة مؤكدة في أى مكان ، فإن $f(X)$ تكون محدبة بدقة (في كل مكان) ، ويكون حل البرنامج (١١ - ١) وحيداً (عديم النظر)

مسائل محلولة

Solved Problems

١ - ١١ : تعظيم $z = x_1(x_2 - 1) + x_3(x_3^2 - 3)$

هنا $f(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 - 1) + x_3(x_3^2 - 3)$ والمتجه المتدرج $\nabla f = [x_2 - 1, x_1, 3x_3^2 - 3]^T$ يتواجد في كل مكان ، ويكون صفرياً فقط عند

$$X_1 = [0, 1, 1]^T \quad \text{و} \quad X_2 = [0, 1, -1]^T$$

ولكن $f(X_1) = -2$ ، $f(X_2) = 2$. تصبح $f(x_1, x_2, x_3)$ كبيرة اختياريًا عندما تزيد x_3 ، ومن ثم لا يوجد حد أعلى شامل . ويكون المتجه X_2 هو فقط موقع الحد الأعلى المحلي .

٢ - ١١ : تصغير $z = (x_1 - \sqrt{5})^2 + (x_2 - \pi)^2 + 10$

بضرب الدالة الهدفية في λ — نحصل على برنامج التعظيم المكافئ

$$\text{تعظيم} \quad \lambda = -(x_1 - \sqrt{5})^2 - (x_2 - \pi)^2 - 10$$

وفيه $\nabla z = -2[x_1 - \sqrt{5}, x_2 - \pi]^T$. لذلك توجد نقطة ساكنة مفردة $x_1 = \sqrt{5}$ $x_2 = \pi$ عند $z = -10$.
والآن عندما $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty$ تصبح z صغيرة اختياريًا ، وبالتبعية $z^* = -10$ تكون هي الحد الأعلى الشامل .
الحد الأدنى الشامل لبرنامج التصغير الأصلي . وبفترض الحد الأدنى بالطبع عند $x_1^* = \sqrt{5} = 2.2361$ ، $z^* = +10$

$$x_2^* = \pi \approx 3.1416$$

٣ - ١١ : تصغير $z = \sin x_1 x_2 - \cos(x_1 - x_2)$

بضرب الدالة الهدفية في λ — نحصل على برنامج التعظيم المكافئ

$$z = -\sin x_1 x_2 + \cos(x_1 - x_2) \quad \text{تصغير}$$

هنا $f(x_1, x_2) = -\sin x_1 x_2 + \cos(x_1 - x_2)$ و

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -x_2 \cos x_1 x_2 - \sin(x_1 - x_2) \\ -x_1 \cos x_1 x_2 + \sin(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

التي تتواجد في كل مكان . وتحقق النقاط الساكنة

$$\begin{aligned} -x_2 \cos x_1 x_2 - \sin(x_1 - x_2) &= 0 \\ -x_1 \cos x_1 x_2 + \sin(x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned}$$

وبالرغم من أن الحل الكامل للنموذج (١) لا يمكن الحصول عليه جبرياً ، فإنه من الممكن إيجاد حل جزئى يكفى البرنامج الحالى .
لاحظ قبل أى شيء أنه ، لكل من x_1 ، x_2 .

$$|f(x_1, x_2)| = |\sin x_1 x_2| + |\cos(x_1 - x_2)| \leq 1 + 1 = 2$$

ومن ثم ، إذا أمكن إيجاد نقطة ساكنة عند $f(x_1, x_2) = 2$ ، فتكون هذه النقطة بالضرورة حداً أعلى شاملاً . والآن ..
من الواضح أن (١) تتحقق إذا تلاثت $\sin(x_1 - x_2)$ ، $\cos x_1 x_2$ كل على حدة ، بمعنى أنه إذا كانت

$$x_1 x_2 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{و} \quad x_1 - x_2 = n\pi$$

حيث إن k ، n أعداد صحيحة ، وبأخذ $k = 1$ ، $n = 0$ نجد أن :

$$f\left(\sqrt{\frac{3\pi}{2}}, \sqrt{\frac{3\pi}{2}}\right) = -\sin \frac{3\pi}{2} + \cos 0 = 2$$

وينتجى بذلك البحث . ويكون حل برنامج التصغير الأصل $z^* = -2$ عند $x_1^* = x_2^* = \sqrt{3\pi/2}$ (وفى أى مكان آخر) .

١١ - ٤ استخدم طريقة أقصى ميل صعودى

$$z = (x_1 - \sqrt{5})^2 + (x_2 - \pi)^2 + 10 \quad \text{تصغير}$$

ومراجعة برنامج التنظيم :

$$z = -(x_1 - \sqrt{5})^2 - (x_2 - \pi)^2 - 10$$

(١)

نحتاج إلى حل تقريبي أول نحصل عليه بالمينات المشوائية للدالة الهدفية فى المنطقة $-10 \leq x_1, x_2 \leq 10$. ونقط العينة وقيم المناظرة لها تبين فى الجدول الأسفل . وأكبر مدخل لـ z هو -36.58 يحدث عند $X_0 = [6.597 \ 5.891]^T$ ، والتي نأخذها كتقريب أولى لـ X^* . وتدرج الدالة الهدفية للبرنامج (١) يكون

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -2(x_1 - \sqrt{5}) \\ -2(x_2 - \pi) \end{bmatrix}$$

x_1	-8.537	-0.9198	9.201	9.250	6.597	8.411	8.202	-9.173	-9.337	-5.794
x_2	-1.099	-8.005	-2.524	7.546	5.891	-9.945	-5.709	-6.914	8.163	-0.0210
z	-144.0	-144.2	-90.61	-78.59	-36.58	-219.4	-123.9	-241.3	-169.2	-84.48

المحاولة الأولى

$$\begin{aligned} X_0 + \lambda \nabla f|_{X_0} &= \begin{bmatrix} 6.597 \\ 5.891 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2(6.597 - \sqrt{5}) \\ -2(5.891 - \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.597 - 8.722\lambda \\ 5.891 - 5.499\lambda \end{bmatrix} \\ f(X_0 + \lambda \nabla f|_{X_0}) &= -(6.597 - 8.722\lambda - \sqrt{5})^2 - (5.891 - 5.499\lambda - \pi)^2 - 10 \\ &= -106.3\lambda^2 + 106.3\lambda - 36.58 \end{aligned}$$

باستخدام الطرق التحليلية التي وصفت في الفصل العاشر ، نجد أن هذه الدالة في λ تفترض حداً أعلى (شاملاً) عند $\lambda^* = 0.5$ ، لذلك

$$X_1 = X_0 + \lambda^* \nabla f|_{X_0} = \begin{bmatrix} 6.597 - 8.722(0.5) \\ 5.891 - 5.499(0.5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.236 \\ 3.142 \end{bmatrix}$$

عند $f(X_1) = -10.00$ ، وبما أن الفرق بين $f(X_0) = -36.58$ و $f(X_1) = -10.00$ هام ، فإننا نستمر في المحاولات .

المحاولة الثانية

$$\begin{aligned} X_1 + \lambda \nabla f|_{X_1} &= \begin{bmatrix} 2.236 \\ 3.142 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2(2.236 - \sqrt{5}) \\ -2(3.142 - \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.236 + 0.0001\lambda \\ 3.142 - 0.0008\lambda \end{bmatrix} \\ f(X_1 + \lambda \nabla f|_{X_1}) &= -(2.236 + 0.0001\lambda - \sqrt{5})^2 - (3.142 - 0.0008\lambda - \pi)^2 - 10 \\ &= -(6.500\lambda^2 - 6.382\lambda + 10^8)10^{-7} \end{aligned}$$

باستخدام الطرق التحليلية التي وصفت في الفصل العاشر ، نجد أن هذه الدالة في λ لها حد أعلى (شامل) عند $\lambda^* = 0.4909$. لذلك ،

$$X_2 = X_1 + \lambda^* \nabla f|_{X_1} = \begin{bmatrix} 2.236 + 0.0001(0.4909) \\ 3.142 - 0.0008(0.4909) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.236 \\ 3.142 \end{bmatrix}$$

وحيث إن $X_1 = X_2$ (إلى أربعة أرقام مائة) ، فإننا نقبل $X^* = [2.236, 3.142]^T$ عند $z^* = -10.00$ كحل للبرنامج (١) . ويكون حل برنامج التصغير الأصلي هو $X^* = [2.236, 3.142]^T$ عند $z^* = +10.00$. قارن هذا بنتائج المسألة ١١ - ٢ .

٤

١١ - ٥ استخدام طريقة أقصى ميل صعود في

$$z = -\sin x_1 x_2 + \cos(x_1 - x_2) \quad \text{تعظيم}$$

بتفاوت في حدود 0.05 .

هنا

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -x_2 \cos x_1 x_2 - \sin(x_1 - x_2) \\ -x_1 \cos x_1 x_2 + \sin(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

يبحث الأرقام العشوائية في المنطقة: $-1 \leq x_1, x_2 \leq 1$ نحصل على $X_0 = [-0.7548, 0.5303]^T$ عند $f(X_0) = 0.6715$
المحاولة الأولى

$$\nabla f|_{x_0} = \begin{bmatrix} -0.5303 \cos [(-0.7548)(0.5303)] - \sin (-0.7548 - 0.5303) \\ 0.7548 \cos [(-0.7548)(0.5303)] + \sin (-0.7548 - 0.5303) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4711 \\ -0.2643 \end{bmatrix}$$

$$X_0 + \lambda \nabla f|_{x_0} = \begin{bmatrix} -0.7548 \\ 0.5303 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0.4711 \\ -0.2643 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7548 + 0.4711\lambda \\ 0.5303 - 0.2643\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(X_0 + \lambda \nabla f|_{x_0}) &= -\sin [(-0.7548 + 0.4711\lambda)(0.5303 - 0.2643\lambda)] \\ &\quad + \cos [(-0.7548 + 0.4711\lambda) - (0.5303 - 0.2643\lambda)] \\ &= -\sin (-0.4003 + 0.4493\lambda - 0.1245\lambda^2) + (-1.285 + 0.7354\lambda) \end{aligned}$$

باستخدام بحث المتوسط الذهبي على $[0, 8]$ نحدد أن هذه الدالة λ لها حد أعلى عند $\lambda^* \approx 1.7$. لذلك

$$X_1 = X_0 + \lambda^* \nabla f|_{x_0} = \begin{bmatrix} -0.7548 + 0.4711(1.7) \\ 0.5303 - 0.2643(1.7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04607 \\ 0.08099 \end{bmatrix}$$

عند $f(X_1) = 0.9957$ ، حيث إن

$$f(X_1) - f(X_0) = 0.9957 - 0.6715 = 0.3242 > 0.05$$

ونسبتم في المحاولة

المحاولة الثانية

$$\begin{aligned} \nabla f|_{x_1} &= \begin{bmatrix} -0.08099 \cos [(0.04607)(0.08099)] - \sin (0.04607 - 0.08099) \\ -0.04607 \cos [(0.04607)(0.08099)] + \sin (0.04607 - 0.08099) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.04608 \\ -0.08098 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$X_1 + \lambda \nabla f|_{x_1} = \begin{bmatrix} 0.04607 - 0.04608\lambda \\ 0.08099 - 0.08098\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(X_1 + \lambda \nabla f|_{x_1}) &= -\sin [(0.04607 - 0.04608\lambda)(0.08099 - 0.08098\lambda)] \\ &\quad + \cos [(0.04607 - 0.04608\lambda) - (0.08099 - 0.08098\lambda)] \\ &= -\sin (0.003731 - 0.007463\lambda + 0.003732\lambda^2) + \cos (-0.03492 + 0.03490\lambda) \end{aligned}$$

باستخدام بحث المتوسط الذهبي على $[0, 8]$ نحدد أن هذه الدالة λ لها حد أعلى عند $\lambda^* \approx 1$ ، لذلك

$$X_2 = X_1 + \lambda^* \nabla f|_{x_1} = \begin{bmatrix} 0.04607 - 0.04608(1) \\ 0.08099 - 0.08098(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

عند $f(X_2) = 1.000$. وحيث إن

$$f(X_2) - f(X_1) = 1.000 - 0.9957 = 0.0043 < 0.05$$

نأخذ $X^* = X_2$ و $z^* = 1.000$

١١ - ٦ هل الحد الأعلى الموجود بالمسألة ١١ - ٥ حد أعلى شامل ؟

للدالة الهدفية $f(x_1, x_2) = -\sin x_1 x_2 + \cos(x_1 - x_2)$ المصفوفة هسي ليست سالبة نصف مؤكدة في أى مكان ، وفي الحقيقة

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = x_2^2 \sin x_1 x_2 - \cos(x_1 - x_2)$$

ويكون الطرف الأيمن موجياً عند $x_1 = x_2 = \sqrt{\pi/2}$. لذلك $f(x_1, x_2)$ لا تكون محدبة في أى مكان ، ويبقى السؤال مطروحاً . وبالرجوع إلى المسألة ١١ - ٣ نجد أن الحد الأعلى الشامل الفعلي هو $z^* = 2$ ، لذلك $z^* = 1.000$ يجب أن يكون حداً أعلى فقط .

١١ - ٧ استنتج طريقة أقصى ميل صعود .

لأى متجه ثابت \mathbf{u} وأى متجه اتجاهى \mathbf{U} ، تعطى المشتقة التوجيهية

$$D_{\mathbf{U}}f(\mathbf{x}) = \nabla f|_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{U}$$

معدل التغير في $f(\mathbf{x})$ عند \mathbf{x} في الاتجاه \mathbf{U} . حيث إن

$$\nabla f \cdot \mathbf{U} = |\nabla f| |\mathbf{U}| \cos \theta = |\nabla f| \cos \theta$$

نحدث أكبر زيادة في $f(\mathbf{x})$ عندما $\theta = 0$ ، بمعنى عندما تكون \mathbf{U} في نفس اتجاه ∇f . لذلك « أى حركة (صغيرة) من \mathbf{x} في الاتجاه $\nabla f|_{\mathbf{x}}$ ستزيد من الدالة » بديلاً في $f(\mathbf{x})$ بأسرع ما يمكن . ويمثل المتجه $\mathbf{u} = \nabla f|_{\mathbf{x}}$ إزاحة من هذا النوع . وتكون أحسن قيمة λ هي القيمة التي تجعل $f(\mathbf{x} + \lambda \nabla f|_{\mathbf{x}})$ أكبر ما يمكن ، وهي قيمة الدالة بعد الإزاحة .

١١ - ٨ استخدم طريقة نيوتن - رافسون في

$$z = -(x_1 - \sqrt{5})^2 - (x_2 - \pi)^2 - 10 \quad \text{تعظيم}$$

إلى داخل التفاوت 0.05 .

من المسألة ١١ - ٤ نأخذ التقريب الأول $\mathbf{x}_0 = [6.597, 5.891]^T$ عند $f(\mathbf{x}_0) = -36.58$ والمتجه المتدرج « مصفوفة هسي ، ومقلوب مصفوفة هسي لهذه الدالة الهدفية على التوالي هي

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -2(x_1 - \sqrt{5}) \\ -2(x_2 - \pi) \end{bmatrix} \quad H_f = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad H_f^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

لكل قيم x_1 و x_2

المحاولة الأولى

$$\nabla f|_{x_0} = \begin{bmatrix} -2(6.597 - \sqrt{5}) \\ -2(5.891 - \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.722 \\ -5.499 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} X_1 &= X_0 - (H_f|_{x_0})^{-1} \nabla f|_{x_0} \\ &= \begin{bmatrix} 6.597 \\ 5.891 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8.722 \\ -5.499 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.236 \\ 3.142 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

عند $f(X_1) = -10.00$ حيث إن

$$f(X_1) - f(X_0) = -10.00 - (-36.58) = 26.58 > 0.05$$

نستمر في المحاولة

المحاولة الثانية

$$\nabla f|_{x_1} = \begin{bmatrix} -2(2.236 - \sqrt{5}) \\ -2(3.142 - \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0001 \\ 0.0008 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1 - (H_f|_{x_1})^{-1} \nabla f|_{x_1} \\ &= \begin{bmatrix} 2.236 \\ 3.142 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0001 \\ 0.0008 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.236 \\ 3.142 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

عند $X^* = X_2 = [2.236, 3.142]^T$ نأخذ $f(X_2) - f(X_1) = 0 < 0.05$ حيث إن $f(X_2) = -10.00$ عند $z^* = f(X_2) = -10.00$

٩ - ١١ استخدم طريقة نيوتن - رافسون في

$$z = -\sin x_1 x_2 + \cos(x_1 - x_2) \quad \text{تعظيم}$$

بتفاوت 0.05

المتجه المتدرج ومصفوفة هسي لهذه الدالة الهدفية هما

(١)

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -x_2 \cos x_1 x_2 - \sin(x_1 - x_2) \\ -x_1 \cos x_1 x_2 + \sin(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

(٢)

$$H_f = \begin{bmatrix} x_1^2 \sin x_1 x_2 - \cos(x_1 - x_2) & -\cos x_1 x_2 + x_1 x_2 \sin x_1 x_2 + \cos(x_1 - x_2) \\ -\cos x_1 x_2 + x_1 x_2 \sin x_1 x_2 + \cos(x_1 - x_2) & x_2^2 \sin x_1 x_2 - \cos(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

من المسألة ١١ - ٥ نحدد التقريب الأولى $X_0 = [-0.7548, 0.5303]^T$

المحاولة الأولى : بالتعويض بعناصر في (١) ، (٢) نحصل على

$$\nabla f|_{x_0} = \begin{bmatrix} 0.4711 \\ -0.2643 \end{bmatrix} \quad H_f|_{x_0} = \begin{bmatrix} -0.3914 & -0.4832 \\ -0.4832 & -0.5038 \end{bmatrix} \quad (H_f|_{x_0})^{-1} = \begin{bmatrix} 13.88 & -13.31 \\ -13.31 & 10.78 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = X_0 - (H_f|_{x_0})^{-1} \nabla f|_{x_0} \quad \text{فإن}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.7548 \\ 0.5303 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 13.88 & -13.31 \\ -13.31 & 10.78 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4711 \\ -0.2643 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.81 \\ 9.650 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن X_1 غير قريبة من X_0 ، والتي تفترض أن الأسلوب العددي لا يتقارب . في هذه الحالة .. تبين نظرية ١١ - ١ أن $H_f|_{x_0}$ ليست سالبة مؤكدة ، ومن ثم X_0 لم تختَر قريبة بقدر كافٍ من الحد الأعلى الذي يضمن التقارب لطريقة نيوتن - رافسون . لذلك ، بدلا من الاستمرار في المحاولات ، يكون من الحكمة بدء الطريقة من جديد بتقريب أفضل من الحد الأعلى .

ويمكن الحصول على تقريب أولي أفضل بطريقتين . الطريقة الأولى : وفيها يمكن استخدام مولدات الأعداد العشوائية لإعطاء قيم إضافية لـ X حتى إيجاد تقريب أفضل . وفي الطريقة الثانية : يمكن استخدام طريقة أقصى ميل صعود لمحاولة واحدة بقيمة X_0 الحالية ، ثم استخدام النتيجة الناتجة لبدء طريقة نيوتن - رافسون . ويتفقد المدخل الثاني نحصل من المسألة ١١ - ٥ على المتجه الابتدائي الأفضل .

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0.04607 \\ 0.08099 \end{bmatrix}$$

$$f(X_0) = 0.9957 \quad \text{عند}$$

المحاولة الأولى (الجديدة) : بالتعويض $x_2 = 0.08099$ ، $x_1 = 0.04607$ في (١) ، (٢) نحصل على

$$\nabla f|_{x_0} = \begin{bmatrix} -0.04608 \\ -0.08098 \end{bmatrix} \quad H_f|_{x_0} = \begin{bmatrix} -0.9994 & -0.0005888 \\ -0.0005888 & -0.9994 \end{bmatrix} \quad (H_f|_{x_0})^{-1} = \begin{bmatrix} -1.001 & 0.0005895 \\ 0.0005895 & -1.001 \end{bmatrix}$$

لذلك

$$X_1 = X_0 - (H_f|_{x_0})^{-1} \nabla f|_{x_0}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.04607 \\ 0.08099 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1.001 & 0.0005895 \\ 0.0005895 & -1.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.04608 \\ -0.08098 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{عند } f(X_1) = 1 \quad \text{حيث إن}$$

$$f(X_1) - f(X_0) = 1.0000 - 0.9957 = 0.0043 < 0.05$$

$$z^* = f(X_1) = 1 \quad , \quad X^* = X_1 = [0, 0]^T \quad \text{نأخذ}$$

$$z = -\sin x_1 x_2 + \cos(x_1 - x_2) \text{ تعظيم}$$

$$X_0 = [4.8, 1.6]^T \text{ ابداً بقيمة 0.05 بتفاوت}$$

المتجه المتدرج ، ومصفوفة هسي لهذه الدالة الهدفية هما (١) ، (٢) في المسألة ١١ - ٩ .

المحاولة الأولى

$$\nabla f|_{x_0} = \begin{bmatrix} -1.6 \cos [(4.8)(1.6)] - \sin(4.8 - 1.6) \\ -4.8 \cos [(4.8)(1.6)] + \sin(4.8 - 1.6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2186 \\ -0.8893 \end{bmatrix}$$

$$H_f|_{x_0} = \begin{bmatrix} 3.520 & 6.393 \\ 6.393 & 23.69 \end{bmatrix} \quad (H_f|_{x_0})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5572 & -0.1504 \\ -0.1504 & 0.08279 \end{bmatrix}$$

فإن

$$\begin{aligned} X_1 &= X_0 - (H_f|_{x_0})^{-1} \nabla f|_{x_0} \\ &= \begin{bmatrix} 4.8 \\ 1.6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5572 & -0.1504 \\ -0.1504 & 0.08279 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.2186 \\ -0.8893 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.788 \\ 1.641 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

عند $f(X_1) = -2.000$ ، والآن $f(X_0) = -1.983$ ، بالرغم من أن X_1 قريبة من X_0 ، فإن

$$f(X_1) < f(X_0)$$

ونميل المحاولات نحو الحد الأدنى بدلاً من الأعلى . (لاحظ أن $H_f|_{x_0}$ ليست سالبة مؤكدة ؛ ولكنها في الحقيقة موجبة مؤكدة) . وتستخدم قيمة أخرى لـ X_0 ، مشابهة للقيمة المحددة في المسألة ١١ - ٥ ، وذلك إذا أريد نجاح طريقة نيوتن - رافسون .

١١ - ١١ حل المسألة ١ - ١٤ حتى أقرب 0.25 كم بطريقة فلتشر - بويل .

المسألة ١ - ١٤ مكافئة لبرنامج التعظيم بالدالة الهدفية

$$(١) \quad f(X) = -\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \sqrt{(x_1 - 300)^2 + (x_2 - 400)^2} - \sqrt{(x_1 - 700)^2 + (x_2 - 300)^2}$$

والمتجه المتدرج

$$(٢) \quad \nabla f = \begin{bmatrix} -\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{x_1 - 300}{\sqrt{(x_1 - 300)^2 + (x_2 - 400)^2}} - \frac{x_1 - 700}{\sqrt{(x_1 - 700)^2 + (x_2 - 300)^2}} \\ -\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{x_2 - 400}{\sqrt{(x_1 - 300)^2 + (x_2 - 400)^2}} - \frac{x_2 - 300}{\sqrt{(x_1 - 700)^2 + (x_2 - 300)^2}} \end{bmatrix}$$

لبدء طريقة فلتشر — بويل نشيء $\epsilon = 0.25$ ، و

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ونختار $\hat{x} = [400, 200]^T$ الذى يظهر من الشكل ١ - ٤ أنه تقريب جيد للموقع الأمثل لحطة التكرير .

الخطوة ١

$$\begin{aligned} \alpha &= f(\hat{x}) = f(400, 200) \\ &= -\sqrt{(400)^2 + (200)^2} - \sqrt{(100)^2 + (-200)^2} - \sqrt{(-300)^2 + (-100)^2} = -987.05 \\ B &= \nabla f|_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -0.39296 \\ 0.76344 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

الخطوة ٢

$$\begin{aligned} f(\hat{x} + \lambda GB) &= f\left(\begin{bmatrix} 400 \\ 200 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.39296 \\ 0.76344 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 400 - 0.39296\lambda \\ 200 + 0.76344\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= -\sqrt{(400 - 0.39296\lambda)^2 + (200 + 0.76344\lambda)^2} \\ &\quad - \sqrt{(100 - 0.39296\lambda)^2 + (-200 + 0.76344\lambda)^2} \\ &\quad - \sqrt{(-300 - 0.39296\lambda)^2 + (-100 + 0.76344\lambda)^2} \end{aligned}$$

وبعمل بحث فترة الثلاث نقط في $[0, 425]$ نحدد $\lambda^* \approx 212.5$ ، لذلك

$$D = \lambda^* B = (212.5) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.39296 \\ 0.76344 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -83.504 \\ 162.23 \end{bmatrix}$$

الخطوة ٣

$$\hat{x} + D = \begin{bmatrix} 400 \\ 200 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -83.504 \\ 162.23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 316.50 \\ 362.23 \end{bmatrix}$$

التي يمكن أن نأخذها كقيمة معدلة

الخطوة ٤

$$\begin{aligned} \beta &= f(\hat{x}) = f(316.50, 362.23) = -910.76 \\ \beta - \alpha &= -910.76 - (-987.05) = 76.29 > 0.25 \end{aligned}$$

الخطوة ٦

$$C = \nabla f|_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -0.071207 \\ 0.0031594 \end{bmatrix} \quad Y = B - C = \begin{bmatrix} -0.39296 \\ 0.76344 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.071207 \\ 0.0031594 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.32175 \\ 0.76028 \end{bmatrix}$$

الخطوة ٧

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = [-83.504, 162.23] \begin{bmatrix} -0.32175 \\ 0.76028 \end{bmatrix} = 150.21$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \frac{1}{150.21} \mathbf{D} \mathbf{D}^T = \frac{1}{150.21} \begin{bmatrix} -83.504 \\ 162.23 \end{bmatrix} [-83.504, 162.23] \\ &= \frac{1}{150.21} \begin{bmatrix} 6972.9 & -13547 \\ -13547 & 26319 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46.421 & -90.187 \\ -90.187 & 175.21 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{G} \mathbf{Y} = [-0.32175, 0.76028] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.32175 \\ 0.76028 \end{bmatrix} = 0.68155$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \frac{-1}{0.68155} \mathbf{G} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T \mathbf{G} \\ &= \frac{-1}{0.68155} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.32175 \\ 0.76028 \end{bmatrix} [-0.32175, 0.76028] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{0.68155} \begin{bmatrix} 0.10352 & -0.24462 \\ -0.24462 & 0.57803 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.15189 & 0.35892 \\ 0.35892 & -0.84811 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

الخطوة ٨

$$\mathbf{G} + \mathbf{L} + \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 46.421 & -90.187 \\ -90.187 & 175.21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.15189 & 0.35892 \\ 0.35892 & -0.84811 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47.269 & -89.828 \\ -89.828 & 175.36 \end{bmatrix}$$

التي نأخذها كقيمة \mathbf{G} المعدلة . ونعدل أيضاً $\lambda = -910.76$ ، و

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.071207 \\ 0.0031594 \end{bmatrix}$$

الخطوة ٩

$$\begin{aligned} f(\hat{\mathbf{X}} + \lambda \mathbf{G} \mathbf{B}) &= f\left(\begin{bmatrix} 316.50 \\ 362.23 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 47.269 & -89.828 \\ -89.828 & 175.36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.071207 \\ 0.0031594 \end{bmatrix}\right) \\ &= f\left(\begin{bmatrix} 316.50 - 3.6497\lambda \\ 362.23 + 6.9504\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= -\sqrt{(316.50 - 3.6497\lambda)^2 + (362.23 + 6.9504\lambda)^2} \\ &\quad -\sqrt{(16.50 - 3.6497\lambda)^2 + (-37.77 + 6.9504\lambda)^2} \\ &\quad -\sqrt{(-383.50 - 3.6497\lambda)^2 + (62.23 + 6.9504\lambda)^2} \end{aligned}$$

وبعمل بحث فترة الثلاث نقط في $[0, 10]$ نجد $\lambda^* = 1.25$. لذلك

$$\mathbf{D} = \lambda^* \mathbf{G} \mathbf{B} = (1.25) \begin{bmatrix} 47.269 & -89.828 \\ -89.828 & 175.36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.071207 \\ 0.0031594 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.5621 \\ 8.6880 \end{bmatrix}$$

الخطوة ١٠ :

$$\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 316.50 \\ 362.23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4.5621 \\ 8.6880 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 311.94 \\ 370.92 \end{bmatrix}$$

التي نأخذها كقيمة $\hat{\mathbf{X}}$ المعدلة

الخطوة ٤

$$\beta = f(\bar{X}) = f(311.94, 370.92) = -910.58$$

$$\beta - \alpha = -910.58 - (-910.76) = 0.18 < 0.25$$

الخطوة ٥

$$X^* = \hat{X} = \begin{bmatrix} 311.94 \\ 370.92 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad f(X^*) = \beta = -910.58$$

ونحل المسألة ١ - ١٤ : $x_1^* = 311.94 \text{ km}$ ، $x_2^* = 370.92 \text{ km}$ عند $z^* = +910.58 \text{ km}$

١١ - ١٢ بين أن الحد الأعلى الموقع بطريقة فلتشر - بويل في المسألة ١١ - ١١ هو في الحقيقة الحد الأعلى الشامل المطلوب .

بالنظر إلى المسألة ١١ - ٦ يكفي بيان أن $f(X)$ المعطاه بواسطة (١) في المسألة ١١ - ١١ تكون محدبة في كل مكان .
وفي الحقيقة .. نحتاج فقط لبيان أن الدالة

$$g(X) = -\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

محدبة في كل مكان ، حيث إن $f(X)$ هي مجموع الدوال الثلاث من هذا النوع ، ومجموع الدوال المحدبة هي دالة محدبة .
والآن ..

$$H_g = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} -x_2^2 & x_1 x_2 \\ x_1 x_2 & -x_1^2 \end{bmatrix}$$

التي تكون من النظرية ١١ - ١ ، سالبة نصف مؤكدة في كل مكان . لذلك ، وطبقاً لنظرية ١١ - ٥ $g(X) = 0$ تكون محدبة في كل مكان .

١١ - ١٣ استنتج طريقة نيوتن - رافسون

افرض أن التقريب X_k في النقطة الساكنة قد تم تحديده ، ونرغب في إيجاد نقطة قريبة X_{k+1} التي تكون تقريباً أفضل بامتداد الاتجاه ∇f في سلسلة تايلور حول X_k ، نحصل على

$$\nabla f|_{X_{k+1}} = \nabla f|_{X_k} + H_f|_{X_k} (X_{k+1} - X_k) + \dots$$

يجب أن يتحقق القارئ من أن الصف رقم (1) في (١) هو سلسلة تايلور العادية متعددة المتغيرات في $\partial f / \partial x_i$.

$$H_f|_{X_k} (X_{k+1} - X_k) = -\nabla f|_{X_k} \quad \text{أو} \quad X_{k+1} - X_k = -(H_f|_{X_k})^{-1} \nabla f|_{X_k}$$

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 0.02(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 325)^2 - 0.02(x_1x_2)^2 \quad \text{تعظيم}$$

$$f(B) = -2112.5 \quad \text{فإن} \quad h = 1 \quad , \quad B = [0, 0, 0]^T \quad \text{نبدأ اختيارياً بـ}$$

$$\begin{aligned} f(0+1, 0, 0) &= -2096.52 \quad (\text{تحسين}) \\ f(1, 0+1, 0) &= -2081.60 \quad (\text{تحسين}) \\ f(1, 1, 0+1) &= -2067.70 \quad (\text{تحسين}) \end{aligned} \quad \text{الخطوة ١}$$

$$f(C) = -2067.70 \quad \text{عند} \quad C = [1, 1, 1]^T \quad \text{ضع}$$

$$T = 2[1, 1, 1]^T - [0, 0, 0]^T = [2, 2, 2]^T \quad \text{الخطوة ٢}$$

$$\begin{aligned} f(2+1, 2, 2) &= -884.60 \quad (\text{تحسين أكثر من } -2067.70) \\ f(3, 2+1, 2) &= -416.80 \quad (\text{تحسين}) \\ f(3, 3, 2+1) &= -118.10 \quad (\text{تحسين}) \end{aligned} \quad \text{الخطوة ٤}$$

$$S = [3, 3, 3]^T \quad \text{ضع}$$

$$f(C) = -118.10 \quad \text{عند} \quad B = [1, 1, 1]^T \quad , \quad C = [3, 3, 3]^T \quad \text{الخطوة ٦ ضع}$$

$$T = 2[3, 3, 3]^T - [1, 1, 1]^T = [5, 5, 5]^T \quad \text{الخطوة ٣}$$

$$\begin{aligned} f(5+1, 5, 5) &= -98641.8 \quad (\text{ليس تحسناً فوق } -118.10) \\ f(5-1, 5, 5) &= -27876.2 \quad (\text{ليس تحسناً}) \\ f(5, 5+1, 5) &= -98642.8 \quad (\text{,,} \text{,,}) \\ f(5, 5-1, 5) &= -27875.2 \quad (\text{,,} \text{,,}) \\ f(5, 5, 5+1) &= -98638.3 \quad (\text{,,} \text{,,}) \\ f(5, 5, 5-1) &= -27867.7 \quad (\text{,,} \text{,,}) \end{aligned} \quad \text{الخطوة ٤}$$

$$S = [5, 5, 5]^T \quad \text{ضع}$$

$$f(B) = -118.10 \quad \text{عند} \quad B = [3, 3, 3]^T \quad \text{الخطوة ٥ ضع}$$

الخطوة ١

$$\begin{aligned}
 f(3+1, 3, 3) &= -154.86 & (\text{ليس تحسيناً}) \\
 f(3-1, 3, 3) &= -417.90 & (\text{..} \text{..}) \\
 f(3, 3+1, 3) &= -155.86 & (\text{..} \text{..}) \\
 f(3, 3-1, 3) &= -416.90 & (\text{..} \text{..}) \\
 f(3, 3, 3+1) &= -155.60 & (\text{..} \text{..}) \\
 f(3, 3, 3-1) &= -416.80 & (\text{..} \text{..})
 \end{aligned}$$

$$C = [3, 3, 3]^T \text{ ضع}$$

الخطوة ٢ نقيم المهدف تتابعياً عند كل النقط التي نحصل عليها من ■ ، وذلك بعمل تشويش على واحد أو أكثر من العناصر في ■ بأي من ١ أو -١ ، وهناك ٢٦ تشويشاً ممكناً باستثناء التشويش الصفري . و ؟ !! تقييمات الدوال عندما تصل أحدها إلى أكبر من القيمة $f(B) = -118.10$. كما هو موضح في الجدول ١١ - ١ يحدث هذا عند $[2, 2, 4]^T$ ، لذلك نعدل $B = [2, 2, 4]^T$ عند $f(B) = -13.70$

جدول ١١ - ١

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
2	2	2	-1522.90
2	2	3	-886.20
2	2	4	-13.70
2	3	2	
...	
4	4	3	
4	4	4	

$$f(C) = 11.44 \text{ عند } C = [3, 1, 4]^T \text{ ضع}$$

الخطوة ١

$$\begin{aligned}
 f(2+1, 2, 4) &= 0.60 & (\text{تحسين}) \\
 f(3, 2+1, 4) &= -155.6 & (\text{ليس تحسيناً}) \\
 f(3, 2-1, 4) &= 11.44 & (\text{تحسين}) \\
 f(3, 1, 4+1) &= -2902.66 & (\text{ليس تحسيناً}) \\
 f(3, 1, 4-1) &= -511.06 & (\text{ليس تحسيناً})
 \end{aligned}$$

الخطوة ٣

$$T = 2[3, 1, 4]^T - [2, 2, 4]^T = [4, 0, 4]^T$$

الخطوة ٤

$$\begin{aligned}
 f(4+1, 0, 4) &= -6163.72 & (\text{ليس تحسناً فوق } 11.44) \\
 f(4-1, 0, 4) &= 10.12 & (\text{ليس تحسناً}) \\
 f(4, 0+1, 4) &= -689.32 & (\text{ليس تحسناً}) \\
 f(4, 0-1, 4) &= -693.20 & (\text{ليس تحسناً}) \\
 f(4, 0, 4+1) &= -6165.72 & (\text{ليس تحسناً}) \\
 f(4, 0, 4-1) &= 12.12 & (\text{تحسين})
 \end{aligned}$$

$$S = [4, 0, 3]^T \text{ ضع}$$

$$f(C) = 12.12 \text{ عند } C = [4, 0, 3]^T, \quad B = [3, 1, 4]^T \text{ ضع الخطوة ٦}$$

الخطوة ٣

$$T = 2[4, 0, 3]^T - [3, 1, 4]^T = [5, -1, 2]^T$$

الخطوة ٤

$$\begin{aligned}
 f(5+1, -1, 2) &= -19505.6 & (\text{ليس تحسناً فوق } 12.12) \\
 f(5-1, -1, 2) &= -42.40 & (\text{ليس تحسناً}) \\
 f(5, -1+1, 2) &= -1980.12 & (\text{ليس تحسناً}) \\
 f(5, -1-1, 2) &= -2193.48 & (\text{ليس تحسناً}) \\
 f(5, -1, 2+1) &= -2902.98 & (\text{ليس تحسناً}) \\
 f(5, -1, 2-1) &= -1810.58 & (\text{ليس تحسناً})
 \end{aligned}$$

$$S = [5, -1, 2]^T \text{ ضع}$$

$$f(B) = 12.12 \text{ عند } B = [4, 0, 3]^T \text{ ضع الخطوة ٥}$$

$$\text{الخطوة ١ تؤدي التحركات الاستكشافية حول } \blacksquare \text{ إلى } f(4, 1, 3) = 13.30 \text{ تحسين.}$$

$$f(C) = 13.30 \text{ عند } C = [4, 1, 3]^T \text{ ضع}$$

الخطوة ٣

$$T = 2[4, 1, 3]^T - [4, 0, 3]^T = [4, 2, 3]^T$$

$$\text{الخطوة ٤ لا تؤدي التحركات الاستكشافية حول } T \text{ إلى أي تحسين.}$$

$$S = [4, 2, 3]^T \text{ ضع}$$

$$f(B) = 13.30 \text{ عند } B = [4, 1, 3]^T \text{ ضع الخطوة ٥}$$

جدول ١١ - ٢

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
3	0	2	-1028.68
3	0	3	-519.38
3	0	4	10.12
3	1	2	-1017.76
3	1	3	-511.06
3	1	4	11.44
3	2	2	-884.60
3	2	3	-416.90
3	2	4	0.60
4	0	2	-42.18
4	0	3	12.12
4	0	4	-683.38
4	1	2	-38.40
4	1	4	-689.20
4	2	2	-10.66
4	2	3	2.04
4	2	4	-805.46
5	0	2	-1980.12
5	0	3	-2885.22
5	0	4	-6163.72
5	1	2	-1991.28
5	1	3	-2898.98
5	1	4	-6184.48
5	2	2	-2185.48
5	2	3	-3132.18
5	2	4	-6522.68

الخطوة ١ لا تؤدي التحركات الاستكشافية حول B إلى أي تحسين .

ضع $C = [4, 1, 3]^T$ عند $f(C) = 13.30$

الخطوة ٢ كما هو موضح في الجدول ١١ - ٢ ، لا يؤدي أي من الـ ٢٦ تشويشاً لـ ■ إلى تحسين في قيمة الدالة الهدفية الحالية ، $f(B) = 13.30$. لذلك $[4, 1, 3]^T = \blacksquare$ هو حل الأعداد الصحيحة ، لأن $h = 1$ ، وبدأنا عند النقط الصحيحة $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ في البرنامج المعطى .

لتحسين هذا التقريب ، نختصر h تنافياً إلى 0.1, 0.01, 0.001 ، مبدئين الطريقة من جديد في كل مرة بأقل قيمة ■ . وتعرض النتائج في الجدول ١١ - ٣ . نأخذ $x_1 = 2.946$ ، $x_2 = 2.447$ ، $x_3 = 3.825$ عند $z^* = 17.56$ كحل أمثل

جدول ١١ - ٣

h	النتيجة النهائية			z
	x_1	x_2	x_3	
1	4	1	3	13.30
0.1	3.9	1.4	3.1	16.88
0.01	3.89	2.40	2.82	17.54
0.001	3.825	2.447	2.946	17.56

مسائل مكملّة

Supplementary Problems

حل المسائل ١١ - ٢٣ عددياً ، إما باستخدام مولدات الأعداد العشوائية « أو بالتخمين المسبب لإعطاء تقريب أولى . وكلما أمكن ، حل حسابي (تحليلي) .

١٥ - ١١

$$z = -(2x_1 - 5)^2 - (x_2 - 3)^2 - (5x_3 - 2)^2 \quad \text{تعظيم}$$

١٦ - ١١

$$z = |x_1| + \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2} \quad \text{تصغير}$$

١٧ - ١١

$$z = \frac{8x_1 + 4x_2 - x_1x_2}{(x_1x_2)^2} \quad \text{تصغير}$$

١٨ - ١١

$$z = -\sin x_1 \sin x_2 \sin (x_1 + x_2) \quad \text{تصغير}$$

١٩ - ١١

$$z = (x_1^2 + 2x_2^2)e^{-(x_1^2 + x_2^2)} \quad \text{تعظيم}$$

٢٠ - ١١

$$z = -(x_1 - x_2)^2 - (x_3 - 1)^2 - 1 - 0.02(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 16)^2 \quad \text{تعظيم}$$

٢١ - ١١

$$z = -(x_1 - \sqrt{5})^2 - (x_2 - \pi)^2 - 10 \quad \text{تعظيم}$$

عند x_1 و x_2 أعداد صحيحة

(ملحوظة : انظر المسألة ١١ - ١٢)

٢٢ - ١١ تصغير دالة روزينبروك «

$$z = (1 - x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2.$$

السنة	1930	1940	1950	1960	1970
السكان	4953	7389	11023	16445	24532

اعتماداً على هذه البيانات ، المطلوب تقدير السكان في عام ١٩٨٠ .

(١) افترض أن نمو السكان أُسيّاً ويتبع الصيغة $N = Ae^{mt}$ ، حيث إن N تدل على التعداد ، و t تدل على الزمن .

(٢) عند أى سنة تعداد t ، يكون هناك اختلاف بين القيمة الحقيقية لـ N المعطاة بالبيانات ، والقيمة النظرية $N = Ae^{mt}$ ارمز لهذا الخطأ e_T ، أى أن :

$$e_{1930} = 4953 - Ae^{m(1930)}$$

(٣) حدد الثوابت A ، m بحيث إن

$$e_{1930} + e_{1940} + e_{1950} + e_{1960} + e_{1970} = 0$$

تكون حداً أدنى .

(٤) باستخدام هذه الثوابت A ، m قيم المنحنى الأسيّ النظرى (الذى يسمى عادة منحنى المزيقات الصغرى الأسيّ) عند $t = 1980$ ، وخذ هذا العدد ليكون التعداد المقدر لعام ١٩٨٠

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

بمصفوفة معاملات متماثلة A تكون محدبة فقط إذا كانت A سالبة نصف مؤكدة .

البرمجة غير الخطية
أمثلة متعددة المتغيرات ذو قيود

**Nonlinear Programming: Multivariable
Optimization with Constraints**

STANDARD FORMS الصيغة القياسية

بمعرفة $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ تكون الصيغة القياسية للبرامج غير الخطية ، والتي تحتوي على متساويات قيود فقط هي :

$$\begin{aligned} z &= f(X) && \text{تعظيم} \\ g_1(X) &= 0 && \text{علماً بأن} \\ g_2(X) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ g_m(X) &= 0 \end{aligned} \quad (1-12)$$

عند $m < \infty$ (عدد القيود أقل من عدد المتغيرات) .

وكما في الفصل ١١ ، نحول برامج التصغير إلى برامج تعظيم بضرب الدالة المدفئة في - ١ ، وتكون الصيغة القياسية للبرامج غير الخطية والتي تحتوي على متباينات للقيود فقط هي :

$$\begin{aligned} z &= f(X) && \text{إما تعظيم} \\ g_1(X) &\leq 0 && \text{علماً بأن} \\ g_2(X) &\leq 0 \\ &\dots\dots\dots \\ g_p(X) &\leq 0 && \text{أو} \\ z &= f(X) && \text{تعظيم} \\ g_1(X) &\leq 0 && \text{علماً بأن} \\ g_2(X) &\leq 0 \\ &\dots\dots\dots \\ g_m(X) &\leq 0 \\ X &\geq 0 && \text{عد} \end{aligned} \quad \begin{aligned} (7-12) \\ (3-12) \end{aligned}$$

والصيفتان تكونان متكافئتين : عند $m = p$ فإن (١٢-٢) تصبح في داخل (١٢-٣) ، بموضع $X = U - V$ ، عند $U \geq 0$ and $V \geq 0$ ، وعلى الوجه الآخر تكون (١٢-٣) مثل (١٢-٢) تماماً في الحالة الخاصة $p = m + n$ ،
 حيث $g_{m+i}(X) = -x_i$ (الصيغة (١٢-٣) تكون مناسبة عندما لا تتطلب خطوات الحل أى متغيرات غير سالبة .
 في (١٢-١) ، (١٢-٢) أو (١٢-٣) ، وتكون f دالة غير خطية ، ولكن بعض أو كل قيم λ تكون خطية .
 وتحمل البرامج غير الخطية ، والتي ليست في الصيغة القياسية إما بوضعها في الصيغة (انظر المسائل ١٢-٧ ، ١٢-١٠ ، ١٢-١١) ،
 أو بتطوير طرق الحل المعطاة بأسفل للبرامج من الصيغة القياسية (انظر المسائل ١٢-٨ ، ١٢-٩ ، ١٢-١٢) .

مضروبات لاجرانج : LAGRANGE MULTIPLIERS

حل البرنامج (١٢-١) ، تكون أولاً دالة لاجرانج

$$(١٢-٤) \quad L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(X) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X)$$

حيث إن λ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) تكون ثوابت (مجهولة) تسمى مضروبات لاجرانج ، ثم نحل النموذج ذا $n + m$ معادلة .

$$(١٢-٥) \quad \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j} &= 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

نظريته ١٢-١ إذا وجد حل للبرنامج (١٢-١) ، فإنه يكون ضمن حلول النموذج (١٢-٥) ، على أساس أن كلاً من $f(X)$ ،
 $g_i(X)$ عند $(i = 1, 2, \dots, m)$ لها جميعاً مشتقات جزئية أولى متصلة ، ومصفوفة جاكوب $\nabla g_i(X)$ ،

$$J = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right]$$

تكون من الرتبة m عند $X = X^*$

(انظر المسائل ١٢-١ حتى ١٢-٥) . طريقة مضروبات لاجرانج تكافئ استخدام معادلات القيود لحذف عدد معين من المتغيرات X من الدالة الهدفية ، ثم حل مسألة التعظيم غير المقيدة في المتغيرات X المتبقية .

طريقة نيوتن — رافسون NEWTON-RAPHSON METHOD

حيث إن $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = L(Z)$ غير خطية ، فإنه عادة يكون من غير الممكن حل (١٢-٥) حسابياً (تحليلياً) . ومع ذلك ، وحيث إن حلول (١٢-٥) هي النقاط الساكنة في $L(Z)$ ، وحيث تحدث النهايات العظمى والدنيا (نظرية ١١-٣) في $L(Z)$ بين هذه النقاط ، فإنه من الممكن استخدام طريقة نيوتن — رافسون (الفصل ١١) لتقريب النهاية اليمنى في $L(Z)$ بمعنى النهاية التي تناظر الحل الأمثل في (١٢-١) . وتطبق هنا الصيغة التكرارية

$$(١٢-٦) \quad Z_{k+1} = Z_k - (H_L|_{Z_k})^{-1} \nabla L|_{Z_k}$$

(انظر المسألة ١٢ - ٣)

وهذا المدخل له قيمة محدودة ، لأنه ، وكما في الفصل ١١ ، من الصعب جداً تحديد قيمة مناسبة لـ Z_0 . ولأى قيمة غير صحيحة فإن طريقة نيوتن — رافسون يمكن أن تشتت الحل أو تقترب من النهاية الخاطئة لـ $L(Z)$. ومن الممكن أيضاً (انظر المسألة ١٢ - ١) ، ١٢ - ٤) أن تتقارب الطريقة في حالة عدم وجود حل أمثل .

الدوال الجزائية : PENALTY FUNCTIONS

كمدخل بديل لحل البرنامج (١٢ - ١) الذي يتضمن البرنامج غير المقيد

$$\mathcal{E} = f(X) - \sum_{i=1}^m p_i g_i^2(X) \quad \text{تعظيم} \quad (٧ - ١٢)$$

حيث $p_i > 0$ تكون ثوابت (يمكن أن نختارها) تسمى بالأوزان الجزائية . ويكون حل البرنامج (٧ - ١٢) هو نفسه حل البرنامج (١٢ - ١) عند كل قيمة $g_i(X) = 0$. وللقيم الكبيرة في p_i يكون لحل (٧ - ١٢) كل قيمة في $g_i(X)$ قريبة من الصفر لتجنب الآثار الجانبية على الدالة الهدفية من الحدود $p_i g_i^2(X)$ ، وعندما كل قيمة $p_i \rightarrow \infty$ وكل قيمة $g_i(X) \rightarrow 0$. (انظر المسألة ١٢ - ٦) .

وعملياً .. لا يمكن تطبيق هذه الطريقة حسابياً إلا في حالات نادرة . وبدلاً من ذلك يحل البرنامج (٧ - ١٢) بالتكرار بواسطة بحث المعدل الموصوف في الفصل ١١ ، وفي كل مرة إما بمجموعة جديدة من الأوزان الجزائية الزائدة ، أو بتخفيض حجم خطوة . ويكون كل بحث مغطى بمجموعة أوزان جزائية محددة ، وحجم خطوة معطى هو مرحلة من مراحل الحل . ويكون المتجه الأول للمرحلة المعينة هو المتجه النهائي للمرحلة السابقة لهذه المرحلة . وتختار الأوزان الجزائية للمرحلة الأولى صغيرة ، غالباً $1/50 = 0.02$ ، وغالباً ما يؤخذ حجم الخطوة بواحد .

ويتأثر التقريب في هذه الطريقة بمعدلات الزيادة في الأوزان الجزائية وتخفيض حجم الخطوة . والقرارات التي تحكم هذه المعدلات هي نوع من الفن أكثر منها علماً . (انظر المسألة ١٢ - ٧)

شروط كون — توكر KUHN-TUCKER CONDITIONS

لحل البرنامج (١٢ - ٣) ، نكتب أولاً شروط اللاسلبية ، $-x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0, \dots, -x_n \leq 0$ ، بحيث تكون مجموعة القيود هي $m+n$ متباينة كل منها له علامة أقل من أو يساوى ، ثم نضيف المتغيرات المساعدة $x_{n+1}^2, x_{n+2}^2, \dots, x_{m+n}^2$ على التوالي للأطراف اليسرى من القيود ، ثم نحول كل متباينة إلى متساوية . وهنا تضاف المتغيرات المساعدة كتريعات الحدود لضمان عدم سلبيتها ، ثم نكون دالة لاجراج

$$L = f(X) - \sum_{i=1}^m \lambda_i [g_i(X) + x_{n+i}^2] - \sum_{i=n+1}^{m+n} \lambda_i [-x_i + x_{n+i}^2] \quad (٨ - ١٢)$$

حيث $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+n}$ تكون مضروباً لاجراج . وأخيراً نحل النموذج .

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 2n+m) \quad (٩ - ١٢)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m+n) \quad (١٠ - ١٢)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m+n) \quad (١١ - ١٢)$$

ولكنون (١٢-٩) حتى (١٢-١١) شروط كون - توكر للبرنامج (١٢-٢) أو (١٢-٣) . وتنتج المجموعتين (١٢-٩) ، (١٢-١٠) مباشرة من نظرية مضروبوات لاجراج ، وتعرف المجموعة (١٢-١١) باسم المؤهلات المقيدة . ومن بين حلول شروط كون - توكر يكون حل البرنامج (١٢-٣) إذا كانت $f(X)$ ، وكل قيمة $g_i(X)$ لها مشتقة أولى متصلة (انظر المسألة (١٢-١٠) .

METHOD OF FEASIBLE DIRECTIONS طريقة الاتجاهات الممكنة

من طريقة ذات خمس خطوات لحل البرنامج (١٢-١) . وتطبق هذه الطريقة عندما تكون المنطقة الممكنة لها قيم داخلية . لم تتقارب من الحد الأعلى الشامل فقط عندما يكون التقريب الأول « قريباً » من الحل (انظر المسائل ١٢-٣ ، ١٢-١٢) . ولا توجد قيم داخلية للمنطقة الممكنة إذا كان الثتان من متباينات القيود ناتجين من التقارب في متساويات القيود (انظر المسألة ١٢-١١) .

الخطوة ١ : حدد تقريباً أولياً ممكناً للحل ، وعرّفه بالحرف B .

الخطوة ٢ : حل البرنامج الخطي التالي في المتغيرات d_1, d_2, \dots, d_{n+1} :

$$\begin{aligned} \text{تعظيم} \quad & \text{■} = d_{n+1} \\ \text{علماً بأن} \quad & -\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_B d_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_B d_2 - \dots - \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_B d_n + d_{n+1} \leq 0 \\ (١٢-١٢) \quad & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \Big|_B d_1 + \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \Big|_B d_2 + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \Big|_B d_n + k_1 d_{n+1} \leq -g_1(B) \\ & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \Big|_B d_1 + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \Big|_B d_2 + \dots + \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \Big|_B d_n + k_2 d_{n+1} \leq -g_2(B) \\ & \dots \dots \dots \\ & \frac{\partial g_p}{\partial x_1} \Big|_B d_1 + \frac{\partial g_p}{\partial x_2} \Big|_B d_2 + \dots + \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \Big|_B d_n + k_p d_{n+1} \leq -g_p(B) \\ & d_j \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n+1) \quad \text{عند} \end{aligned}$$

وهنا k_i ($i = 1, 2, \dots, p$) تكون صفراً إذا كانت $g_i(X)$ خطية ، وتكون واحداً إذا كانت $g_i(X)$ غير خطية .

الخطوة ٣ : إذا كانت $d_{n+1} = 0$ ، فإن $X^* = B$ وإذا لم تكن كذلك ، فاذهب إلى الخطوة ٤ .

الخطوة ٤ : ضع $\text{■} = [d_1, d_2, \dots, d_n]^T$ ، حدد قيمة غير سالبة لـ λ ، والتي تعظم $f(B + \lambda D)$ ، بينما نحافظ على أن تكون $B + \lambda D$ ممكنة ، وأطلق على هذه القيمة λ^* .

الخطوة ٥ : عرّف $B = B + \lambda^* D$ ، ثم عُد إلى الخطوة ٢ . (انظر المسائل ١٢-٣ حتى ١٢-١٥)

مسائل محلولة

Solved Problems

$$z = 2x_1 + x_1x_2 + 3x_2 \quad \text{تعظيم} \quad ١ - ١٢$$

$$x_1^2 + x_2 = 3 \quad \text{علماً بأن}$$

من الواضح أنه لأي قيمة سالبة كبيرة x_1 توجد قيمة سالبة كبيرة x_2 ، بحيث تحقق معادلة القيود، ولكن $z = x_1x_2 \rightarrow \infty$ ولا يوجد حد أعلى شامل.

$$z = x_1 + x_2 + x_3 \quad \text{تصغير} \quad ٢ - ١٢$$

$$x_1^2 + x_2 = 3 \quad \text{علماً بأن}$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7$$

يكافئ هذا البرنامج التصغير غير المقيد لـ

$$z = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_1 + 4)$$

والذي يكون من الواضح أن له حلاً. ومن الممكن تطبيق طريقة مضروبوات لاجرانج على البرنامج الأصلي القياسي:

$$z = -x_1 - x_2 - x_3 \quad \text{تعظيم}$$

$$(١) \quad x_1^2 + x_2 - 3 = 0 \quad \text{علماً بأن}$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7 = 0$$

$$\text{وهنا } f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 - x_2 - x_3, \text{ متغيرات } m = 2 \text{ قيدان } n = 3$$

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 - 3 \quad g_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7$$

وتصبح دالة لاجرانج

$$L = (-x_1 - x_2 - x_3) - \lambda_1(x_1^2 + x_2 - 3) - \lambda_2(x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7)$$

ويصبح النموذج (١٢ -) هو

$$(٢) \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 - 2x_1\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$(٣) \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -1 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$$

$$(٤) \quad \frac{\partial L}{\partial x_3} = -1 - 2\lambda_2 = 0$$

$$(٥) \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(x_1^2 + x_2 - 3) = 0$$

$$(٦) \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7) = 0$$

وعمل على التوالى (١) فى λ_2 ، (٢) فى λ_1 ، (٣) فى x_1 ، (٤) فى x_2 ، (٥) فى x_3 ، نحصل على الحل الوحيد

$$\lambda_2 = -0.5, \lambda_1 = 0.5, x_1 = -0.5, x_2 = 2.75, \text{ and } x_3 = -0.375,$$

$$\mathbf{z} = -x_1 - x_2 - x_3 = -(-0.5) - 2.75 - (-0.375) = -1.875 \quad \text{عند}$$

وحيث إن المشتقات الجزئية الأولى لـ $f(x_1, x_2, x_3)$, $g_1(x_1, x_2, x_3)$, and $g_2(x_1, x_2, x_3)$ كل متصلة وحيث إن

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

من الرتبة ٢ فى أى مكان (العمودان الأخيران مستقلان خطياً فى كل مكان) ، فإن أى من $x_1 = -0.5$, $x_2 = 2.75$, $x_3 = -0.375$ تكون حلاً أمثل للبرنامج (١) ، أو لا يوجد حل أمثل . وبالتحقق من النقط الممكنة فى المنطقة حول $(-0.5, 2.75, -0.375)$ نجد أن هذه النقطة هى فى الحقيقة موقع الحد الأعلى (الشامل) للبرنامج (١) . لذلك ، فإنه يكون موقع الحد الأدنى الشامل للبرنامج الأصلى عند $\mathbf{z}^* = -(-1.875) = 1.875$.

$$\mathbf{z}^* = -(-1.875) = 1.875$$

$$z = \sin(x_1 x_2 + x_3) \quad \text{تعظيم}$$

$$-x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 = 5 \quad \text{علماً بأن}$$

١٢ - ٣

كما فى المسألة ١٢ - ٢ . فإنه من الممكن التقرير مسبقاً أنه يوجد حل أمثل . وفى الحقيقة بالبحث فإن النقط $x_1 = 2\sqrt{5}/\pi$, $x_2 = 0$, $x_3 = \pi/2$ تحقق معادلة القيد . ونجعل $z = 1$ ، لذلك فإنها تمثل حداً أعلى شاملاً .

دعنا نطبق طريقة مضروب لاجراج على هذه المسألة ، تكون دالة لاجراج هى :

$$L = \sin(x_1 x_2 + x_3) - \lambda_1(x_1^2 x_3^2 - x_1 x_2^2 - 5)$$

لذلك فإن معادلات لاجراج تكون

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 \cos(x_1 x_2 + x_3) - 2\lambda_1 x_1 x_3^2 + \lambda_1 x_2^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 \cos(x_1 x_2 + x_3) + 3\lambda_1 x_1 x_2^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = \cos(x_1 x_2 + x_3) - 2\lambda_1 x_1^2 x_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(x_1^2 x_3^2 - x_1 x_2^2 - 5) = 0$$

وحيث إن هذه المعادلات لا يمكن أن تُحل جبرياً ، فإننا نستخدم مدخل نيوتن - رافسون . ويكون المنهج المتدرج ومصفوفة هسى لدالة لاجراج كالآتى :

$$\nabla L = \begin{bmatrix} x_2 \cos(x_1 x_2 + x_3) - 2\lambda_1 x_1 x_3^2 + \lambda_1 x_2^2 \\ x_1 \cos(x_1 x_2 + x_3) + 3\lambda_1 x_1 x_2^2 \\ \cos(x_1 x_2 + x_3) - 2\lambda_1 x_1^2 x_3 \\ -(x_1^2 x_3^2 - x_1 x_2^2 - 5) \end{bmatrix}$$

$$H_L = \begin{bmatrix} -x_2^2 \sin(x_1 x_2 + x_3) - 2\lambda_1 x_3^2 & & & \\ \cos(x_1 x_2 + x_3) & -x_1^2 \sin(x_1 x_2 + x_3) + 6\lambda_1 x_1 x_2 & & \\ -x_1 x_2 \sin(x_1 x_2 + x_3) + 3\lambda_1 x_3^2 & & & \\ -x_2 \sin(x_1 x_2 + x_3) - 4\lambda_1 x_1 x_3 & -x_1 \sin(x_1 x_2 + x_3) & -\sin(x_1 x_2 + x_3) - 2\lambda_1 x_1^2 & \\ -2x_1 x_3^2 + x_3^3 & 3x_1 x_3^2 & -2x_1^2 x_3 & \end{bmatrix}$$

، قد حددت الحدود الكبيرة في القطر العلوي للمصفوفة المتائلة لتوفير المساحة . و نأخذ بالاختيار

$$Z_0 = [-1, 1, 2.5, 1]^T$$

نحسب كما يلي (بتقريب جميع الحسابات إلى أربعة أرقام مؤكدة)

$$\nabla L|_{Z_0} = \begin{bmatrix} 13.57 \\ -3.071 \\ -4.929 \\ -2.25 \end{bmatrix} \quad H_L|_{Z_0} = \begin{bmatrix} -13.50 & 4.068 & 9.003 & 13.5 \\ 4.068 & -6.997 & 0.9975 & -3 \\ 9.003 & 0.9975 & -2.998 & -5 \\ 13.5 & -3 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{المحاولة الأولى}$$

$$(H_L|_{Z_0})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.05737 & 0.03845 & 0.1318 & 0.03194 \\ 0.03845 & -0.08206 & 0.1531 & -0.03889 \\ 0.1318 & 0.1531 & 0.2641 & -0.09044 \\ 0.03194 & -0.03889 & -0.09044 & 0.1040 \end{bmatrix}$$

$$Z_1 = Z_0 - (H_L|_{Z_0})^{-1} \nabla L|_{Z_0} = [-0.9388, 0.8931, 2.279, 0.2353]^T$$

$$\nabla L|_{Z_1} = \begin{bmatrix} 2.579 \\ -0.6503 \\ -0.8158 \\ -0.2479 \end{bmatrix} \quad H_L|_{Z_1} = \begin{bmatrix} -3.236 & 1.524 & 1.128 & 10.47 \\ 1.524 & -2.058 & 0.9309 & -2.247 \\ 1.128 & 0.9309 & -1.406 & -4.018 \\ 10.47 & -2.247 & -4.018 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{المحاولة الثانية}$$

$$(H_L|_{Z_1})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.8072 & 1.224 & 1.418 & 0.01391 \\ 1.224 & 1.574 & 2.309 & -0.09969 \\ 1.418 & 2.309 & 2.404 & -0.1569 \\ 0.01391 & -0.09969 & -0.1569 & 0.03573 \end{bmatrix}$$

$$Z_2 = Z_1 - (H_L|_{Z_1})^{-1} \nabla L|_{Z_1} = [-1.064, 0.6190, 2.046, 0.01545]^T \quad \text{ومن ثم}$$

وبالاستمرار في هذه الطريقة نحصل تباعاً على :

$$Z_3 = [-1.053, 0.5067, 2.099, 0.001369]^T$$

$$Z_4 = [-1.053, 0.4982, 2.095, 0.000009]^T$$

$$Z_5 = [-1.053, 0.4981, 2.095, 0]^T$$

وحيث إن عناصر Z استقرت لثلاثة أرقام مؤكدة ، فإننا نأخذ ، $x_1^* = -1.05$ ، $x_2^* = 0.498$ ، $x_3^* = 2.10$ ، and $\lambda_1 = 0$ ، عند

$$z^* = \sin(x_1^* x_2^* + x_3^*) = 1.00$$

لاحظ أن طريقة نيوتن - رافسون قد اقترنت إلى حد أعلى شامل يختلف عن الحد الأعلى المحدد أصلاً .

١٧ - بدون النظر إلى المسألة ١٢ - ١ ، استخدم طريقة نيوتن - رافسون في

$$z = 2x_1 + x_1x_2 + 3x_2 \quad \text{تعظيم}$$

$$x_1^2 + x_2 = 3 \quad \text{علماً بأن}$$

$$L = (2x_1 + x_1x_2 + 3x_2) - \lambda_1(x_1^2 + x_2 - 3). \quad \text{هنا}$$

$$\nabla L = \begin{bmatrix} 2 + x_2 - 2\lambda_1 x_1 \\ x_1 + 3 - \lambda_1 \\ -x_1^2 - x_2 + 3 \end{bmatrix} \quad H_L = \begin{bmatrix} -2\lambda_1 & 1 & -2x_1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2x_1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{لذلك}$$

$$\text{نأخذ اختيارياً } Z_0 = [1, 1, 1]^T, \quad \text{ونحسب:}$$

المحاولة الأولى

$$\nabla L|_{Z_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad H_L|_{Z_0} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (H_L|_{Z_0})^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Z_1 = Z_0 - (H_L|_{Z_0})^{-1} \nabla L|_{Z_0} = [1/3, 10/3, 10/3]^T$$

المحاولة الثانية

$$\nabla L|_{Z_1} = \begin{bmatrix} 28/9 \\ 0 \\ -4/9 \end{bmatrix} \quad H_L|_{Z_1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -20 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad (H_L|_{Z_1})^{-1} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} -9 & 6 & -9 \\ 6 & -4 & -66 \\ -9 & -66 & -9 \end{bmatrix}$$

$$Z_2 = Z_1 - (H_L|_{Z_1})^{-1} \nabla L|_{Z_1} = [2/3, 8/3, 11/3]^T$$

وبالاستمرار لمحاولتين تاليتين نحصل على

$$Z_3 = [0.6333, 2.6, 3.633]^T$$

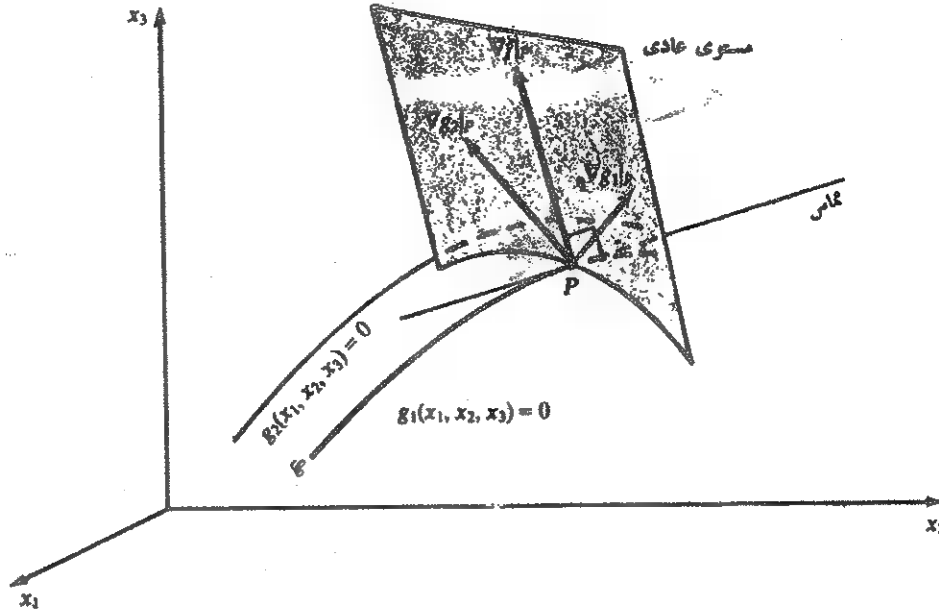
$$Z_4 = [0.6330, 2.599, 3.633]^T$$

ولما كانت عناصر Z استقرت لثلاثة أرقام مؤكدة ، فإننا نأخذ ، $x_1^* = 0.633$ ، $x_2^* = 2.60$ ، $\lambda_1^* = 3.63$ ، عند

$$z^* = 2x_1^* + x_1^*x_2^* + 3x_2^* = 10.7$$

بالتعبير عن قيمة z كدالة (مكعبة) في x_1 فقط ، فإنه من السهل معرفة أنه في هذه الحالة الخاصة اقترنت طريقة نيوتن - رافسون من الحد الأعلى المحلى .

١٢ - ٥ ناقش باستخدام الهندسة التحليلية ، طريقة مضروبوات لاجرانج في ثلاثة أبعاد



بالرجوع إلى شكل ١٢ - ١ تكون المسألة هي تعظيم الدالة $f(x_1, x_2, x_3)$ حول منحنى الفراغ \mathcal{C} ، والذي فيه السطحان يتقاطعان .

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{and} \quad g_2(x_1, x_2, x_3) = 0$$

دع P لتكون النقطة في \mathcal{C} التي يحدث عنها الحد الأعلى . من المسألة ١١ - ٧ فإننا نعرف أن المتجه f يجب أن يكون له مسقط صفري على المماس لـ \mathcal{C} عند النقطة P ؛ وإلا فإن أي إزاحة صغيرة على المنحنى تنتج قيمة كبيرة للدالة . لذلك يجب أن تقع $\nabla f|_P$ على المستوى العادي للمنحنى عند P ، ولكن هذا المتجه يعبر عنه بالتكوين الخطي للسطحين العاديين عند P ، بمعنى $\nabla g_1|_P$ and $\nabla g_2|_P$ ،

$$\nabla f|_P = \lambda_1 \nabla g_1|_P + \lambda_2 \nabla g_2|_P \quad \text{or} \quad \nabla L|_P = 0$$

(١)

$$L = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2.$$

حيث إن :

وتكون المعادلات القياسية المثلة في (١) هي معادلات لاجرانج الثلاث الأولى (١٢ - ٣) ؛ ونحدد معادلتنا لاجرانج الباقيتان متطلبات ، وهي أن P تقع فعلياً على \mathcal{C} .

١٢ - ٩ استخدم مدخل الدالة الجزائية في

$$z = -4 - 3(1 - x_1)^2 - (1 - x_2)^2 \quad \text{تعظيم}$$

$$3x_1 + x_2 = 5 \quad \text{علماً بأن}$$

وهنا تصبح (١٢ - ٧) :

تعظيم

$$\hat{z} = -4 - 3(1 - x_1)^2 - (1 - x_2)^2 - p_1(3x_1 + x_2 - 5)^2$$

وبرنامج التعظيم هنا وغير المقيد في المتغيرين x_1 and x_2 هو من البساطة بحيث يمكن حله حسابياً . بوضع $\nabla z = 0$ نحصل على :

$$\begin{aligned}(1+3p_1)x_1 + p_1x_2 &= 1+5p_1 \\ 3p_1x_1 + (1+p_1)x_2 &= 1+5p_1\end{aligned}$$

بحل هذه المعادلات في x_1 and x_2 بالنسبة لـ p_1 نحصل على

$$x_1 = x_2 = \frac{1+5p_1}{1+4p_1} = \frac{(1/p_1)+5}{(1/p_1)+4}$$

وحيث إن مصفوفة هسي هي

$$H = \begin{bmatrix} -6-18p_1 & -6p_1 \\ -6p_1 & -2-2p_1 \end{bmatrix}$$

تكون سالبة مؤكدة لكل القيم الموجبة لـ p_1 . فكون z دالة محدبة محدبة . وتكون النقطة الساكنة الوحيدة لها هي الحد الأعلى الشامل . لذلك إذا آلت $p_1 \rightarrow +\infty$ نحصل على الحل الأمثل للبرنامج الأصلي

$$x_1 \rightarrow \frac{5}{4} = x_1^*, \quad x_2 \rightarrow \frac{5}{4} = x_2^*$$

$$z^* = -4 - 3(1-x_1^*)^2 - (1-x_2^*)^2 = -4.25.$$

عند

٧ - ١٢ استخدم مبدل الدالة الجزائية في

$$z = (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - 1)^2 + 1 \quad \text{تصغير :}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 16 \quad \text{علماً بأن :}$$

بوضع هذا البرنامج في الصيغة القياسية ، يكون

$$z = -(x_1 - x_2)^2 - (x_3 - 1)^2 - 1 \quad \text{تعظيم :}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 16 = 0 \quad \text{علماً بأن :}$$

(١)

للبرنامج (١) يصبح (٧ - ١٢)

(٢)

$$z = -(x_1 - x_2)^2 - (x_3 - 1)^2 - 1 - p_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 16)^2 \quad \text{تعظيم :}$$

المرحلة الأولى : نضع $p_1 = 0.02$ في (٢) . ونعتبر البرنامج

(٣)

$$z = -(x_1 - x_2)^2 - (x_3 - 1)^2 - 1 - 0.02(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 16)^2 \quad \text{تعظيم :}$$

نأخذ بالاختيار $[0, 0, 0]^T$ كمنتهى أولى ، ونضع $h = 1$. ونطبق بحث التخط (فصل ١١) على البرنامج (٣) ، فتكون النتيجة بعد 78 تقييم دوال هي $[1, 1, 1]^T$ عند

$$f(1, 1, 1) = -1 \quad \text{و} \quad g_1(1, 1, 1) = -13$$

المرحلة الثانية : حيث إن $g_1(1, 1, 1) = -13 \neq 0$ ، فإن القيد في البرنامج (١) لا يتحقق . ولتحسين هذا الموقف ، نزيد قيمة p_1 في (٢) إلى 0.2 ونعتبر البرنامج

$$z = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2 - 1 - 0.2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 16)^2 \quad \text{تعظيم}$$

بأخذ $[1, 1, 1]^T$ من المرحلة الأولى كتقريب أولى ، نطبق بحث النقط على (٤) ، ونحافظ على $h = 1$.
تظل النتيجة $[1, 1, 1]^T$ ، مما يدل على أنه لا يمكن أن يتحقق القيد بالأعداد الصحيحة .

المرحلة الثالثة : حيث إن زيادة p_1 لا تحسن الحل الحالي ، نعود إلى البرنامج (٣) ، ونخفض h إلى 0.1 . ونعمل بحث
نقط جديد مرة أخرى باستخدام $[1, 1, 1]^T$ كتقريب أولى . وتكون النتيجة

$$f(1.5, 1.5, 1) = -1 \quad \text{و} \quad g_1(1.5, 1.5, 1) = 0.1875 \quad \text{عند}$$

جدول ١٢ - ١

المرحلة	p_1	h	المتجه الباقي			$f(X)$	$g_1(X)$
			x_1	x_2	x_3		
1	0.02	1	1	1	1	-1	-13
2	0.2	1	1	1	1	-1	-13
3	0.02	0.1	1.5	1.5	1	-1	0.1875
4	0.2	0.1	1.5	1.5	1	-1	0.1875
5	0.02	0.01	1.49	1.5	1	-1.000	-0.0623
6	0.2	0.01	1.49	1.5	1.01	-1.000	-0.0113
7	0.2	0.001	1.496	1.496	1.002	-1.000	-0.0039
8	2	0.001	1.496	1.496	1.003	-1.000	0.0012
9	20	0.001	1.496	1.496	1.003	-1.000	0.0012

بالاستمرار في هذه الطريقة . نكمل الجدول ١٢ - ١ . وباستخدام نتائج المرحلة ٩ ، نستنتج أن $x_3 = 1.003$ ،

عند $x_1 = 1.496$ ، $x_2 = 1.496$ ، $z^* = +1.000$ ، وهذا يقرب الحل الأمثل إلى برنامج التصغير الأصلي .

وبالتفتيش يكون الحل الصحيح هو

$$x_1 = x_2 = \left(\frac{15}{2}\right)^{1/3} = 1.4963 \quad x_3 = 1$$

عند $z^* = 1$ ، وهذا يؤدي مدخل الدالة الجزائية إلى أربعة أرقام مؤكدة ، وهذه نتيجة جيدة .

$$z = -x_1^2 x_2^2 - x_1^2 x_3^2 - 1 \quad \text{تعظيم}$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4 = 0 \quad \text{علماً بأن}$$

$$x_1 x_3 - 19 = 0$$

كل المتغيرات أعداد صحيحة

تطبق طريقة الدالة الجزائية على هذا البرنامج ، على أساس أن بحث الخط يبدأ من التقريب الأول ذي الأعداد الصحيحة ، مثلاً $[0, 0, 0]^T$. وباستخدام $h = 1$ خلال البحث . ومنه نستنتج الجدول ١٢ - ٢ ، ونجد أن $z^* = -1091$ عند $x_1^* = 1, x_2^* = -27, x_3^* = 19$,

جدول ١٢ - ٢

المرحلة	p_1	p_2	h	المتجه النهائي X			$f(X)$	$g_1(X)$	$g_2(X)$
				x_1	x_2	x_3			
1	0.02	0.02	1	4	0	0	-1	0	-19
2	0.02	0.2	1	4	0	0	-1	0	19
3	0.02	2	1	1	-1	12	-146	31	-7
4	0.2	20	1	1	-11	17	-411	26	-2
5	2	200	1	1	-24	19	-938	6	0
6	20	200	1	1	-27	19	-1091	0	0

٩ - ١٢ اشرح كيف يمكن تعديل الدالة الجزائية لحل البرنامج (١٢ - ١) إذا أضيف شرط اللاسلبية .
 احصل على التقريب الأول بعناصر لا سلبية فقط ، ثم قيد التحركات الاستكشافية للمتجهات التي تحقق شرط اللاسلبية .
 وهذا يمكن تحقيقه ، وذلك بجعل الدالة المدفئة دالة جزائية عندما يحدث خرق لشرط اللاسلبية ، بمعنى أن $f(X)$ تُقيّم بقيمة كبيرة سلبية ، ربما -1×10^{30} ، عندما يكون أى عنصر في المتجه المشوش X سالباً .

١٠ - ١٢ حل البرنامج التالي باستخدام شروط كون - توكر :

$$z = x_1^2 + 5x_2^2 + 10x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 12x_2x_3 - 2x_1 + 10x_2 + 5x_3 \quad \text{تعظيم}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4 \quad \text{علماً بأن :}$$

كل المتغيرات لا سلبية

نبدأ أولاً بالتحويل إلى النموذج (١٢ - ٣) ، ثم ندخل مربعات المتغيرات المساعدة ، فنحصل على

$$z = -x_1^2 - 5x_2^2 - 10x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_2x_3 + 2x_1 - 10x_2 - 5x_3 \quad \text{تصغير}$$

$$-x_1 - 2x_2 - x_3 + 4 + x_1^2 = 0 \quad \text{علماً بأن :}$$

$$-x_1 + x_3^2 = 0$$

$$-x_2 + x_2^2 = 0$$

$$-x_3 + x_3^2 = 0$$

لهذا البرنامج تكون دالة لاجرانج هي

$$L = -x_1^2 - 5x_2^2 - 10x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_2x_3 + 2x_1 - 10x_2 - 5x_3$$

$$- \lambda_1(-x_1 - 2x_2 - x_3 + 4 + x_1^2) - \lambda_2(-x_1 + x_3^2) - \lambda_3(-x_2 + x_2^2) - \lambda_4(-x_3 + x_3^2)$$

وبأخذ المشتقات الموضحة في (١٢ - ٩) ، (١٠ - ١٢) نحصل على

$$\begin{aligned}
 (١) \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} &= -2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\
 (٢) \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} &= -10x_2 + 4x_1 + 12x_3 - 10 + 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\
 (٣) \quad \frac{\partial L}{\partial x_3} &= -20x_3 - 6x_1 + 12x_2 - 5 + \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\
 (٤) \quad \frac{\partial L}{\partial x_4} &= -2\lambda_1 x_4 = 0 \\
 (٥) \quad \frac{\partial L}{\partial x_5} &= -2\lambda_2 x_5 = 0 \\
 (٦) \quad \frac{\partial L}{\partial x_6} &= -2\lambda_3 x_6 = 0 \\
 (٧) \quad \frac{\partial L}{\partial x_7} &= -2\lambda_4 x_7 = 0 \\
 (٨) \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= 1 + 2x_2 + x_3 - x_1^2 - 4 = 0 \\
 (٩) \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= x_1 - x_2^2 = 0 \\
 (١٠) \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} &= x_2 - x_3^2 = 0 \\
 (١١) \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_4} &= x_3 - x_4^2 = 0
 \end{aligned}$$

يمكن تبسيط المعادلات . عيّن

$$s_1 = x_1^2$$

المعادلات من (٤) إلى (٧) تتضمن على التوالي أن إما λ_1 or x_4 ، إما λ_2 or x_5 ، إما λ_3 or x_6 ، إما λ_4 or x_7 ، تساوى صفراً ، ولكن من (٩) حتى (١٢) تكون صفرية إذا كانت فقط s_1 ، x_1 ، x_2 ، x_3 صفرية على التوالي . لذلك فإن المعادلات من (٤) حتى (٧) ، من (٩) حتى (١٢) تكون مكافئة للنموذج

$$\begin{aligned}
 (١٣) \quad \lambda_1 s_1 &= 0 \\
 \lambda_2 x_1 &= 0 \\
 \lambda_3 x_2 &= 0 \\
 \lambda_4 x_3 &= 0
 \end{aligned}$$

ويوجد ١٦ حلاً لهذا النموذج .

أحد هذه الحلول هو $s_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = x_3 = 0$. بالتعويض بهذه القيم في (٨) ، (١) ، (٢) ، (٣) والتبسيط ، نحصل على النموذج الخطي

$$\begin{aligned}
 x_1 + 2x_2 &= 4 \\
 -2x_1 + 4x_2 + \lambda_1 &= -2 \\
 4x_1 - 10x_2 + 2\lambda_1 &= 10 \\
 -6x_1 + 12x_2 + \lambda_1 + \lambda_4 &= 5
 \end{aligned}$$

الذى له الحل الوحيد $x_1 = 2.941$, $x_2 = 0.5294$, $\lambda_1 = 1.764$, and $\lambda_4 = 14.53$. وهذه النتائج مسجلة في الصف 10 من الجدول ١٢ - ٣ (الأرقام الثقيلة في الجدول تناظر حلول (١٣)).

كحل آخر لـ (١٣) هو $s_1 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$. ، بالتعويض بهذه القيم في (٨) ، (١) ، (٢) ، (٣) والتبسيط ، نحصل على النموذج الخطي

$$\begin{aligned} 0 &= 4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= -2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 &= 10 \\ \lambda_1 + \lambda_4 &= 5 \end{aligned}$$

الذى ليس له أى حل ، كما هو مبين في الصف 16 في الجدول ١٢ - ٣ . والاحتمالات الأخرى تعامل بالمثل ، وتبين النتائج في الجدول ١٢ - ٣ .

الصف الوحيد في الجدول ١٢ - ٣ الذى فيه مداخلات لا سلبية لكل المتغيرات ، كما هو مطلوب لشرط كون - توكر ، هو الصف 10 .. والآن .. حيث إن $z = f(X)$ و $g_1(X) = -x_1 - 2x_2 - x_3 + 4$ ،

لها مشتقات أولى جزئية متصلة ، فإن أحد شروط كون - توكر يجب أن تعكس الحل الأمثل لبرنامج التعظيم ، ولكن شروط كون - توكر هنا لها حل وحيد ، وبالتالي $x_1^* = 2.941$ ، $x_2^* = 0.5294$ ، $x_3^* = 0$ تعطي $z^* = 3.235$ لبرنامج التصغير الأصلي .

جدول (١٢ - ٣)

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	x_1	x_2	x_3	s_1
0	0	0	0	11.5	-3	-5.5	-4
0	0	0	11	-5	-3	0	-15
0	0	6	0	17.5	0	-5.5	-4
0	0	6	11	1	0	0	-3
0	-1.643	0	0	0	-4.643	-3.036	-16.32
0	-2	0	17	0	-1	0	-2
0	-3.5	13	0	0	0	-0.25	-4.25
0	-2	10	5	0	0	0	-4
0.3809	0	0	0	14.36	-2.238	-5.881	0
1.764	0	0	14.53	2.941	0.5294	0	0
-3.2	0	18.8	0	6.3	0	-2.3	0
6	0	-8	11	4	0	0	0
6.623	-8.738	0	0	0	1.507	0.9855	0
15	-25	0	-34	0	2	0	0
85	-63	-208	0	0	0	4	0
...	0	0	0	0

١٢ - ١١ حول البرنامج التالي إلى النموذج (١٢ - ٣) :

$$z = 12x_1^2 + 2.8x_2^2 + 55.2x_3^2 - 5.6x_1x_2 - 5.6x_2x_1 + 23x_1x_3 + 23x_3x_1 - 12x_2x_3 - 12x_3x_2$$

(١) تصغير :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10\,000$$

(٢) علماً بأن :

$$9x_1 + 7x_2 + 10x_3 \geq 80\,000$$

كل المتغيرات لا سلبية

بضرب الدالة الهدفية في -1 ، نحصل على

$$z = -12x_1^2 - 2.8x_2^2 - 55.2x_3^2 + 5.6x_1x_2 + 5.6x_2x_1 - 23x_1x_3 - 23x_3x_1 + 12x_2x_3 + 12x_3x_2$$

(٣) تعظيم :

وتكون متباينة القيد مكافئة للمتساويتين

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 10\,000 \quad , \quad -x_1 - x_2 - x_3 \leq -10\,000$$

ومن ثم فإن مجموعة القيود يمكن أن تعطى في

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 10\,000 &\leq 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 10\,000 &\leq 0 \\ -9x_1 - 7x_2 - 10x_3 + 80\,000 &= 0 \end{aligned}$$

(٤)

الاصطلاحات الرياضية (٣) ، (٤) بإضافة شروط اللاسلبية على المتغيرات تمثل الصيغة القياسية لهذه المسألة . ويمكن الآن حل المسألة باستخدام شروط كون - توكر (انظر المسألة ١٢ - ٣٣) . وهناك حل آخر يُعطى في المسألة (١٢ - ١٢) :

١٢ - ١٢ كيف يمكن استخدام مدخل الدالة الجزئية في حل المسألة ١٢ - ١١ ؟

يمكن أن يتحول القيد الثاني (٢) في المسألة (١٢ - ١١) إلى متساوية بطرح المتغير الزائد x_4 من الطرف الأيسر . ويمكن بعد ذلك حل النموذج المتكون من (٣) ، (١) ، (٢) بمدخل الدالة الجزئية المعدل ، كما في المسألة (١٢ - ٩) .

١٢ - ١٣ استخدام طريقة الاتجاهات الممكنة في

$$z = x_1 + x_2 \quad \text{تعظيم :}$$

$$x_2x_1 - 2x_2 \leq 3 \quad \text{علماً بأن :}$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 24$$

كل المتغيرات لا سلبية

ضع (١٢ - ٢) في الصيغة القياسية ، ويكون البرنامج هو

$$\begin{aligned} z &= x_1 + x_2 \quad \text{تعظيم :} \\ x_2x_1 - 2x_2 - 3 &\leq 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 24 &\leq 0 \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

(١) علماً بأن :

و هنا $f(X) = x_1 + x_2$, $g_1(X) = x_2x_1 - 2x_2 - 3$, $g_2(X) = 3x_1 + 2x_2 - 24$, $g_3(X) = -x_1$, and $g_4(X) = -x_2$;

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 & \frac{\partial f}{\partial x_2} = 1 \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} = x_2 & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = x_1 - 2 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} = 3 & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = 2 \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} = -1 & \frac{\partial g_3}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial g_4}{\partial x_1} = 0 & \frac{\partial g_4}{\partial x_2} = -1 \end{array}$$

وأكثر من ذلك $g_1(X)$ تكون غير خطية ، بينما $g_2(X)$, $g_3(X)$, and $g_4(X)$ تكون كلها خطية ؛ لذلك

$$k_1 = 1 \text{ and } k_2 = k_3 = k_4 = 0$$

في البرنامج (١٢ - ١٢) .

الخطوة ١ : اختصارياً نعطي ■ قيمة أولية هي $[1, 1]^T$ ؛ والتي تكون ممكنة .

الخطوة ٢ : عند هذه القيمة لـ ■ يصبح البرنامج (١٢ - ١٢)

$$\begin{array}{ll} z = d_3 & \text{تعظيم} \\ -d_1 - d_2 + d_3 \leq 0 & \text{علماً بأن :} \\ d_1 - d_2 + d_3 \leq 4 & \\ 3d_1 + 2d_2 \leq 19 & \\ -d_1 \leq 1 & \\ -d_2 \leq 1 & \\ d_1 \leq 1 & \text{عند} \\ d_2 \leq 1 & \\ d_3 \leq 1 & \end{array}$$

$$d_1 = 1, d_2 = 0, d_3 = 1 \quad \text{وحله}$$

الخطوة ٣ : $d_3 = 1 \neq 0$

الخطوة ٤ : $D = [1, 0]^T$ حيث إن

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = f(1 + \lambda, 1) = 2 + \lambda$$

والتي تصبح كبيرة عندما نؤول λ إلى ∞ . وللحفاظ على $[1 + \lambda, 1]^T$ ممكنة ، مع ذلك ، لا يمكن أن تظل λ أكبر من 4 إذا تحقق القيد الأول في البرنامج (١) ، وليست أكبر من 19/3 إذا تحقق القيد الثاني . لذلك $\lambda^* = 4$

الخطوة ٥ : ■

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة ٢ : بهذه الـ B. المعادلة يصبح البرنامج (١٢ - ١٢) هو

$$\begin{aligned} z &= d_3 && \text{تعظيم} \\ -d_1 - d_2 + d_3 &\leq 0 && \text{علماً بأن} \\ d_1 + 3d_2 + d_3 &\leq 0 \\ 3d_1 + 2d_2 &\leq 7 \\ -d_1 &\leq 5 \\ -d_2 &\leq 1 \\ d_1 &\leq 1 \\ d_2 &\leq 1 \\ d_3 &\leq 1 \end{aligned}$$

عند :

$$d_1 = 1, d_2 = -1/2, d_3 = 1/2. \text{ وحله هو}$$

$$d_3 = 1/2 \neq 0. \quad \text{الخطوة ٣ :}$$

$$D = [1, -1/2]^T \quad \text{الخطوة ٤ :}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}\right) = f(5 + \lambda, 1 - \frac{1}{2}\lambda) = 6 + \frac{1}{2}\lambda$$

والتي تصبح كبيرة عندما تؤول λ إلى $+\infty$. وللحفاظ على $[5 + \lambda, 1 - \frac{1}{2}\lambda]^T$ ممكنة ، مع ذلك ، λ لا يمكن أن تكون أكبر من 3.5 إذا تحقق القيد الثاني في البرنامج (١) ، وليست أكبر من 2 إذا تحقق قيد الإيجابية في x_2 (ويتحقق القيودان الآخران في البرنامج (١) لأي اختيار لـ λ) لذلك

$$\lambda^* = 2.$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الخطوة ٥ :

جدول ١٢ - ٤

x_1	x_2	d_1	d_2	d_3	λ^*
1	1	1	0	1	4
5	1	1	-1/2	1/2	2
7	0	1	0	1	1
8	0	-2	1	1/2	0.531373
7.64575	0.531373	0	0	0	...

بالاستمرار في هذه الطريقة نكمل الجدول ١٢ - ٤ . ويتبع ذلك أن $x_1^* = 7.64575, x_2^* = 0.531373$

$$z^* = f(x_1^*, x_2^*) = 7.64575 + 0.531373 = 8.17712 \quad \text{عند}$$

١٢ - ١٤ بين أن الحل المعطى في المسألة ١٢ - ١٣ ليس أمثل .

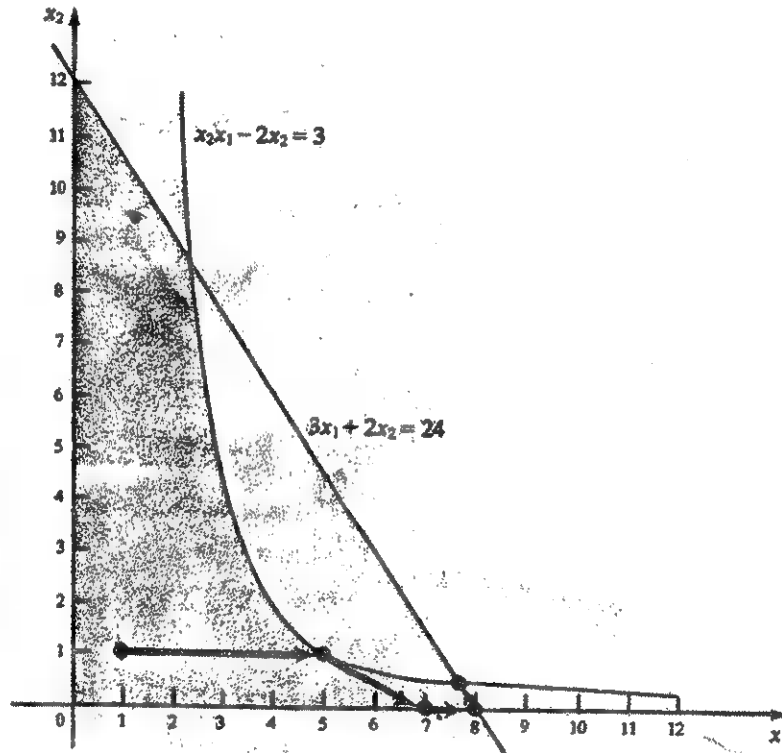
يمكن كتابة القيد الثاني للبرنامج الأصلي كما يلي

$$z \leq 12 - \frac{x_1}{2}$$

والذي يبين أنه إذا كانت $x_1 > 0$ ، فإن $x_2 < 12$. ومن ناحية أخرى .. إذا كانت $x_1 = 0$ ، فإن $x_2 \leq 12$.
 ويجمع ذلك أن الحد الأعلى الشامل هو $z^* = 12$ ، والمفترض عند $x_1^* = 0$ ، $x_2^* = 12$ ، والحل الذي حصلنا عليه في المسألة
 ١٢ - ١٣ هو حد أعلى على مقيد ، وتكون طريقة الاتجاهات الممكنة قد خصصت الحد الأعلى الشامل باختيار B مبدئياً قريبة
 من $[0, 12]^T$.

١٢ - ١٥ ترجم بالرسم طريقة الاتجاهات الممكنة

نتج طريقة الاتجاهات الممكنة اتجاهياً . يمكن التحرك عليه من ■ ، أفضل تقرب حالي لـ x^* لتحقيق قيمة أفضل للدالة
 الهدفية . وهذا التحرك ممكن فقط إذا كانت $d_{n+1} \neq 0$ ، وبالتالي λ^* تمثل أكبر حجم خطوة يمكن أخذه . ويوضح شكل
 ١٢ - ٢ طريقة الحل للحسابات في المسألة ١٢ - ١٣



ضع البرامج ١٢ - ١٦ حتى ١٢ - ٢٠ في الصيغة القياسية

مسائل مكملية

Supplementary Problems

$$z = x_1^4 e^{-0.01(x_1+x_2)^2}$$

تعظيم

١٦ - ١٢

$$2x_1^2 + x_2^2 = 111$$

علماً بأن

$$z = (x_1 - 1)^2 + x_2^2$$

تعظيم

١٧ - ١٢

$$x_1^2 + x_2^2 = 4$$

علماً بأن

$$z = 6x_1 - 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 \quad \text{تعظيم} \quad ١٨ - ١٢$$

$$x_1 + x_2 \leq 2 \quad \text{علمياً بأن}$$

كل المتغيرات لا سلبية

$$z = 24x_1^2 + 14x_2^2 + 46x_3^2 - 28x_1x_2 - 24x_1x_3 + 34x_2x_3 \quad \text{تصغير} \quad ١٩ - ١٢$$

$$11x_1 + 9x_2 + 12x_3 \geq 1000 \quad \text{علمياً بأن}$$

$$x_2 + x_3 = 40$$

كل المتغيرات لا سلبية

$$z = 3x_1x_3 + 4x_2x_3 \quad \text{تعظيم} \quad ٢٠ - ١٢$$

$$x_2^2 + x_3^2 = 4 \quad \text{علمياً بأن}$$

$$x_1x_3 = 3$$

كل المتغيرات لا سلبية

حل المسائل ١٢ - ٢١ حتى ١٢ - ٢٣ حسابياً بمضروبات لاجرائج ، وعددياً إما بطريقة نيوتن - رافسون ، أو بطريقة الدالة الجبرائية .

١٢ - ٢١ المسألة ١٢ - ١٧

$$z = x_1x_2 + x_3 \quad \text{تصغير} \quad ٢٢ - ١٢$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad \text{علمياً بأن}$$

$$z = x_1^2 + x_2x_3 \quad \text{تعظيم} \quad ٢٣ - ١٢$$

$$4x_1^2 + x_2^2 = 16 \quad \text{علمياً بأن}$$

$$2x_2 + 3x_3 = 25$$

١٢ - ٢٤ أوجد النقطة على القطع المكافئ $y^2 = 4x$ الأقرب ما تكون إلى النقطة $(1, 0)$.

١٢ - ٢٥ استخدم مضروبات لاجرائج لحل المسألة ١٢ - ٢٠ بدون شرط اللاسلبية . وبناءً على النتيجة .. حل المسألة مع وجود شرط اللاسلبية .

١٢ - ٢٦ حل المسألة ١٢ - ١٦

$$z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{تصغير} \quad ٢٧ - ١٢$$

$$x_1x_2x_3 = 3 \quad \text{علمياً بأن}$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

١٢ - ٢٨ حل المسألة ١٢ - ٢٧ بإضافة قيد أن كل المتغيرات أعداد صحيحة .

$$z = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 \quad \text{تعظيم} \quad ٢٩ - ١٢$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 25 \quad \text{علمياً بأن}$$

$$8x_1 + 14x_2 + 7x_3 = 56$$

كل المتغيرات لا سلبية

$z = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + 1$	تصغير	١٢ - ٣٠
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$	علمياً بأن	
$x_1 x_3 = 19$		

١٢ - ٣١ حل المسألة ١٢ - ١٨

١٢ - ٣٢ حل المسألة ١٢ - ١٩

١٢ - ٣٣ استخدم طريقة كون - توكر في حل البرنامج المعطى في المسألة ١٢ - ١١
حل المسائل ١٢ - ٣٤ و ١٢ - ٣٥ بمدخل الدالة الجبرائية .

$z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$	تصغير	١٢ - ٣٤
$x_1 - 2x_2 = -1$	علمياً بأن	
$x_1^2 + 4x_2^2 \leq 4$		

$z = \ln(1 + x_1) + 2 \ln(1 + x_2)$	تعظيم	١٢ - ٣٥
$x_1 + x_2 \leq 2$	علمياً بأن	

كل المتغيرات لا سلبية

(ملحوظة : بسط المسألة بتعظيم e^z وجعل القيد متساوي)

$z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$	تصغير	١٢ - ٣٦
$x_1 + 2x_2 \leq 3$	علمياً بأن	
$8x_1 + 5x_2 \geq 10$		

عند x_1 و x_2 لا سلبية

$z = x_1 + 3x_2$	تعظيم	١٢ - ٣٧
$x_1 x_2 \geq 3$	علمياً بأن	
$x_1^2 + x_2^2 \leq 9$		

x_1 و x_2 لا سلبية

الفصل الثالث عشر

البرمجة التربيعية . Quadratic Programming

الصيغة القياسية STANDARD FORM

البرنامج التربيعي العام للتعظيم له المصفوفة ذات الصيغة

$$\begin{aligned} z &= X^T C X + D^T X && \text{تعظيم} \\ A X &\leq B && \text{علماً بأن} \\ X &\geq 0 && \text{عند} \end{aligned}$$

(١ - ١٣)

والذي فيه المصفوفة المتألفة C سالبة ونصف مؤكدة (انظر الفصل ١١)

وشرط C الذي لم يكن موجوداً في التعريف الأصلي للبرنامج التربيعي (فصل ١) يجعل z دالة محدبة (من المسألة ١١ - ٢٤) ، وذلك يضمن أن أى حد أعلى محلي في المنطقة الممكنة المقرة سيكون حداً أعلى شاملاً في هذه المنطقة . وتفرض شروط اللاسلبية ، غير الموجودة في الفصل ١ ، لمساعدة خطوات الحل ، وإذا لم توجد أصلاً ، فإنهم يمكن دائماً أن يتأثروا بالطريقة العادية بالتعبير عن المتغيرات اللاسلبية . ومع ذلك لاحظ أن هذا الترميز سيحول المصفوفة الأصلية السالبة المؤكدة إلى مصفوفة سالبة نصف مؤكدة فقط .

وتحل البرامج التربيعية . تصغير بتحويلها إلى برامج تعظيم من الصيغة القياسية (انظر المسألة ١٣ - ١)

نظام كون - توكر A KUHN-TUCKER SYSTEM

ينتج من تطبيق شروط كون - توكر (انظر الفصل ١٢) على البرنامج (١ - ١٣) أن الحل الأمثل لهذا البرنامج ، إذا تواجد ، يجب أن يحقق معادلة المصفوفة الجديدة

(٢ - ١٣)

$$\hat{A} Y = \hat{B}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & I_1 & 0_1 & 0_2 \\ -2C & 0_3 & -I_2 & A^T \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} X \\ S \\ U \\ V \end{bmatrix} \quad \text{حيث إن}$$

إذا كانت A من الدرجة $n \times n$ (أى أنه إذا كانت (١ - ١٣) تتضمن m متساويات في n متغير x_1, x_2, \dots, x_n) فإن I_1 ، I_2 تكون متغيرات أحادية من الدرجة $m \times m$ and $n \times n$ على التوالي ؛ $0_1, 0_2$ and 0_3 تكون مصفوفات صفرية من الدرجة $m \times m$ ، $n \times m$ ، and $m \times n$ على التوالي ؛ تكون متجهاً ذا بعد m للمتغيرات المساعدة U ، V يكونان متجهين من مضروبين لاجراحيهما m and n عنصر على التوالي (انظر المسألة ١٣ - ٨) .

تتطلب شروط كون - توكر أيضاً أن الحل الأمثل لـ (١ - ١٣) يحقق المعادلة

(٣ - ١٣)

$$U^T X + V^T S = 0 \quad \text{أو} \quad \bar{Y}^T Y = 0$$

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ X \\ S \end{bmatrix}$$

حيث إن

وأخيراً تتطلب شروط كون - توكر أن كل المتغيرات تكون لا سلبية ، بمعنى $Y \geq 0$.

طريقة فرانك وولف THE METHOD OF FRANK AND WOLFE

هذه الطريقة لها ثمانى خطوات لحل (١٣ - ٢) ، (١٣ - ٣) مبنية على طريقة السبيلكس ، والتي تحافظ أوتوماتيكياً على كل المتغيرات لا سلبية . وتحدد المتجهات الجديدة Y_c and P (متجه Y الحالي) ثم تعدل بنسبة حتى نحوى Y_c على الحل الأمثل . لاستخدام طريقة السبيلكس يجب أن تكون Y_c لا سلبية ، ولذلك إذا كان أحد عناصر Y_c سلبياً ، فيجب أن تضرب معادلة القيد المناظرة في -1 .

الخطوة ١ : حدد الحل الأساسي الممكن لـ (١٣ - ٢) ، وأطلق عليه Y_c and P ، ويمكن أن يوجد هذا الحل بإضافة متغير صناعي لكل معادلة قيد ، ثم تطبيق الطريقة ذات المرحلتين لتصغير مجموع هذه المتغيرات الصناعية عدد M من المرات ، حيث تمثل M تكلفة جبرائية موجبة كبيرة جداً . وإذا لم يمكن الحصول على حل مبدئي خالي من المتغيرات الصناعية ، فإن البرنامج التريعى الأصلي لا يكون له حل .

الخطوة ٢ : أوجد قيمة $\theta = \bar{P}^T Y_c$ إذا كانت $\theta = 0$ ، فإن X^* تكون أول عنصر n في Y_c ، وبحل البرنامج بعد ذلك . وإذا كانت $\theta \neq 0$ ، فإذهب إلى الخطوة ٣

الخطوة ٣ : استخدام الهدف الحالي

$$z = -\bar{P}^T Y_c$$

طبق محاولة واحدة لطريقة السبيلكس على هذا الهدف متصلاً بالمجموعة الحالية للمتغيرات الأساسية وجدول القيد الذى يحدد هذه المتغيرات . وأطلق على هذا الحل المعدل Y_c

الخطوة ٤ : أوجد قيمة $\theta = \bar{P}^T Y_c$ إذا كانت $\theta = 0$ ، فإن X^* تكون العنصر الأول في Y_c ، ويمكن حل البرنامج . إذا كانت $\theta \neq 0$ ، فإذهب إلى الخطوة ٥ .

الخطوة ٥ : أوجد قيمة $\bar{P}^T Y_c$ إذا كانت $\bar{P}^T Y_c \leq \frac{1}{2}\theta$ ، فإذهب إلى الخطوة ٦ . وإذا لم تكن كذلك ، فعد إلى الخطوة ٣ ، ونفذ محاولة أخرى لطريقة السبيلكس .

$$\alpha = \frac{\bar{P}^T (P - Y_c)}{(\bar{P} - Y_c)^T (P - Y_c)}$$

الخطوة ٦ : أوجد قيمة

إذا كانت $\alpha \geq 1$ ، فإذهب إلى الخطوة ٧ ، وإذا كانت $\alpha < 1$ ، فإذهب إلى الخطوة ٨ .

الخطوة ٧ : ضع $P = Y_c$ ، $\theta = \bar{P}^T Y_c$ ، وعد إلى الخطوة ٢ .

الخطوة ٨ : احسب المتجه $P - \alpha(P - Y_c)$. أطلق على هذا المتجه المعدل Y_c وعد إلى الخطوة ٢ .

تطبيق تحليل بورتفوليو (محفظة الورق) AN APPLICATION TO PORTFOLIO ANALYSIS

إذا أريد توزيع مبلغ ثابت من المال F بين عدد n من الاستثمارات المختلفة ، وكل منها له تاريخ معروف من العائد . ومشكلة محفظة الورق هي تحديد كم النقود الذي يجب أن يخصص لكل استثمار بحيث يكون العائد الكلي المتوقع أكبر من أو يساوى أقل كمية مقبولة ، وبما أن الاختلاف الكلي في المدفوعات المستقبلية أقل ما يمكن .

دع x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) تمثل كمية الإنفاق المخصص للاستثمار i ، ودع x_{ik} تمثل العائد بالدولار للاستثمار i في الفترة الزمنية k في الماضي ($k = 1, 2, \dots, p$) . وإذا دلت المدفوعات السابقة على الأداء المستقبلي فإن العائد المستقبلي للدولار من الاستثمار i يكون

$$E_i = \frac{\sum_{k=1}^p x_{ik}}{p} \quad (13-4)$$

ويكون العائد المتوقع من كل الاستثمارات مجتمعه هو

$$E = E_1x_1 + E_2x_2 + \dots + E_nx_n \quad (13-5)$$

وكمقياس للاختلاف الكلي في المدفوعات المستقبلية ، مبنى على أساس العائد في الماضي ، فإننا نختار الكمية

$$Z = \frac{\sum_{k=1}^p (x_{1k}x_1 + x_{2k}x_2 + \dots + x_{nk}x_n - E)^2}{p} \quad (13-6)$$

بمعنى المتوسط خلال المدة الزمنية المتقضية p لمربعات الانحرافات بين العائد الكلي من تخصيص (x_1, x_2, \dots, x_n) ، وقيمة العائد الكلي المتوقع (بلفة الإحصاء تسمى الكمية (13-6) التباين للعائد الكلي ، ويمكن تسميتها σ^2) بتعويض (13-5) في (13-6) ، وإعادة الترتيب ، فإنه يمكننا التبسيط كما يلي .

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p [(x_{1k} - E_1)x_1 + (x_{2k} - E_2)x_2 + \dots + (x_{nk} - E_n)x_n]^2 \\ &= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ik} - E_i)(x_{jk} - E_j)x_ix_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2 x_ix_j \end{aligned} \quad (13-7)$$

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p (x_{ik} - E_i)(x_{jk} - E_j) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p x_{ik}x_{jk} - \frac{1}{p^2} \left(\sum_{k=1}^p x_{ik} \right) \left(\sum_{k=1}^p x_{jk} \right) \quad (13-8)$$

وفيها يكون التباين المشترك

من (13-6) يظهر أن Z كمجموع مربعات تكون سلبية لكل قيم x_1, x_2, \dots, x_n ، وهذا يعنى أن المصفوفة المثلثة $C = [\sigma_{ij}^2]$ في (13-7) ، مصفوفة التباين المشترك ، تكون موجبة نصف مؤكدة .

ولذلك يمكن وضع نموذج مشكلة محفظة الورق في صورة البرنامج التريفي

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2 x_ix_j = X^T C X \quad \text{تصغير :} \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n &= F \quad \text{علماً بأن :} \\ E_1x_1 + E_2x_2 + \dots + E_nx_n &\geq L \end{aligned} \quad (13-9)$$

كل المتغيرات لا سلبية

ستكون (13-9) غير ممكنة إذا كانت L عالية بدرجة كبيرة .

مسائل محلولة

Solved Problems

١٢ - ١ وضع البرنامج التالي في الصيغة القياسية

$$z = x_1^2 + \dots + 10x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 12x_2x_3 - 2x_1 + 10x_2 + 5x_3 \quad \text{تصغير :}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4 \quad \text{علمياً بأن :}$$

كل المتغيرات لا سلبية

كما هو ظاهر في المسألة ١٢ - ١٠ هذا البرنامج يكون مكافئاً لـ :

$$z = -x_1^2 - 5x_2^2 - 10x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_2x_3 + 2x_1 - 10x_2 - 5x_3 \quad \text{تصغير :}$$

$$-x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -4 \quad \text{علمياً بأن :}$$

كل المتغيرات لا سلبية

أو في صورة المصفوفة :

$$(1) \quad z = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & 6 \\ -3 & 6 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [2, -10, -5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{تعظيم :}$$

$$[-1, -2, -1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq -4 \quad \text{علمياً بأن :}$$

عند $x \geq 0$

يكون البرنامج (١) في الصورة القياسية عند

$$(2) \quad A = [-1, -2, -1] \quad B = [-4] \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & 6 \\ -3 & 6 & -10 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة C سالبة ، نصف مؤكدة ، كما هو المطلوب ، وحقيقة ، فإنها سالبة مؤكدة (انظر نظرية ١١ - ١)

١٣ - ٢ حدد نموذج كون - توكر للبرنامج القياسي في المسألة ١٣ - ١

تصبح المصفوفات المحددة في (٢) في المسألة ١٣ - ١ وهي (١٣ - ٢)

$$(1) \quad \left[\begin{array}{ccc|c|ccc|c} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & -4 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & 10 & -12 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ \hline & -12 & 20 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ u_1 \\ u_3 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

وتصبح (١٣ - ٢)

$$(٢) \quad [u_1, u_2, u_3, v_1, x_1, x_2, x_3, s_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \end{bmatrix} = 0$$

وتكون المعادلات (١) ، (٢) بالاشتراك مع شرط أن كل المتغيرات لا سلبية تكون نموذج كون - توكر .

٣ - ١٣ حل البرنامج المعطى في المسألة ١٣ - ١

يقع الحل الأمثل لهذا البرنامج ضمن الحل المرتبط بنموذج كون - توكر ، وهذا النموذج حصلنا عليه في المسألة ١٣ - ٢ ، ونحل نموذج كون - توكر بطريقة فرائك . وولف كخطوة أولى ، نتحقق ما إذا كانت لا سلبية . وحيث إنها ليست كذلك ، نضرب معادلات القيود الأول ، الثالث ، الرابع في (١) من المسألة ١٣ - ٢ في -١ ونحصل على

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 - s_1 & = & 4 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - u_1 & - & v_1 = 0 \\ 4x_1 - 10x_2 + 12x_3 + u_2 + 2v_1 & = & 10 \\ -6x_1 + 12x_2 - 20x_3 + u_3 + v_1 & = & 5 \end{array}$$

الخطوة ١ : لايجاد حل أساسي ممكن لمجموعة المعادلات السابقة ، فإننا ندخل متغير صناعي في كل معادلة ، ثم نقلل مجموع هذه المتغيرات الصناعية عدد M من المرات . وبالتبادل نرى أن u_2 ، u_3 يمكن أن يستخدم كمتغيرات أساسية لحل المعادلتين الأخيرتين ، ($u_2 = 10$ and $u_3 = 5$) ، بحيث نحتاج إلى إضافة w_1 and w_2 إلى المعادلتين الأوليين فقط على التوالي . بعمل ذلك ، وتصغير $Mw_1 + Mw_2$ باستخدام الطريقة ذات المرحلتين ، نوجد الجداول رقم ١ ، ٢ ، ٣ . (تقرب كل الحسابات إلى أربعة أعداد صحيحة) وتوضح عناصر المحور (بنجوم) . ويمكن قراءة الحل المبدئي من الجدول ٣ مثل .

$$[0, 1.375, 1.25, 0, 0, 8.75, 13.5, 0]^T$$

والذى نطلق عليه كلاً من y_c و y

جدول (١)

	x_1	x_2	x_3	s_1	u_1	u_2	u_3	v_1	w_1	w_2	
	0	0	0	0	0	0	0	0	M	M	
w_1 M	1	2	1	-1	0	0	0	0	1	0	4
w_2 M	2	-4	6	0	-1	0	0	-1	0	1	2
u_2 0	4	-10	12	0	0	1	0	2	0	0	10
u_3 0	-6	12	-20	0	0	0	1	1	0	0	5
$(c_j - z_j)$:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-3	2	-7	1	1	0	0	1	0	0	-6

جدول (٢)

	x_1	x_2	x_3	s_1	u_1	u_2	u_3	v_1	w_1	
w_1	0.6667	2.667*	0	-1	0.1667	0	0	0.1667	0	3.667
s_1	0.3333	-0.6667	1	0	-0.1667	0	0	-0.1667	0	0.3333
u_2	0	-2	0	0	2	1	0	4	1	6
u_3	0.6660	-1.334	0	0	-3.334	0	1	-2.334	0	11.07
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-0.6669	-2.667	0	1	-0.1669	0	0	-0.1669	0	-9.667

جدول (٣)

	x_1	x_2	x_3	s_1	u_1	u_2	u_3	v_1	
x_2	0.2500	1	0	-0.3750	0.06250	0	0	0.06250	1.375
s_3	0.5000	0	1	-0.2500	-0.1250	0	0	-0.1250	1.250
u_2	0.5000	0	0	-0.7500	2.125	1	0	4.125	8.750
u_3	0.9995	0	0	-0.5003	-3.251	0	1	-2.251	13.50
	0	0	0	0	0	0	0	0	0

الخطوة ٢ :

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}^T \mathbf{Y}_c = [0, 8.75, 13.5, 0, 0, 1.375, 1.25, 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1.375 \\ 1.25 \\ 0 \\ 0 \\ 8.75 \\ 13.5 \\ 0 \end{bmatrix} = 57.81 \neq 0$$

الخطوة ٣ : يكون الهدف الجديد هو تعظيم

$$\mathbf{z} = -\mathbf{P}^T \mathbf{Y} = -[0, 8.75, 13.5, 0, 0, 1.375, 1.25, 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

$$= -0x_1 - 8.75x_2 - 13.5x_3 - 0s_1 - 0u_1 - 1.375u_2 - 1.25u_3 - 0v_1$$

بجميع هذه الدالة الهدفية مع معادلات القيود والمتغيرات الأساسية المعطاة في الجدول ٣ ، نوجد الجدول ٤ .
وتؤدي عمالة واحدة لطريقة السيمبلكس إلى الجدول ٥ ، ومنه نقرأ الحل .

$$[2.5, 0.75, 0, 0, 0, 7.5, 11, 0]^T$$

ويصبح هذا التجه هو \mathbf{Y}_c النموذج

الخطوة ٤ :

$$\theta_c = \bar{Y}_c^T Y_c = [0, 7.5, 11, 0, 2.5, 0.75, 0, 0] \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0.75 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7.5 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix} = 11.25 \neq 0$$

جدول ٥

	x_1	x_2	x_3	s_1	u_1	u_2	u_3	v_1	
		-8.75	-13.50	0	0	-1.375	-1.250	0	
x_2	-8.75	0.2500	1	0	-0.3750	0.06250	0	0.06250	1.375
x_3	-13.50	0.5000*	0	1	-0.2500	-0.1250	0	-0.1250	1.250
u_2	-1.375	0.5000	0	0	-0.7500	2.125	1	0	8.750
u_3	-1.250	0.9995	0	0	-0.5003	-3.251	0	1	13.50
$(z_i - c_i):$		-10.87	0	0	8.313	2.283	0	0	-57.81

جدول ٦

	x_1	x_2	x_3	s_1	u_1	u_2	u_3	v_1	
x_2	0	1	-0.5000	-0.2500	0.1250	0	0	0.1250	0.7500
x_3	1	0	2.000	-0.5000	-0.2500	0	0	-0.2500	2.500
u_2	0	0	-1.000	-0.5000	2.250	1	0	4.250*	7.500
u_3	0	0	-1.999	0.0006	-3.001	0	1	-2.001	11.00
	0	0	21.74	2.878	-0.4345	0	0	-4.436	-30.64

جدول ٧

	x_1	x_2	x_3	s_1	u_1	u_2	u_3	v_1	
x_2	0	1	-0.4706	-0.2353	0.05883	-0.02941	0	0	0.5294
x_1	1	0	1.941	-0.5294	-0.1177	0.05883	0	0	2.941
u_1	0	0	-0.2353	-0.1176	0.5294	0.2353	0	1	1.765
u_3	0	0	-2.470	-0.2347	-1.942	0.4708	1	0	14.53
	0	0	20.70	2.356	1.914	1.044	0	0	-22.81

الخطوة ٥ :

$$\bar{P}^T Y_c = [0, 8.75, 13.5, 0, 0, 1.375, 1.25, 0] \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0.75 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7.5 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix} = 30.63$$

الذي لا يقل عن ولا يساوي

$$\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}(57.81) = 28.91$$

الخطوة ٣ : حيث إن ■ لم تعدل بعد ، يبقى الهدف دون تغير ، ويبقى جدول العائد هو الجدول ٥ . وبتطبيق طريقة السمبلكس مرة واحدة على هذا الجدول نحصل على الجدول ٦ . ويصبح الحل الناتج من الجدول ٦ هو Y_c ، المعطى ، وبالتحديد :

$$Y_c = [2.941, 0.5294, 0, 0, 0, 0, 14.53, 1.765]^T$$

الخطوة ٤ :

$$\theta_c = \bar{Y}_c^T Y_c = [0, 0, 14.53, 1.765, 2.941, 0.5294, 0, 0] \begin{bmatrix} 2.941 \\ 0.5294 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 14.53 \\ 1.765 \end{bmatrix} = 0$$

لذلك تكون العناصر الثلاثة الأولى من Y_c الحل الأمثل لبرنامج التصغير الأصلي ، بمعنى $x_1^* = 2.941, x_2^* = 0.5294, x_3^* = 0$ ، عند $z^* = 3.235$. قارن بالحل الناتج في المسألة ١٢ - ١٠ .

١٣ - ٤ حدد مصفوفة التباين المشترك لبيانات الجدول ١٣ - ١ التي تمثل المائد (بالسنت) لكل دولار مستثمر

	المستويات					
	1	2	3	4	5	6
الاستثمار 1	0	20	0	20	0	20
الاستثمار 2	0	0	30	0	0	30

لتطبيق (١٣ - ٨) فإنه من المناسب إعادة جتولة البيانات كما في الجدول ١٣ - ٢

الجدول ١٣ - ٢

k	x_{1k}	x_{2k}	x_{1k}^2	x_{2k}^2	$x_{1k}x_{2k}$
1	0	0	0	0	0
2	20	0	400	0	0
3	0	30	0	900	0
4	20	0	400	0	0
5	0	0	0	0	0
6	20	30	400	900	600
المجموع	60	60	1200	1800	600

فإن $\sigma_{11}^2 = \frac{1200}{6} - \frac{(60)^2}{36} = 100$ $\sigma_{22}^2 = \frac{1800}{6} - \frac{(60)^2}{36} = 200$

$\sigma_{12}^2 = \sigma_{21}^2 = \frac{600}{6} - \frac{(60)^2}{36} = 0$

وتكون مصفوفة التباين المشترك هي

$$C = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix}$$

١٣ - ٥ حدد مصفوفة التباين المشترك لبيانات الجدول ١٣ - ٣ ، والتي تمثل العائد (سنت) لكل دولار مستثمر .

	السنوات				
	1	2	3	4	5
الاستثمار 1	10	4	12	13	6
الاستثمار 2	6	9	6	5	9
الاستثمار 3	17	1	11	19	2

الجدول ١٣ - ٣

استمر كما في المسألة ١٣ - ٤

k	x_{1k}	x_{2k}	x_{3k}	x_{1k}^2	x_{2k}^2	x_{3k}^2	$x_{1k}x_{2k}$	$x_{1k}x_{3k}$	$x_{2k}x_{3k}$
1	10	6	17	100	36	289	60	170	102
2	4	9	1	16	81	1	36	4	9
3	12	6	11	144	36	121	72	132	66
4	13	5	19	169	25	361	65	247	95
5	6	9	2	36	81	4	54	12	18
المجموع	45	35	50	465	259	776	287	565	290

من الجدول ١٣ - ٤

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^2 &= \frac{465}{5} - \frac{(45)^2}{25} = 12 & \sigma_{12}^2 = \sigma_{21}^2 &= \frac{287}{5} - \frac{(45)(35)}{25} = -5.6 \\ \sigma_{22}^2 &= \frac{259}{5} - \frac{(35)^2}{25} = 2.8 & \sigma_{13}^2 = \sigma_{31}^2 &= \frac{565}{5} - \frac{(45)(50)}{25} = 23 \\ \sigma_{33}^2 &= \frac{776}{5} - \frac{(50)^2}{25} = 55.2 & \sigma_{23}^2 = \sigma_{32}^2 &= \frac{290}{5} - \frac{(35)(50)}{25} = -12\end{aligned}$$

لذلك

$$C = \begin{bmatrix} 12 & -5.6 & 23 \\ -5.6 & 2.8 & -12 \\ 23 & -12 & 55.2 \end{bmatrix}$$

١٣ - ٦ يمتلك أحد الأفراد 10000 دولاراً للاستثمار ، وقد حدد ثلاثة بدائل نقدية كفرص استثمار جذابة . في السنوات الخمس السابقة كانت المدفوعات كما هو موضح في الجدول ١٣ - ٣ (سنت لكل دولار مستثمر) ويفترض هذا الفرد أن هذه المدفوعات هي دلالة على ما يتوقع مستقبلاً . ولهذا الفرد شرطان . (١) يجب ألا يقل العائد المشترك السنوي للاستثمارات عن 800 دولار (تحقق الكمية 1000 دولار عائد في المائة) (٢) يجب أن يكون الاختلاف السنوي في المدفوعات في المستقبل أصغر ما يمكن . كم يجب أن يستثمر هذا الفرد في كل مشروع حتى يحقق هذين الشرطين ؟

توجد فترات زمنية $p = 5$ يمكن تقسيم البيانات بها ؛ من (١٣ - ٤) أو الجدول ١٣ - ٤

$$E_1 = \frac{45}{5} = 9 \text{ \$/\$} \quad E_2 = \frac{35}{5} = 7 \text{ \$/\$} \quad E_3 = \frac{50}{5} = 10 \text{ \$/\$}$$

وهنا $F = \$10\,000$ دولار ، $L = \$800 = 80\,000\text{\$/\$}$ سنت ، بحيث تصبح القيود في ١٣ - ٩

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 10\,000 \\ 9x_1 + 7x_2 + 10x_3 &\geq 80\,000\end{aligned}$$

باستخدام التباينات المشتركة في المسألة ١٣ - ٥ نحصل على الهدف

$$\begin{aligned} \text{تصغير :} \\ \blacksquare = 12x_1^2 + 2.8x_2^2 + 55.2x_3^2 - 5.6x_1x_2 \\ + 23x_1x_3 - 5.6x_2x_3 - 12x_2x_3 + 23x_3x_1 - 12x_3x_2 \end{aligned} \quad (2)$$

بإضافة شروط اللاسلبية في النموذجين (١) ، (٢) تكون البرنامج التريبي الذي وضع في الصيغة القياسية في المسألة ١٢ - ١١ ، ويكون حله مباشرة سواء بطريقة فرانك - وولف أو من شروط كون - توكر (المسألة ١٢ - ٣٣) هو $x_1^* = x_2^* = \$5000$ ، $x_3^* = 0$. وبالتالي يجب أن يقسم هذا الفرد أمواله بالتساوي بين الفرصتين الأولى والثانية ، ولا ينفق على الفرصة الثالثة مطلقاً .

١٣ - ٧ يقدم أحد المستشارين الماليين توصيته إلى أحد الزبائن يمتلك 15000 دولار في مجالين استثماريين ، يحقق أحد الاستثمارين عائداً قدره 20 في المئة كل ثاني سنة ، بينما يحقق الثاني \blacksquare في المئة كل ثالث سنة . حدد أحسن خليط استثمار إذا كان الشرط الوحيد لهذا المستثمر هو أن يكون الاختلاف في العائد المشترك المتوقع السنوي أقل ما يمكن .

البيانات المناسبة لكل استثمار موضحة في الجدول ١٣ - ١ . هذه البيانات

$$E_1 = E_2 = \frac{60}{6} = 10 \text{ \$/\$/سنة}$$

لذلك ، فإن العائد الكلي المتوقع هو

$$\blacksquare = E_1x_1 + E_2x_2 = 10(x_1 + x_2) = 10(15000) = 150000$$

بصرف النظر عن خليط الاستثمار ، لذلك فإن الشرط الوحيد للمسألة هو

$$(1) \quad x_1 + x_2 = 15000$$

وبالنظر إلى التباينات المحسوبة في المسألة ١٣ - ٤ ، يكون الهدف هو

$$(2) \quad z = 100x_1^2 + 200x_2^2 \quad \text{تصغير :}$$

وعندنا أيضاً الشروط الإضافية

$$(3) \quad x_1, x_2 \geq 0$$

يمكن حل البرنامج التريبي (١) ، (٢) ، (٣) بسهولة (بالرسم أو باستخدام شروط كون - توكر) ، ويؤدي إلى $x_1^* = \$10000$ ، $x_2^* = \$5000$ ، عند $z^* = 1.5 \times 10^{10}$ [وحدات (سنت)^١]

١٣ - ٨ تحقق من أن شروط كون - توكر للبرنامج المعطى في المسألة ١٣ - ١ هي من الصيغة (١٣ - ٢) ، (١٣ - ٣) .

اشتقت شروط كون - توكر لهذا البرنامج في المسألة ١٢ - ١٠ ، وبالأخص في (٨) ، (١) ، حتى (٣) ، (١٣) . بوضع $s_1 = x_1^2$ ، $v_1 = \lambda_1$ ، $u_1 = \lambda_2$ ، $u_2 = \lambda_3$ ، $\blacksquare = \lambda_4$ ، وإعادة الترتيب يمكن كتابة هذه المعادلات كما يلي :

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 - x_3 + s_1 &= -4 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - u_1 &= 2 \\ -4x_1 + 10x_2 - 12x_3 - u_2 &= -10 \\ 6x_1 - 12x_2 + 20x_3 - u_3 - v_1 &= -5 \end{aligned}$$

$$v_1s_1 = 0$$

$$u_1x_1 = \blacksquare$$

$$u_2x_2 = 0$$

$$u_3x_3 = \blacksquare$$

وتكون المجموعة الأولى من المعادلات بالتحديد (١٣ - ٢) كما هو مبين في (١) من المسألة ١٣ - ٢ . ويمكن ضم المجموعة الثانية من المعادلات في المعادلة

$$v_1s_1 + u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

والتي تكون لها الصيغة (١٣ - ٢) كما هو موضح في (٢) من المسألة ١٣ - ٢ . ولاحظ أن حل هذه المعادلة يكون مكافئاً لحل الأربع معادلات التي جاءت منها ، حيث يشترط أن تكون كل المتغيرات لا سلبية .

مسائل مكملية

Supplementary Problems

٩ - ١٣ ضع البرنامج التالي في الصيغة القياسية

$$\text{تصغير : } z = 24x_1^2 + 14x_2^2 + 46x_3^2 - 28x_1x_2 - 24x_1x_3 + 34x_2x_3$$

$$11x_1 + 9x_2 + 12x_3 \geq 1111$$

علماً بأن

$$x_2 + x_3 = 1$$

كل المتغيرات لا سلبية

١٠ - ١٣ حدد نظام كون - توكر للبرنامج القياسي للمسألة ٩ - ١٣

استخدم طريقة فرانك - وولف لحل المسائل ١١ - ١٣ ، ١٢ - ١٣ ، ١٣ - ١٣ ، وتحقق من إجاباتك للمسألة ١٣ - ١٣ بواسطة الرسم .

١١ - ١٣ المسألة ٩ - ١٣

$$z = -x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1 + 4x_2$$

تعظيم :

١٢ - ١٣

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

علماً بأن :

$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$

حدد x_1 and x_2 لا سلبية

عند

$$\text{تصغير : } z = 10x_1^2 + 20x_2^2 + 30x_3^2 + 10x_1x_2 - 8x_1x_3 - 6x_2x_3 + x_1 + 2x_2 - x_3$$

١٣ - ١٣

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$

علماً بأن :

حدد كل المتغيرات لا سلبية

١٤ - ١٣ تحتاج إحدى المؤسسات إلى ٦ مليون دولار لتمويل إحدى عمليات التصنيع الجديدة ، وقد وافق ثلاثة بنوك على تمويل كل أو جزء من هذه الكمية . وبالرغم من اشتراط كل بنك على سداد الديون وفوائدها خلال ست سنوات ، فإن جدول السداد يختلف من بنك لآخر كما في الجدول ١٣ - ١٣ .

الجدول ١٣ - ■

	النسبة من الأصل التي تدفع كل سنة					
	السنة 1	السنة 2	السنة 3	السنة 4	السنة 5	السنة 6
البنك 1	0	0	30	40	50	55
البنك 2	5	15	25	35	40	45
البنك 3	40	40	0	35	15	15

تشعر المؤسسة أنه من المفيد أن يتم الاقتراض بطريقة تجعل السداد السنوي للقروض قريباً من التساوي بقدر الإمكان ، لذلك لا ترغب في دفع أكثر من ٥ مليون دولار كمصروفات كلية . ضع البرنامج الرياضي الذي يحدد كمية النفود التي يتم اقتراضها من كل بنك ، بحيث يتحقق هدف المؤسسة .

١٣ - ١٥ بالنتيجة المعروفة لجبر المصفوفات يمكن حل البرنامج التربيعي بمساويات القيود

$$z = X^T Q X + D^T X \quad \text{أمثله :}$$

$$A X = B \quad \text{علماً بأن :}$$

بصيغة مغلقة ، علماً بأن Q تكون محددة (محددة سلبياً في حالة التعظيم ، أو بالموجب في حالة التصغير) وتكون صفوفها مستقلة خطياً . بوضوح

$$z^* = \frac{\det \left[\begin{array}{c|c} A Q^{-1} A^T & -(B + \frac{1}{2} A Q^{-1} D) \\ \hline (B + \frac{1}{2} A Q^{-1} D)^T & 0_{1 \times 1} \end{array} \right]}{\det A Q^{-1} A^T} - \frac{1}{2} D^T Q^{-1} D$$

بتعبير أكثر تعقيداً عن X^* استخدم هذه النتيجة للتحقق من قيمة z^* في المسألة ١٣ - ٧ .

١٣ - ١٦ أعد حل المسألة ١٢ - ٦ في الصيغة .

$$8 + \square = -3x_1^2 - x_2^2 + 6x_1 - 2x_2 \quad \text{تعظيم :}$$

$$3x_1 + x_2 = 5 \quad \text{علماً بأن :}$$

باستخدام المسألة ١٣ - ١٥

الفصل الرابع عشر

البرمجة الديناميكية الثابتة (المؤكدة)

Deterministic Dynamic Programming

عمليات القرارات المتعددة المراحل MULTISTAGE DECISION PROCESSES

عملية القرارات المتعددة المراحل هي عملية يمكن تقسيمها إلى عدد من الخطوات ، أو المراحل المتتالية التي يمكن أن تستكمل بأكثر من طريقة . وتسمى البدائل لاستكمال هذه المراحل « قرارات » . و « السياسة » هي تسلسل من القرارات ، واحد لكل مرحلة من العملية .

وشرط العملية عند أى مرحلة يسمى « الحالة » في هذه المرحلة . ويؤثر كل قرار على الانتقال من الحالة الحالية إلى حالة أخرى مرتبطة بالمرحلة التالية . وتعتبر عملية القرارات المتعددة محددة ، إذا كان هناك عدد محدد فقط من المراحل في العملية ، وعدد محدد من الحالات مرتبط بكل مرحلة .

وكثير من عمليات القرارات المتعددة المراحل لها عائد (تكلفة أو فائدة) مرتبط بكل قرار . ويختلف هذا العائد بالنسبة لمرحلة وحالة العملية . ويكون الهدف هو تحليل هذه العمليات لتحديد السياسة المثلى التي ينتج عنها أحسن عائد كلي .

مثال ١٤ - ١ : في المسألة ١٥ - ١ تعتبر عملية تحديد كم الأموال التي يجب أن تستثمر في كل فرصة استثمار لتعظيم العائد الكلي . عملية قرارات ذات ثلاث مراحل . باعتبار الفرصة i تكون المرحلة i ($i = 1, 2, 3$) ، فإن حالة العملية عند المرحلة i هي كمية الأموال المتاحة للاستثمار عند المرحلة i . وللمرحلة i كبدية للعملية . توجد وحدات أموال متاحة ، ومن ثم تكون الحالة 4 . وللمراحل 3 و 2 يمكن أن تكون الحالات 0, 1, 2, 3, 4 معتمدة على التخصيص (القرارات) من المراحل السابقة . ويمثل القرار عند المرحلة i بالمتغير x_i ، والقيم الممكنة للمتغير x_i هي الأعداد الصحيحة من صفر حتى الحالة عند المرحلة .

وتحدد السياسة المثلى للعملية في المسألة ١٤ - ١ .

وتكون عملية القرارات المتعددة المراحل « ثابتة » (مؤكدة) إذا كان الناتج من كل قرار (وبالأخص الحالة الناتجة عن القرار) معروفاً تماماً . ويغطي هذا الفصل فقط هذه العمليات المتعددة المراحل ، والتي تكون محددة وثابتة . وستناقش العمليات المتعددة التصادفية (العشوائية) في الفصل ١٨ ، وستقدم العمليات غير المحددة في الفصل ٢٠ .

البرنامج الرياضي A MATHEMATICAL PROGRAM

البرنامج الرياضي

$$z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)$$

أمثلة :

(١ - ١٤)

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq b$$

علماً بأن :

عند كل المتغيرات صحيحة ولا سلبية

والذي فيه $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n)$ دوال معروفة (غير خطية) في متغير واحد ، عدد صحيح معروف لا سلبى ، يوضح نموذج لطبقة هامة من عمليات القرارات متعددة المراحل . وهنا ■ تمثل عدد المراحل . وتتضمن المرحلة 1 توصيف متغير القرار x_1 بعائد ناتج هو $f_1(x_1)$ إلى العائد الكلى إلخ . وتمثل الحالات $0, 1, 2, \dots, b$ القيم الممكنة لعدد الوحدات المتاحة للتخصيص وكل المراحل بعد الأولى لها هذه الحالات المرتبطة بها ، والمرحلة 1 لها حالة منفردة ■ .

مثال ١٤ - ■ : البرنامج (١٤ - ١) يوضح نموذج المسألة ١٥ - ١ عند $b=4$ و $n=3$.

البرمجة الديناميكية DYNAMIC PROGRAMMING

تعتبر البرمجة الديناميكية « مدخلاً لأمثلية عملية القرارات المتعددة المراحل . وتبنى على مبدأ بلمان للأمثلية . مبدأ الأمثلية **Principle of optimality** : للسياسة المثل خاصة أنه بصرف النظر عن القرارات المتخذة للدخول إلى أى حالة معينة فى أى مرحلة معينة ، فإن القرارات المتبقية يجب أن تكون سياسة مثل ترك هذه الحالة .

لتنفيذ هذا المبدأ ، ابدأ بالمرحلة الأخيرة لعملية ذات n -مرحلة . ثم حدد لكل حالة أفضل سياسة لترك هذه الحالة ، واستكمل العملية ، بافترض أن كل المراحل السابقة قد اكتملت ، ثم تحرك للخلف خلال العملية « مرحلة بمرحلة . وعند كل مرحلة حدد أفضل سياسة لترك كل حالة ، واستكمل العملية ، وافترض أن المراحل السابقة قد اكتملت ، واستخدم النتائج التى سبق الحصول عليها للمراحل التالية . ويعمل ذلك .. تحسب مدخلات الجدول ١٤ - ١ . حيث إن :

■ = متغير الحالة ، والذي تحدد قيمته هذه الحالة

$m_j(u)$ = العائد الأمثل من استكمال العملية ابتداءً من المرحلة j فى الحالة u .

$d_j(u)$ = القرار المتخذ عند المرحلة j ، والذي يحقق $m_j(u)$

جدول ١٤ - ١

		u				
		0	1	2	3	...
$m_n(u)$						
$d_n(u)$						
$m_{n-1}(u)$						
$d_{n-1}(u)$						
...						
$m_1(u)$						
$d_1(u)$						

المرحلة الأخيرة

المرحلة قبل الأخيرة

المرحلة الأولى

والمدخلات المرتبطة بالمرحلة الأخيرة للعملية $m_n(u)$ ، $d_n(u)$ تحسب دائماً بطريقة مباشرة . (انظر المسائل ١٤ - ١ ، ١٤ - ٣) . والمدخلات المتبقية تحسب بالمسار العكسى ، بمعنى أن مدخلات المرحلة j تحدد كدوال $(j = 1, 2, \dots, n-1)$ من مدخلات المرحلة $(j+1)$. وتعتبر الصيغة العكسية مسألة اعتمادية ، ويجب أن نحصل عليها من جديد لكل نوع مختلف من العملية متعددة المراحل . (انظر المسائل ١٤ - ٥ ، ١٤ - ٨) .

للتبسيط ، الجدول ١٤ - ١ قد رُسم على أساس أن كل مرحلة لها نفس مجموعة الحالات . وبينما يمكن دائماً الحصول على ذلك صناعياً (يجعل دوال العائد m_j دوال جزائية) ، إلا أنه فى الغالب يكون طبيعياً استخدام متغيرات حالة مختلفة كل منها له مدى من القيم للمراحل المختلفة . وهذا الاستخدام ، طبعاً ، يغير دون شك تطبيق مبدأ الأمثلية . (انظر المسائل ١٤ - ٩ ، ١٤ - ٢٠)

ويناسب مدخل البرمجة الديناميكية على الأخص هذه العمليات الموضحة بالتمودج (١ - ١٤) — العمليات التي فيها يحقق كل قرار عائداً منفصلاً — غير معتمد على القرار السابق . في التمودج (١ - ١٤) تُعطى قيم $m_n(u) = 0, 1, \dots, b$ بالصيغة

$$(٢ - ١٤) \quad m_n(u) = \{f_n(x)\} \quad \begin{array}{l} \text{أمثله} \\ 0 \leq x \leq u \end{array}$$

وتكون الصيغة العكسية (أنظر المسألة ١٤ - ١)

$$(٣ - ١٤) \quad m_j(u) = \{f_j(x) + m_{j+1}(u - x)\} \quad \begin{array}{l} \text{أمثله} \\ 0 \leq x \leq u \end{array}$$

عند $j = n-1, n-2, \dots, 1$. ومتغير القرار x في (٢ - ١٤) (الذي يعبر عنه x_n في ١ - ١٤) يتراوح بين قيم صحيحة ، كما يفعل ذلك x في (٣ - ١٤) . وتؤخذ هذه القيمة لـ x ، والتي تؤدي إلى الحل الأمثل في (٢ - ١٤) ، تؤخذ $d_n(u)$ ، وتؤخذ قيمة x التي تؤدي إلى الحل الأمثل في (٢ - ١٤) ، $d_j(u)$. وإذا أدت أكثر من قيمة لـ x إلى حل أمثل ، فنختار إحداها كقرار أمثل . ويكون الحل الأمثل للبرنامج (١ - ١٤) هو $z^* = m_1(b)$. وهو العائد الأمثل من تكملة العملية ابتداءً من المرحلة ١ ، عند وجود عدد n من الوحدات متاحة للتخصيص . بعد تحديد z^* توجد القرارات المثلى $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ على التوالي من :

$$\begin{aligned} x_1^* &= d_1(b) \\ x_2^* &= d_2(b - x_1^*) \\ x_3^* &= d_3(b - x_1^* - x_2^*) \\ &\dots\dots\dots \\ x_n^* &= d_n(b - x_1^* - x_2^* - \dots - x_{n-1}^*) \end{aligned} \quad (٤ - ١٤)$$

البرمجة الديناميكية مع الخصم DYNAMIC PROGRAMMING WITH DISCOUNTING

إذا كان العائد من أي كمية نقود بمعدل i لكل فترة زمنية هو كمية $P(n)$ نتيجة n فترة زمنية مستقبلية ولها القيمة الحالية (أو سعر

$$(٥ - ١٤) \quad \alpha \equiv \frac{1}{1+i} \quad \text{حيث إن} \quad P(0) = \alpha^n P(n) \quad (\text{خصم})$$

الخصم *Discounting* هو إخلال مجموع كل الدولارات في المستقبل بقيمتها الحالية . ويتصل دائماً بعمليات القرارات متعددة المراحل ، والتي تمثل فيها المراحل فترات زمنية . ويكون الهدف هو أمثلية قيمة نقدية . وفي الحل بواسطة البرمجة الديناميكية ، فإن الصيغة العكسية في $m_j(u)$ ، وهي أفضل عائد يبدأ عند المرحلة j والحالة u ، تتعامل مع حدود من الصيغة $m_{j+c}(y)$ ، وأفضل عائد يبدأ في المرحلة $j+c$ (c فترة زمنية بعد المرحلة j) والحالة y . [انظر مثال (٣ - ١٤)] . إذا ضربت $m_{j+c}(y)$ في α^c ، حيث

هي شامل الخصم المعروف سابقاً ، فإن $m_{j+c}(y)$ تخصم إلى قيمتها الحالية عند بدء المرحلة . ويتبع ذلك أن $m_1(u)$ ستخصم حتى بد المرحلة 1 ، وهي بدء العملية . (انظر المسألة ١٤ - ١٠)

مسائل محلولة

Solved Problems

١٤ - ١ حدد السياسة المثلى في المسألة (١ - ١٥) . (انظر المثال ١٤ - ١)

نبدأ باعتبار المرحلة الأخيرة في العملية هي المرحلة الثالثة ، بافترض أن كل المراحل السابقة ، المرحلتين ، قد استكملت . بمعنى أن التخصيصات للمرحلتين ، 2 قد استكملت (بالرغم من أنه عند هذا الوقت لا نعرف هذه التخصيصات) ، ونحن بصدد استكمال العملية بتخصيص وحدات نقدية للاستثمار رقم 3 . وحيث أننا لا نعرف كم الوحدات التي قد تُخصصت للاستثمارين الأول والثاني ، فإننا لا نعرف كم الوحدات ، المتاحة للاستثمار ، ولذلك يجب أخذ كل الاحتمالات في الاعتبار . سيكون هناك إما 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 وحدات متاحة .

بصرف النظر عن عدد الوحدات المتاحة للمرحلة 3 ، فإنه من الواضح طبقاً لتعريف $f_3(x)$ في جدول ١ - ٢ أن أفضل طريقة لاستكمال العملية هي تخصيص كل الوحدات المتاحة للاستثمار 3 . ويتبع نفس الشيء من تطبيق (١٤ - ٢) . لذلك

$$\begin{aligned} m_3(4) &= \max \{f_3(0), f_3(1), f_3(2), f_3(3), f_3(4)\} \\ &= \max \{0, 1, 4, 5, 8\} = 8 \quad \text{with } d_3(4) = 4 \\ m_3(3) &= \max \{f_3(0), f_3(1), f_3(2), f_3(3)\} \\ &= \max \{0, 1, 4, 5\} = 5 \quad \text{with } d_3(3) = 3 \\ m_3(2) &= \max \{f_3(0), f_3(1), f_3(2)\} \\ &= \max \{0, 1, 4\} = 4 \quad \text{with } d_3(2) = 2 \\ m_3(1) &= \max \{f_3(0), f_3(1)\} = \max \{0, 1\} = 1 \quad \text{with } d_3(1) = 1 \\ m_3(0) &= \max \{f_3(0)\} = \max \{0\} = 0 \quad \text{with } d_3(0) = 0 \end{aligned}$$

وهذه النتائج تعطينا الصفين الأولين في جدول الحل رقم ١٤ - ٢

	u				
	0	1	2	3	4
$m_3(u)$	0	1	4	5	8
$d_3(u)$	0	1	2	3	4
$m_2(u)$	0	1	4	6	8
$d_2(u)$	0	1	0	3	0
$m_1(u)$	9
$d_1(u)$	2

باستكمال المرحلة ١ ، نأخذ في الاعتبار المرحلة ٢ ، بافترض أن المرحلة ١ قد استكملت (بالرغم من أننا حتى هذا الوقت لا نعرف كيف) . وحيث إننا لا نعرف عدد الوحدات التي خصصت للاستثمار ١ ، فإننا لا نعرف عدد الوحدات المتاحة للاستثمار ٢ ، ولذلك يجب أن نأخذ في الاعتبار كل الاحتمالات الممكنة .

إحدى الإمكانيات هو أن أربع وحدات متاحة للمرحلة ٢ ، حيث يفترض مسبقاً أنه لم يتم تخصيص أى وحدة للاستثمار ١ . والآن فإن كل أو بعض هذه الوحدات الأربع ، يمكن تخصيصها للاستثمار ٢ ، والباقي للاستثمار ١ . وإذا خصصت x من هذه الوحدات الأربعة للاستثمار ١ ، يكون العائد هو $f_2(x)$ ، والباقي $4-x$ وحدة تكون متاحة للمرحلة ٣ . ولكننا وجدنا قبل ذلك أن أفضل استراتيجية من المرحلة ١ عندما يكون لدينا $4-x$ وحدة ، وبالتحديد $m_3(4-x)$. ويكون العائد الكلي لذلك هو $f_2(x) + m_3(4-x)$ ، وقيمة $f_2(x)$ (وقيمة $x = 0, 1, 2, 3, 4$) التي تعظم هذا العائد الكلي تمثل القرار الأمثل عند المرحلة ٢ بعدد أربع وحدات متاحة . وتصور الصيغة (١٤ - ٣) عند $f = 2$ ، $u = 4$ ، هذه النتيجة ببساطة .

$$m_2(4) = \max \{f_2(0) + m_3(4-0), f_2(1) + m_3(4-1), f_2(2) + m_3(4-2), f_2(3) + m_3(4-3), f_2(4) + m_3(4-4)\}$$

$$= \max \{0+8, 1+5, 3+4, 6+1, 7+0\} = 8 \quad \text{with } d_2(4) = 0.$$

وبمعاملة الإمكانيات الأخرى بالمثل عند المرحلة ٢ ، نحصل على :

$$m_2(3) = \max \{f_2(0) + m_3(3-0), f_2(1) + m_3(3-1), f_2(2) + m_3(3-2), f_2(3) + m_3(3-3)\}$$

$$= \max \{0+5, 1+4, 3+1, 6+0\} = 5 \quad \text{with } d_2(3) = 3$$

$$m_2(2) = \max \{f_2(0) + m_3(2-0), f_2(1) + m_3(2-1), f_2(2) + m_3(2-2)\}$$

$$= \max \{0+4, 1+1, 3+0\} = 4 \quad \text{with } d_2(2) = 0$$

$$m_2(1) = \max \{f_2(0) + m_3(1-0), f_2(1) + m_3(1-1)\}$$

$$= \max \{0+1, 1+0\} = 1 \quad d_2(1) = 1$$

$$m_2(0) = \max \{f_2(0) + m_3(0-0)\} = \max \{0+0\} = 0$$

(تلك الاشتراك اختيارياً) عند :
عند : $d_2(0) = 0$

وبتجميع الحسابات للمرحلة ■ نحصل على الصنفين الثالث ، الرابع للجدول (١٤ - ٢)

وباستكمال المرحلة 2 ، نعود الآن للمرحلة ■ . هناك حالة واحدة مرتبطه بهذه المرحلة ■ $u = 4$.

$$m_1(4) = \max \{f_1(0) + m_2(4-0), f_1(1) + m_2(4-1), f_1(2) + m_2(4-2), f_1(3) + m_2(4-3), f_1(4) + m_2(4-4)\}$$

$$= \max \{0+8, 2+6, 5+4, 6+1, 7+0\} = 9 \quad \text{عند } d_1(4) = 2$$

وبهذه البيانات نستكمل الجدول ١٤ - ٢ .

والحد الأعلى للعائد الذي يمكن أن يتحقق من هذا الاستثمار ذي الثلاث مراحل ، ابتداءً من الوحدات الأربع هو $m_1(4) = 9$ لتحقيق هذا العائد ، خصص وحدة $d_1(4) = 2$ للاستثمار I ، تاركاً وحدة (2 - 4) للمرحلة الثانية ، ولكن $d_2(2) = 0$ تدل على أن أي وحدات لا تتفق حتى هذه المرحلة إذا كان هناك ■ وحدة متاحة فقط . لذلك تبقى وحدتان للمرحلة 3 . وحيث $d_3(2) = 2$ ، فإن الوحدتين يجب أن تخصصا للاستثمار 3 . وتصور هذه النتائج في المعادلة (١٤ -) . ولذلك فإن السياسة المثلى هي تخصيص 2 وحدة للاستثمار ■ ، 0 وحدة للاستثمار ■ . و 2 وحدة للاستثمار ■ .

١٤ - ٢ يمتلك أحد أصحاب عربات الشحن 8 أمتار مكعبة من الفراغ المتاح في عربة شحن مقرر أن تغادر إلى نيويورك . وقد قدم أحد الموزعين ، والذي يمتلك كميات كبيرة من ثلاثة أنواع مختلفة من الأجهزة ستشحن إلى مدينة نيويورك ، عرضاً لصاحب عربة الشحن لنقل وحدات كثيرة طبقاً لما تستطيع نقله العربة بالرسوم التالية :

الاجهز	السعر دولار / وحدة	الحجم متر مكعب / وحدة
I	11	1
II	32	3
III	58	5

ما هو عدد الوحدات من كل جهاز يجب أن يقبلها صاحب عربة الشحن حتى يعظم رسوم النقل ■ بدون أن تزيد طاقة الشحن للعربة عن الطاقة المتاحة ■

يمكن اعتبار هذه المسألة على أنها عملية ذات ثلاث مراحل ، نحوى على تخصيص فراغ للأجهزة I ، II ، III ، على التوالي . ويمكن تصوير المسألة في البرنامج (١٤ - ١) عند $n = 3, b = 8$ إذا كانت x_j ($j = 1, 2, 3$) عدداً بعدد الأمتار المكعبة من الجهاز I التي ستقبل ■ إذا كانت $f_j(x_j)$ العائد من تخصيص x_j للمرحلة I ، معرفة بالجدول ١٤ - ٣ . والحالة عند هذه المرحلة هي عدد الأمتار المكعبة من الفراغ الذي لم يُشغل بعد .

جدول ١٤ - ٣

$x \backslash f$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_1(x)$	0	11	22	33	44	55	66	77	88
$f_2(x)$	0	0	0	32	32	32	64	64	64
$f_3(x)$	0	0	0	0	0	58	58	58	58

يستنتج الصف الأول من الجدول مباشرة « حيث إن كل متر مربع إضافي يخصص للجهاز » سيحقق عائداً إضافياً ١١ دولاراً . ولإيجاد الصف الثاني للجدول نلاحظ أن كل جهاز II يشغل « أمتار مكعبة » لذلك حتى عدد ٣ أمتار مكعبة فراغ متاح على الأقل لا يمكن نقل أى وحدة من هذا النوع . وبالتالي لا يتحقق أى عائد . وإذا خصص ٤ ، ٥ ، ٦ أمتار مكعبة للجهاز II ، فإن وحدة واحدة فقط يمكن تجهيزها بعائد صافي « دولاراً » . وإذا خصص ٧ ، ٨ أمتار مكعبة ، فإنه يمكن شحن وحدتين بعائد صافي ٦٤ دولاراً . وهذا التحليل ينطبق على الجهاز III . ولا يمكن تحقيق أى عائد حتى يمكن تخصيص ٥ أمتار مكعبة على الأقل له ، وإذا خصص ٦ ، ٧ ، ٨ أمتار مكعبة فإن جهازاً واحداً فقط من III يمكن أن يشحن بعائد صافي ٥٨ دولاراً .

البرنامج (١ - ١٤) يمكن أن يحل باستخدام (١٤ - ٢) ، (١٤ - ٣) ، كما في المسألة (١٤ - ١) تماماً . وتعرض النتائج في الجدول ١٤ - ٤ ، ويمكن كسر كل التساويات بالجدول ، وذلك باختيار أصغر قيم تعظم « مثل $d_1(u)$. يبين ١٤ - ٤ أن أحسن عائد كلي يمكن أن يحصل عليه صاحب عربة الشحن هو دولار III $m_1(8) = 91$ بأن يبدأ المرحلة I به ٨ أمتار مكعبة من الفراغ المتاح . ولتحقيق هذا ، فإن ٣ أمتار مكعبة $[d_1(8) = 3]$ يجب أن تخصص للجهاز I ، تاركين « أمتار مكعبة للمراحل التالية . ويجب ألا تخصص أى حجم للجهاز II $[d_2(5) = 0]$ ، تاركين « أمتار مكعبة للمرحلة III ، وكلهم يخصصون للجهاز III $[d_3(5) = 5]$. وبالنسبة للوحدات .. يجب أن يأخذ صاحب عربة الشحن ثلاث وحدات من الجهاز I ، ووحدة واحدة من الجهاز III .

جدول ١٤ - ٤

	u								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$m_1(u)$	0	0	0	0	0	58	58	58	58
$d_1(u)$	0	0	0	0	0	5	5	5	5
$m_2(u)$	0	0	0	32	32	58	64	64	90
$d_2(u)$	0	0	0	3	3	0	6	6	3
$m_3(u)$	91
$d_3(u)$	3

١٤ - ٣ حول البرنامج التالي إلى النموذج (١٤ - ١)

$$\begin{aligned} \text{تعظيم :} \\ \text{علماً بأن :} \end{aligned} \quad \begin{aligned} z &= 11y_1 + 32y_2 + 58y_3 \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 &\leq 8 \end{aligned}$$

كل المتغيرات صحيحة ولا سلبية

هذا البرنامج هو نموذج رياضي للمسألة ١٤ - ٢ ، إذا جعلنا $y = 1, 2, 3$ عدد الوحدات (على عكس عدد الأمتار المكعبة) من الأجهزة التي ستشحن . ويصور القيود الخطي حدود الحجم ، ويصور معامل y الحجم لكل وحدة من الأجهزة z . وكما لاحظنا في المسألة ١٤ - ٢ ، نحصل على نموذج رياضي لهذا البرنامج من الصيغة (١٤ - ١) — والذي له معاملات أحادية في متباينة القيود — إذا عرفنا متغيرات جديدة x لترمز إلى عدد الأمتار المكعبة من كل جهاز يشحن نحصل إذاً على

$$\begin{aligned} \text{تعظيم :} \\ \text{علماً بأن :} \end{aligned} \quad \begin{aligned} z &= f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 8 \end{aligned}$$

كل المتغيرات صحيحة ولا سلبية

حيث تعرف دوال العائد $f_j(x)$ بالجدول ١٤ - ٣ .

لاحظ أن (١) لم تؤخذ من الصيغة (١٤ - ١) بالتحويل الخطي

$$x_1 = y_1 \quad x_2 = 3y_2 \quad x_3 = 5y_3$$

وبالرغم من أن هذا التحويل ينتج النوع المطلوب من الدالة الهدفية ، والنوع المطلوب من متباينة القيود ، فإنه يصور مجموعة النقاط الصحيحة اللاسلبية (y_1, y_2, y_3) في المجموعة الفرعية للنقاط الصحيحة اللاسلبية (x_1, x_2, x_3) . ونحتاج بالتحديد إلى الدوال $f_j(x)$ المرفقة في المسألة (١٤ - ٢) لإمكانية عمل الاعتماد لهذه المجموعة الفرعية حتى المجموعة كلها .

١٤ - ٤ حول البرنامج التالي إلى النموذج (١٤ - ١)

$$\begin{aligned} \text{تعظيم :} \\ \text{علماً بأن :} \end{aligned} \quad \begin{aligned} z &= g_1(y_1) + g_2(y_2) + g_3(y_3) + g_4(y_4) \\ 2y_1 + y_2 + 6y_3 + 3y_4 &\leq 9 \end{aligned}$$

كل المتغيرات صحيحة ولا سلبية

حيث $g_j(y)$ تعرف في الجدول ١٤ - ٥

جدول (١٤ - ٥)

$y \backslash g$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g_1(y)$	0	4	8	11	14	17	19	21	22	23
$g_2(y)$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$g_3(y)$	0	1	2	3	6	8	11	15	20	26
$g_4(y)$	0	1	7	9	14	16	21	23	25	27

بتقليد المدخل المستخدم في المسألة ١٤ - ٣ نفكر في « كم عدد الوحدات من المنتج j التي تشحن بعربة معينة . يمثل الجدول ١٤ - ٥ جدول أسعار الشحن » بينما يصور القيد الخطي الحدود على الحجم الكلي الذي يمكن أن يجهر ، وهو ٩ وحدات . وترجم معامل « j » في هذا القيد بالحجم المشغول بوحدة واحدة من المنتج j (انظر الجدول ١٤ - ٦) .

المنتج	1	2	3	4
الحجم / وحدة	2	1	6	3

ونحدد الآن متغيرات جديدة x_j ($j = 1, 2, 3, 4$) كم عدد الوحدات من حجم المنتج j التي تشحن . البرنامج (١) يكافئ البرنامج التالي من الصيغة (١٤ - ١) .

$$\begin{aligned} z &= f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) && \text{تعظيم :} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 9 && \text{علماً بأن :} \end{aligned}$$

كل المتغيرات صحيحة ولا سلبية

حيث تصور $f_j(x_j)$ العائد من تخصيص x_j وحدة من الحجم للمنتج j . وتشتق هذه الدوال من الجداول ١٤ - ٥ . ١٤ - ٦ .

وكمثال :

$$f_4(7) = \text{العائد من شحن 7 وحدات حجم من المنتج 4}$$

$$= \text{العائد من الشحن 3 وحدة من المنتج 4}$$

$$= g_4(2) = 7 \text{ حيث إن كل وحدة من المنتج 4 تتطلب 3 وحدات حجم}$$

وبالاستمرار على هذا النمط « تكمل الجدول ١٤ - ٧ »

جدول ١٤ - ٧

$f \backslash x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_1(x)$	0	0	4	4	8	8	11	11	14	14
$f_2(x)$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$f_3(x)$	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$f_4(x)$	0	0	0	1	1	1	7	7	7	9

١٤ - ■ كون صيغة عكسية مناظرة لـ (١٤ - ٣) للمسألة التالية . تستطيع إحدى الشركات إنتاج حتى أربع حاسبات أسبوعياً « وقد وافقت على تسليم الحاسبات التالية في الأربعة أسابيع التالية ، وهم ثلاثة ، اثنين ، أربعة ، اثنين حاسب على التوالي . وتعتبر تكلفة الإنتاج دالة في عدد الحاسبات المنتجة ، وتعطى (بالآلاف دولار) كما يلي :

الوحدات المنتجة x	0	1	2	3	4
التكلفة $f(x)$	4	13	19	27	32

يمكن تسليم الحاسبات إلى العملاء في نهاية نفس أسبوع التصنيع ، ويمكن تخزينها للتسليم مستقبلاً بتكلفة 4000 دولار للأسبوع .
وبسبب إمكانيات الشركة المحدودة ، فإنها لا تستطيع تخزين أكثر من ثلاث حاسبات في الوقت الواحد . المخزون الحالي صفر ،
ولا نرغب الشركة في وجود أى مخزون في نهاية الأسبوع الرابع . كم من الحاسبات يجب أن تنتجها الشركة في كل أسبوع من
الأسابيع الأربعة التالية لمواجهة كل الاحتياجات بتكلفة كلية أقل ما يمكن ؟

كما هو مبين في الفصل ٩ ، فإن مسائل الإنتاج من هذا النوع تصاغ في صورة مسائل نقل . وهذه النماذج لا تخضع للصبغة
(١٤ - ١) ، ومن ثم لا يمكن تطبيق (١٤ - ٣) . ومع ذلك ، فإن مسائل الإنتاج هي عمليات قرارات متعددة المراحل
يمكن حلها باستخدام البرمجة الديناميكية .

ومسألة الإنتاج المقدمة هي عملية ذات أربع مراحل ، وفيها المرحلة | تمثل الأسبوع $(j = 1, 2, 3, 4)$. والحالة i من
المرحلة j هي عدد الحاسبات بالمخزون في بداية الأسبوع j . د ع

$$m_j(u) = \text{أقل تكلفة لاستكمال جدول الإنتاج ابتداءً من المرحلة } j \text{ عند الحالة } u .$$

$$d_j(u) = \text{جدول الإنتاج للمرحلة } | \text{ التي تحقق } m_j(u) .$$

$$D_j = \text{الاحتياج في المرحلة } j .$$

$$I_j(u) = \text{تكلفة المخزون المقابلة للمرحلة } j \text{ عندما تكون الحالة } u .$$

$$f_j(x) = \text{تكلفة إنتاج } x \text{ حاسب في المرحلة } j .$$

اعتبر الحالة التي تدخل فيها الشركة المرحلة | بعدد حاسبات u في المخزون . وتستطيع الشركة إنتاج أى عدد من الحاسبات
طبقاً لطاقتها خلال هذه المرحلة ، علماً بأن مجموع إنتاجها ومخزونها يكون على الأقل في مستوى الاحتياج D_j . وأى كمية زائدة
عن الاحتياج D_j تخزن بالمخزون للمرحلة التالية . وعلى الأنص إذا أنتجت الشركة x حاسباً في المرحلة j ، فإن تكلفة الإنتاج
 $f_j(x)$ تكون قد تضخمت . وتسبب الوحدات x بالمخزون تكلفة تخزين $I_j(u)$ ، بتكلفة كلية للفترة j تقدر
بـ $f_j(x) + I_j(u)$ وهذا يترك $u + x - D_j$ وحدة في المخزون للمرحلة $j+1$ ، ويكون أقل تكلفة لاستكمال العملية
عند هذه النقطة هي $m_{j+1}(u + x - D_j)$ ، حيث تكون التكلفة الكلية لاستكمال العملية ابتداءً من المرحلة j بجدول إنتاج
 x وحدة ، وهي $f_j(x) + I_j(u) + m_{j+1}(u + x - D_j)$ ، ويكون أفضل قرار للمرحلة j عند u وحدة في المخزون هو
إنتاج الكمية x التي تجعل التكلفة أقل ما يمكن . وبالتالي عند $j = 1, 2, 3$

$$m_j(u) = \min_x \{f_j(x) + I_j(u) + m_{j+1}(u + x - D_j)\}$$

(١)

$$= I_j(u) + \min_x \{f_j(x) + m_{j+1}(u + x - D_j)\}$$

حيث تتراوح x بين القيم $0, 1, 2, 3, 4$ ، ولضمان ذلك

$$0 \leq u + x - D_j \leq 3 \quad (\text{طاقة تخزين})$$

نجعل $m_{j+1}(u)$ مساوية للتكلفة الجزائية العالية جداً M ، حيث إن $u < 0$ or $u > 3$

وللمسألة هذه ، لا تحدد تكلفة المخزون أو تكلفة الإنتاج على المرحلة ، وتعطى بـ $I_j(u) = 4u$ (وحدات ألف دولار) ،
 $f_j(x) = f(x)$ على التوالي . x هو موضع في جدول تكلفة الإنتاج . وتكون الاحتياجات $D_1 = 3, D_2 = 2, D_3 = 4, D_4 = 2$. ونبسطة العلاقة (١)

$$m_j(u) = 4u + \min_{x=0,1,2,3,4} \{f(x) + m_{j+1}(u + x - D_j)\}$$

(٢)

٦ - ١٤ حل المسألة المصاغة في المسألة ١٤ - ٥

يوجد إما صفر ، واحد ، اثنين ، وإما ثلاث حاسبات في المخزون في بداية الأسبوع الرابع . وحيث إنه ليس مطلوباً أن يكون
هناك أى مخزون في نهاية الأسبوع الرابع ، فإن القرار الأمثل عند المرحلة الرابعة هو إنتاج الجزء من احتياج الأسبوع الرابع فقط
 $D_4 = 2$ الذى لا يُخزن . وتنشأ الصعوبة فقط إذا كان المخزون القادم ثلاثة عناصر ، والتي تزيد على الاحتياج . ولنع هذا

الموقف في السياسة النهائية « فإننا نعين لها تكلفة جزائية عالية جداً حتى الاستكمال » 1000 (وحدات ألف دولار) . والتكلفة حتى الاستكمال لكل الحالات الأخرى هي تكلفة التخزين للمخزون الخالي « مضافاً إليها تكلفة الإنتاج للفرق بين الاحتياج والمخزون . لذلك

$$m_4(3) = 1000$$

تكلفة التخزين لحاسبتين ، وتكلفة الإنتاج لعدد صفر حاسب

$$d_4(2) = 0 \quad \text{عند} \quad = 4(2) + 1 = 12$$

تكلفة التخزين لحاسب واحد وتكلفة إنتاج لحاسب واحد

$$d_4(1) = 1 \quad \text{عند} \quad = 4(1) + 13 = 17$$

تكلفة التخزين لعدد صفر حاسب ، وتكلفة إنتاج حاسبتين

$$d_4(0) = 2 \quad \text{عند} \quad = 4(0) + 19 = 19$$

بتجميع هذه النتائج نحصل على الصفين الأولين للجدول ١٤ - ٨ . ونحصل على باقي المدخلات بتطبيق (٢) من المسألة (١٤) - ٥) عند $j = 3, 2, 1$ ومرة أخرى $M = 1000$ تستخدم للتحكم في حالة المخزون غير الممكنة .

جدول ١٤ - ٨

	u			
	0	1	2	3
$m_4(u)$	19	17	12	1000
$d_4(u)$	2	1	0	...
$m_3(u)$	51	50	46	44
$d_3(u)$	4	3	2	1
$m_2(u)$	70	68	63	66
$d_2(u)$	2	1	0	0
$m_1(u)$	97
$d_1(u)$	3

من جدول ١٤ - ٨ يتبين أن أقل تكلفة إنتاج لاستكمال العملية كلية ابتداءً من المرحلة ١ عند عدد وحدات صفر بالمخزون هي

$$m_1(0) = \$97 \quad \text{دولار}$$

ولتحقيق ذلك ، يجب أن تنتج الشركة $d_1(0) = 3$ حاسبات في الأسبوع الأول ، تشحن كلها مباشرة إلى العملاء . تدخل الشركة الأسبوع الثاني بمخزون صفر ، ويجب أن تشحن $d_2(0) = 2$ حاسباً التي تواجه الاحتياج . ومستوى الإنتاج للمرحلة ١ عند مخزون صفر حاسب هو $d_3(0) = 4$ ، لذلك يقابل الاحتياج بالضبط ؛ ومستوى الاحتياج للمرحلة الرابعة بمخزون صفر من الحاسبات هو $d_4(0) = 2$. لذلك فإن السياسة المثلى هي إنتاج العدد المطلوب من الحاسبات بالضبط ، والذي يفي بالاحتياج دون أى مخزون .

١٤ - ٧ تلقى أحد الصناع طلباً من إحدى السكك الحديدية لتسليم ١٢ قاطرة ، بواقع ثلاث كل عام . وذلك للأعوام الأربعة التالية .
توضح بيانات الإنتاج في الجدول ١٤ - ٩ . تسلم القاطرات في نهاية نفس سنة الصنع ، أو يمكن تخزينها لدى الصناع بتكلفة 30000 دولار للقاطرة لكل سنة لتشحن في سنة أخرى . وحالياً لدى الصناع قاطرة واحدة بالخزون ، ويرغب في زيادة المخزون إلى ثلاث في نهاية الأربع سنوات التالية . حدد جدول الإنتاج الذي سيقابل كل الاحتياجات بتكلفة كلية أقل ما يمكن .

جدول ١٤ - ٩

	السنة			
	1	2	3	4
الإنتاجية (الوردة العادية)	1	2	3	4
الطاقة الإنتاجية (الوردة العادية)	2	2	3	2
التكلفة للقاطرة (الوردة الإضافية)	\$350 000	\$370 000	\$395 000	
التكلفة للقاطرة (الوردة الإضافية)	\$375 000	\$400 000	\$430 000	\$465 000

نحل هذه المسألة بالبرمجة الديناميكية باستخدام الرموز والصيغة العكسية (١) في المسألة ١٤ - ٥ . هناك أربع مراحل (سنوات) للأخذ في الاعتبار ، باعتبار أن القرارات هي مواصفات مستوى الإنتاج للمراحل . وتقدر الطاقة الإنتاجية في كل مرحلة بمجموع الطاقات للورديات العادية والإضافية لهذا العام . بوضع $f_j(x) = M$ تكلفة جزائية عالية ، وإذا لم نحقق مستوى x في المرحلة j ، فإننا نعبد صياغة بيانات الإنتاج كما في الجدول ١٤ - ١٠ ، علماً بأن جميع التكاليف ممطاه بوحدة ألف دولار

جدول ١٤ - ١٠

$j \backslash x$	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$	0	350	725	1100	M	M	M
$f_2(x)$	0	370	740	1140	1540	M	M
$f_3(x)$	0	395	790	1185	1615	2045	2475
$f_4(x)$	0	420	840	1260	1680	2145	2610

ويمكن تأكيد المخزون النهائي كتلات قاطرات بسهولة بزيادة الاحياج في المرحلة الأخيرة بثلاث . لذلك $D_1 = D_2 = D_3$. بينما $D_4 = 6$. وأقصى مخزون ممكن في أي مرحلة هو خمس قاطرات . يتحقق في نهاية المرحلة 3 تحت ظروف أعلى إنتاج في كل المراحل . وبالتالي نأخذ الحالات لتكون $u = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ، ونعرف $I_j(u) \equiv 30u$ (لا تعتمد على j) ونعرف أيضاً $m_{j+1}(u) = M$ ($j = 1, 2, 3$) ، حيث إن $u < 0$ أو $u > 5$

المرحلة ■ إذا كانت القاطرات في بداية هذه المرحلة فإن هناك مصروفات تخزين $30u$ ألف دولار . لذلك فإن قرار أقل تكلفة لاستكمال العملية هو أن نصنع

$$d_d(u) = D_4 - u = 6 - u$$

قاطرة بتكلفة $f_4(6-u)$ وأقل تكلفة حتى الاستكمال هي

$$m_4(u) = 30u + f_4(6-u)$$

وهذه هي المدخلات في الصفيين الأولين للجدول ١٤ - ١١

ونحصل على باقي جدول ١٤ - ١١ من الصيغة العكسية (١) للمسألة ١٤ - ٥ ، وفيها يكون التصغير فوق $x = 0, \dots, 6$ التساوى بين $d_2(2)$, $d_2(1)$, and $d_2(0)$ قطع باختيار أصغر قيمة تصغير x في كل حالة . ومن المشاهد أن أقل تكلفة كلية لاستكمال العملية هي $m_1(1) = \$5680000$ دولار . لتحقيق هذه التكلفة ، فإن تكلفة الإنتاج لقاطرتين مطلوبتين للمرحلة ١ $[d_1(1)=2]$ هي غير تاركين أى شيء في المخزن ، وتكلفة الإنتاج للثلاث قاطرات المطلوبة للمرحلة ٢ $[d_2(0)=3]$ غير تاركين أى شيء في المخزن ؟ وتكلفة الإنتاج للخمس قاطرات الضرورية للمرحلة ٣ $[d_3(0)=5]$ تاركين قاطرتين في المخزن ، وتكلفة الإنتاج للأربع قاطرات المطلوبة للمرحلة الأخيرة هي : $[d_4(2)=4]$

جدول ١٤ - ١١

	u					
	0	1	2	3	4	5
$m_4(u)$	2610	2175	1740	1350	960	570
$d_4(u)$	6	5	4	3	2	1
$m_3(u)$	3785	3385	2985	2620	2255	1890
$d_3(u)$	5	4	3	2	1	0
$m_2(u)$	4925	4555	4185	3815	3475	3135
$d_2(u)$	3	2	2	2	1	0
$m_1(u)$...	5680
$d_1(u)$...	2

١٤ - ٨ كون صيغة عكسية لحل المسألة التالية بالبرمجة الديناميكية . تقوم شركة بيع ماكينات حالياً بتشغيل ماكينة عمرها سنتان في أحد المواقع يغطي الجدول ١٤ - ١٢ تقديرات تكلفة المحافظة على استبدال المائد (بالدولار) لأى ماكينة في هذا الموقع كدالة بالنسبة لعمر الماكينة

جدول ١٤ - ١٢

	u العمر					
	0	1	2	3	4	5
$I(u)$ المائد	10000	9500	9200	8500	7300	6100
$M(u)$ الصيانة	100	400	800	2000	2800	3300
$R(u)$ الإحلال	...	3500	4200	4900	5800	5900

وطبقاً لسياسة الشركة ، فإن الماكينات لا تبقى بعد السنة السادسة ، وتستبدل بماكينات جديدة . حدد سياسة الاستبدال التي تعظم الربح الكلى من هذا الموقع في السنوات الأربع التالية .

هذا المطلوب في مسألة الاستبدال التي هي عبارة عن عملية ذات أربع مراحل تمثل كل مرحلة سنة من الفترة الزمنية تحت الاعتبار ، والحالات عند كل مرحلة هي الأعمار المختلفة للماكينات التي ستدخل هذه المرحلة ، بمعنى $u = 1, \dots, 5$. i.e.,

في كل مرحلة « يكون لتغير القرار قيمتين فقط ، ويرمز لهما باللفظين « احفظ » (احفظ الماكينة الحالية) ، « اشتر » (استبدل الماكينة الحالية بماكينة جديدة)

عرف : أعلى عائد يتحقق ابتداءً من المرحلة j في الحالة u $m_j(u) =$

القرار عند المرحلة j الذي يحقق $d_j(u) = m_j(u)$

دع الدوال $I(u)$, $M(u)$, and $R(u)$ لتعرف بالجدول ١٤ - ١٢ . إذا دخلت الشركة المرحلة « بماكينة عمرها u » وقررت « حفظ » هذه الماكينة « فإنها تكلف الشركة $M(u)$ للحفاظ عليها بمعدل سنوي $I(u) - M(u)$. تدخل الشركة بعد ذلك إلى المرحلة التالية بماكينة عمرها $(u+1)$ سنة ، وأحسن عائد يمكن أن يتحقق بها (وبالتالي لها) هو : $m_{j+1}(u+1)$. لذلك يكون الربح الكلي حتى الاستكمال هو :

$$(2) \quad I(u) - M(u) + m_{j+1}(u+1)$$

وبدلاً من ذلك « لو قررت الشركة بيع الماكينة التي عمرها « سنة عند المرحلة j ، « وشراء « ماكينة جديدة » فإنها تتحمل تكلفة $R(u)$. وتكون الماكينة ذات عمر صفر ، وتحقق عائداً $I(0)$ وتكلفة $M(0)$ للصيانة . ويكون العائد السنوي $I(0) - M(0) - R(u)$. وتدخل الشركة المرحلة التالية بماكينة عمرها سنة واحدة « ويكون أفضل ربح يمكن تحقيقه هو $m_{j+1}(1)$ في هذه الحالة يكون الربح الكلي حتى الاستكمال هو

$$I(0) - M(0) - R(u) + m_{j+1}(1)$$

والقرار الأمثل عند المرحلة j ينتج الكمية الأكبر من (١) ، (٢) « بمعنى :

$$(3) \quad m_j(u) = \max \{ I(u) - M(u) + m_{j+1}(u+1), I(0) - M(0) - R(u) + m_{j+1}(1) \}$$

١٤ - ٩ حل المسألة المضاعفة في المسألة ١٤ - ٨

نلاحظ أنه ابتداءً من المرحلة ١ بماكينة عمرها ستان ، فإنه من غير الممكن الدخول في المرحلة j ($j = 1, \dots, 4$) بماكينة أقدم من $j+1$ ، أو عمرها j . لذلك نعرف $m_j(u) = -M$ على أنه عائد سلبى كبير جداً ، حيث إن

$$u > j+1 \text{ or } u = j$$

المرحلة « تتحقق الصيغة (٣) في المسألة ١٤ - ٨ عند $j = 4$ إذا عرفنا $m_5(u) = 0$ ، لذلك

$$m_4(5) = \text{أكبر} \{ I(5) - M(5), I(0) - M(0) - R(5) \} \quad \text{عند اشترى} \quad d_4(5) =$$

$$= \text{أكبر} \{ 6100 - 3300, 10\,000 - 100 - 5900 \} = 4000$$

$$m_4(4) = -M$$

$$m_4(3) = \text{أكبر} \{ I(3) - M(3), I(0) - M(0) - R(3) \} \quad \text{عند احفظ} \quad d_4(3) =$$

$$= \text{أكبر} \{ 8500 - 2000, 10\,000 - 100 - 4900 \} = 6500$$

$$m_4(2) = \text{أكبر} \{ I(2) - M(2), I(0) - M(0) - R(2) \} \quad \text{عند احفظ} \quad d_4(2) =$$

$$= \text{أكبر} \{ 9200 - 800, 10\,000 - 100 - 4200 \} = 8400$$

$$m_4(1) = \text{أكبر} \{ I(1) - M(1), I(0) - M(0) - R(1) \} \quad \text{عند احفظ} \quad d_4(1) =$$

$$= \text{أكبر} \{ 9500 - 400, 10\,000 - 100 - 3500 \} = 9100$$

هذه النتائج تكون الصفين الأولين للجدول ١٤ - ١٣

جدول ١٤ - ١٣

	u				
	1	2	3	4	5
$m_4(u)$	9100	8400	6500	-M	4000
$d_4(u)$	احفظ	احفظ	احفظ	...	اشتر
$m_3(u)$	17500	14900	-M	13200	-M
$d_3(u)$	احفظ	احفظ	...	اشتر	...
$m_2(u)$	24000	-M	22500	-M	-M
$d_2(u)$	احفظ	...	اشتر
$m_1(u)$...	30900
$d_1(u)$...	احفظ

يمكن الحصول على المدخلات الباقية في الجدول ١٤ - ١٣ بالتطبيق المتتالي للصيغة العكسية في $j = 3, 2, 1$ ، بهامد من الحالات غير الممكنة المجازاة ، كما هو متفق عليه مسبقاً . ويتج من جدول ١٤ - ١٣ أن الشركة يمكن أن تحقق أعلى عائد ممكن 30900 دولار في السنوات الأربع التالية ، ابتداءً بالماكينة التي عمرها ستان . ولعل ذلك .. يجب أن نحافظ على الماكينة الحالية لسنة أخرى ، ثم تشتري ماكينة جديدة ونحفظها للفترة الزمنية المقبلة .

١٤ - ١٠ حل المسألة الموضحة في المسألة ١٤ - ٨ إذا كان الهدف هو تعظيم الخصم الكلي للربح للسنوات الأربع التالية بمعدل فائدة 10 في المئة في السنة .

بدون سعر خصم ، تكون الصيغة العكسية للربح الأمثل هي (٣) في المسألة ١٤ - ٨ . وباستخدام القيمة الحالية للمرحلة / تصبح الصيغة

(١)

$$m_j(u) = \{I(u) - M(u) + \alpha m_{j+1}(u+1), I(0) - M(0) - R(u) + \alpha m_{j+1}(1)\}$$

$$\alpha = \frac{1}{1+0.10} = 0.90909091 \quad \text{وهنا}$$

نحل (١) بنفس الطريقة كما في المسألة ١٤ - ٩ . ويقدم الحل في جدول ١٤ - ١٤ . بالمقارنة بجدول ١٤ - ١٣ نجد أنه في هذه الحالة لم يغير الخصم من سياسته المثل التي فازت - احفظ ، اشترى ، احفظ ، احفظ - ولكنها خفضت الحل الأمثل إلى 26777 دولار .

جدول ١٤ - ١٤

	u				
	1	2	3	4	5
$m_4(u)$	9100	8400	6500	-M	4000
$d_4(u)$	احفظ	احفظ	احفظ	...	اشتر
$m_3(u)$	16736	14309	-M	12373	-M
$d_3(u)$	احفظ	احفظ	...	اشتر	...
$m_2(u)$	22108	-M	20215	-M	-M
$d_2(u)$	احفظ	...	اشتر
$m_1(u)$...	26777
$d_1(u)$...	احفظ

مسائل مكمل

Supplementary Problems

١١-١٤ تلقى دافيد جيروى المحاسب القانونى عروضاً من ثلاثة عملاء لتقديم خدماته . ويرغب كل عميل أن يعمل السيد دافيد على أساس تفرغ كامل (كل الوقت) ، ومع ذلك يرغب كل عميل في استخدام السيد دافيد عدداً من أيام الأسبوع ، طبقاً لما يعرضه السيد دافيد بالرسوم الموضحة بالجدول ١٤ - ١٥ . كم يوماً يستطيع السيد دافيد جيروى تقديمها لكل عميل لتعظيم الدخل الأسبوعى ؟

الجدول ١٤ - ١٥

عدد الأيام	العميل 1, \$	العميل 2, \$	العميل 3, \$
0	0	0	0
1	100	125	150
2	250	250	300
3	400	375	450
4	525	500	600
5	600	625	650

١٤ - ١٢ أعد حل المسألة ١١ - ١٤ ، وذلك بإضافة قيد ، وهو أن السيد جيروى يعمل على الأقل يوماً واحداً لكل عميل . (ملحوظة : اجعل إمكانية ألا يعمل - ولو يوماً واحداً - لأى عميل تكلفة جزائية) .

١٤ - ١٣ تستطيع إحدى الشاحنات نقل حتى ١٠ أطنان من المواد ، وتلقت طلبات من أربع شركات لنقل تجارتها من مدينة سان لويس إلى نيو أورليانز . وتستطيع الشركات تقديم أصناف بقدر ما يطلبه كابتن الشاحنة . وتشحن الأصناف بالوحدة . و جدول ١٤ - ١٦ يوضح أسعار الشحن .

جدول ١٤ - ١٦

الشركة	وزن الأصناف طن / صندوق	سعر الشحن دولار / صندوق
I	1	10
II	2	25
III	3	45
IV	4	60

كم صندوقاً من كل شركة يجب أن يقبلها كابتن الشاحنة لتعظيم سعر الشحن ، بدون زيادة طاقة الشحن ؟

١٤ - ١٤ استخدم البرمجة الديناميكية في حل المسألة ١ - ١٦ بإضافة شرط ، وهو أن الأكلاب تنتج بأعداد صحيحة . (ملحوظة : وحدة الزمن هي نصف ساعة) .

$$z = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3 \quad \text{تعظيم :} \quad ١٥ - ١٤$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 11 \quad \text{علماً بأن :}$$

عند كل المتغيرات صحيحة ولا سلبية

١٤ - ١٦ استخدم البرمجة الديناميكية لحل المسألة ١ - ٨

١٤ - ١٧ استخدم البرمجة الديناميكية لحل المسألة ٩ - ١٠

١٤ - ١٨ استنتج صيغة عكسية ، وحل المسألة الموضحة في المسألة ١٤ - ٨ بإضافة إما حفظ الماكينة الحالية « أو شراء ماكينة جديدة ، ويمكن أيضاً للشركة شراء ماكينة مستعملة أصغر من الموديل الحالي . اعتبر أن تكلفة إحلال ماكينة عمرها سنة بـ ١٨٠٠ دولار ، سنة ليكون الفرق بين تكلفتى إحلالهما بـ ١٨٠٠ دولار ، كمثل « تكلفة إحلال ماكينة عمرها ٣ سنوات بـ ١٨٠٠ دولار ، سنة واحدة هي ١٤٠٠ = ٣٥٠٠ - ٤٩٠٠ دولار

١٤ - ١٩ ضع صيغة قياسية ، ثم حل المسألة التالية : تمتلك إحدى الشركات عربة نقل عمرها سنة واحدة ، والجدول ١٤ - ١٧ يوضح تكلفة حفظها واستبدالها « والعائد الذي ينتج عنها ، بالإضافة إلى بيانات العربات الجديدة التي يمكن شراؤها في المستقبل « وكل الكميات بـ ١٠٠٠ دولار . ولا تحفظ العربات أكثر من ثلاث سنوات ، ويكون الاستبدال بعربات جديدة . حدد سياسة الإحلال للشركة في السنوات الخمس التالية التي تؤدي إلى أعلى ربح .

جدول ١٤ - ١٧

	العمر	العائد	الصيانة	الإحلال
طراز الحالي	1	20	8	18
	2	17	11	25
	3	35
طراز الجديد	0	21	1	■
	1	20	8	■
	2	17	11	■
	3	■
طراز للسنة العالية	0	21	1	6
	1	17	7	■
	2	15	12	■
	3	36
طراز مستين	0	22	2	7
	1	19	8	19
	2	17	12	24
	3	37
طراز ثلاث سنوات	0	24	3	6
	1	18	4	12
	2	15	11	27
	3	37
طراز أربع سنوات	0	25	3	6
	1	19	5	13
	2	14	10	27
	3	38

١٤ - ٢٠ حل مسألة التمين 3×3 بمصفوفة التكلفة

		الأعمال		
		1	2	3
الوقت	1	c_{11}	c_{12}	c_{13}
	2	c_{21}	c_{22}	c_{23}
	3	c_{31}	c_{32}	c_{33}

(انظر الفصل ٩) « باستخدام البرمجة الديناميكية . في حالة المصفوفات الأكبر » هل يناسب هذا المدخل الطريقة المجربة ؟

١٤ - ٢١ حل المسألة ١٤ - ٧ بالخصم ، إذا كان سعر الفائدة المؤثر هو 7 في المئة لكل سنة .

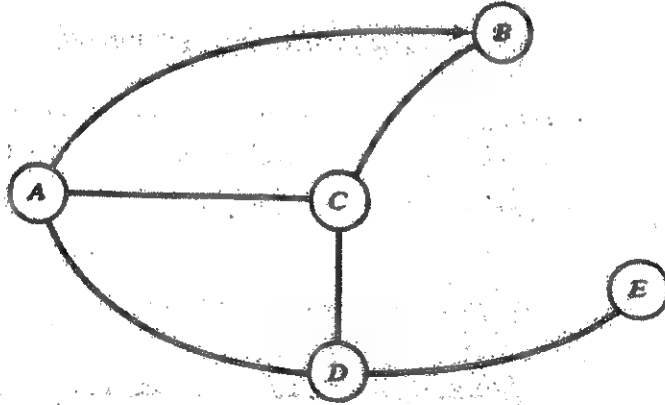
١٤ - ٢٢ حل المسألة ١٤ - ١٨ بالخصم ، إذا كان سعر الفائدة المؤثر هو 8 في المئة لكل سنة .

تحليل الشبكات Network Analysis

الشبكات NETWORKS

الشبكة هي مجموعة من النقط تسمى « عقد » ، ومجموعة من المتحنيات تسمى « الأفرع » (أو الأقواس أو الوصلات) التي تصل بين أزواج من العقد . والشبكات التي ستؤخذ في الاعتبار هنا هي الشبكات التي يصل بين كل زوج من العقد فرع واحد على الأكثر . وسنرمز للعقد بالحروف ، وللفرع بأسماء العقد التي تصل بينها .

مثال ١٥ - ١ بين شكل ١٥ - ١ شبكة تتكون من خمس عقد « تسمى A حتى E ، وستة أفرع تعرف بالمتحنيات AB, AC, AD, BC, CD and DE



شكل ١٥ - ١

يكون الفرع متجهاً (موجهاً) إذا كان له اتجاه مرتبط به . وطبيعياً تحدد الاتجاهات بالأسهم . ويحدد السهم على الفرع AB في شكل ١٥ - ١ أن هذا الفرع موجه من A إلى B . وأن أي حركة على هذا الفرع يجب أن تبدأ عند A وتنتهي عند B ، ولا يسمح بالحركة من B إلى A .

ويكون الفرعان « متصلين » إذا كانت لهما عقدة مشتركة . وفي الشكل ١٥ - ١ الأفرع AB ، AC تكون متصلة ، ولكن الأفرع AB ، CD ليست متصلة ، والمسار هو تتابع من الأفرع المتصلة ، بحيث إنه عند تبادل العقد والأفرع لا يتكرر أي عقدة . وتكون الشبكة متصلة ■ إذا كان لكل زوج من العقد في الشبكة على الأقل مسار واحد يصل هذا الزوج . إذا كان هذا المسار وحيداً لكل زوج من العقد ، تسمى الشبكة المتصلة « شجرة » . وبالتكافؤ .. فإن الشجرة تكون شبكة متصلة لها عقدة واحدة أكثر من الأفرع .

مثال ١٥ - ■ في شكل ١٥ - ١ {ED, DA, AB} تكون مساراً ، ولكن تتابع الأفرع المتصلة {CA, AD, DC, CB} ليست مساراً ، حيث تقع العقدة C مرتين فيه . وتكون الشبكة متصلة ، وتظل متصلة حتى إذا حذفت الأفرع DA ، AB . وإذا حدث أن حذفت DE ، فإن الشبكة تكون متصلة ، حيث إنه لن يكون هناك مسار يصل بين E ، D . ولأن C ، D متصلان بثلاثة مسارات ، فإن الشبكة لا تكون شجرة .

مسائل النطاق الأدنى MINIMUM-SPAN PROBLEMS

يحتوي النطاق الأدنى على مجموعة من العقد ، ومجموعة من الأفرع « المقترحة » لا يوجد بينها فرع « متجه » . وكل فرع متجه له تكلفة لاسيائية مرتبطة به . ويكون الهدف هو إنشاء شبكة متصلة تحتوي على كل العقد « بحيث يكون مجموع التكلفة المرتبطة بهذه الأفرع أقل ما يمكن . وسنفرض أنه توجد أفرع مقترحة كافية لتأكيد وجود حل .

وليس من الصعب القول أن مسألة النطاق الأدنى تحل دائماً بشجرة (إذا اتصلت عقدتان في الشبكة المتصلة بمسارين ، فإن أحد هذه المسارات يجب أن يحتوي على فرع لا يسبب حذفه قطع الشبكة ولكنه يسبب تخفيض التكلفة الكلية فقط) . وتوجد الشجرة ذات النطاق الأدنى بالاختيار الأول لأي عقدة وتحديد أي من الأفرع على هذه العقدة له أقل أصغر تكلفة . ويقبل هذا الفرع كجزء من الشبكة النهائية ، وتستكمل الشبكة بعد ذلك بالتكرار . وفي كل مرحلة من العملية التكرارية يجب تركيز الانتباه على العقد المتصلة أصلاً ببعضها . وتوجد كل الأفرع التي تصل هذه العقد بعقد غير متصلة ، وتحديد أخص هذه التفرعات . وتلك الأفرع المتساوية اختياريًا . ويقبل هذا الفرع كجزء من الشبكة النهائية . وتنتهي عملية التكرار عندما تصل كل العقد . (انظر المسألة ١٥ - ١ ، ١٥ - ٢) .

إذا كانت كل التكلفة واضحة ومعددة (يمكن الحصول على ذلك بتغييرات صغيرة جداً) ، فإنه يمكن إثبات أن شجرة النطاق الأدنى تكون وحيدة وتنتج من الطريقة السابقة لأي اختيار لعقدة البداية .

مسائل أقصر طريق SHORTEST-ROUTE PROBLEMS

تتضمن مسألة أقصر طريق شبكة متصلة لها تكلفة لاسيائية متصلة بكل فرع . وتسمى إحدى العقد « المصدر » source ، والعقد الأخرى تسمى « المصب » sink . (ولا تتضمن هذه التسميات ترجيح أفرع الشبكة ، إنما تقترح فقط الاتجاه الذي يطبق عليه طريقة اسفل) . ويكون الهدف هو تحديد المسار الذي يصل بين المصدر والمصب ، بحيث إن مجموع التكلفة المتصلة بالأفرع في المسار يكون أقل ما يمكن .

وتحل مسائل أرخص مسار بالطريقة التالية ، وفيها تفك كل المساويات اختياريًا .

الخطوة ١ : انشئ بمجدولة تحت كل عقدة كشفًا أساسيًا في ترتيب تصاعدي للتكلفة الأفرع التي تقع عليها . ويكتب كل فرع تحت أي عقدة باسم العقدة الأولى له . احذف من الكشف أي فرع تكون العقدة الثانية له كمصدر ، أو العقدة الأولى كمصب .

الخطوة ٢ : وضع المصدر بنجمة ، وعين لها القيمة 0 . خصص أرخص فرع يقع على المصدر ووضحة بدائرة . وضع العقدة الثانية لهذا الفرع بنجمة ، وعين لهذه العقدة قيمة تساوي تكلفة الفرع . احذف من الكشف الأساسي كل الأفرع الأخرى التي لها العقد الجديدة الموضحة بنجمة كمقدمة ثانية .

الخطوة ٣ : إذا كانت العقدة الجديدة الموضحة بنجمة هي مصب ، فاذهب إلى الخطوة ٥ . وإذا لم تكن كذلك ، فاذهب إلى الخطوة ٤ .

خطوة ٤ : اعتبر كل العقد الموضحة بنجوم ، والتي لها أفرع بدون دوائر تحتها ، وذلك في الكشف الأساسي الحالي . وأضف لكل عقدة القيمة المعينة لهذه العقدة إلى تكلفة أرخص فرع تحتها بدون دائرة . ارمز لأصغر مجموع منها بالرمز M . ووضح هذا الفرع بدائرة ، والتي تساهم تكلفته في M . وضع العقدة الثانية لهذا الفرع بنجمة ، وعين لها القيمة M . احذف من الكشف الأساسي كل الأفرع الأخرى التي لها هذه العقد الجديدة الموضحة بنجمة كمقدمة ثانية . اذهب إلى الخطوة ٣ .

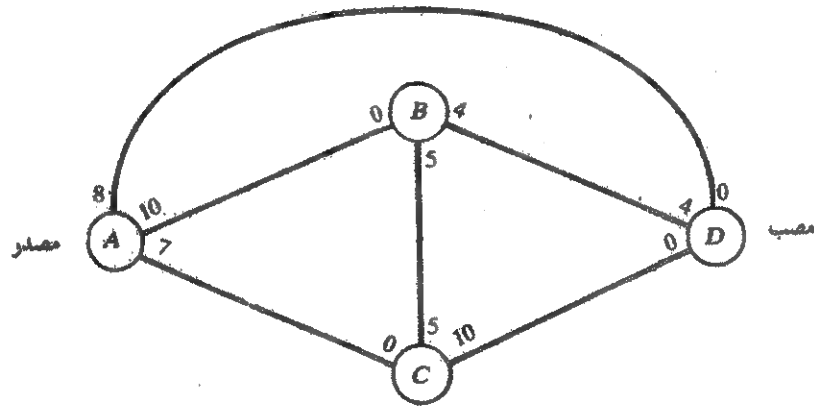
الخطوة ٥: * هي القيمة المعينة للمصب . ونحصل على مسار أقل تكلفة عكسياً « ابتداءً من المصب ، وذلك بإضافة كل الأفرع الموضحة بدائرة إلى المسار ، والتي تتبع كل العقد الثانية لها هذا المسار .

(انظر المسائل ١٥ - ٣ ، ١٥ - ٤) من العمل في الخطوة ٤ نرى أن مجموعة الأفرع الموضحة بدوائر ، والناجمة من الطريقة تكون شجرة أصفر من الشبكة الأصلية ، لها خاصية أن المسافة الوحيدة (التكلفة) في الشجرة الأصفر بين المصدر وعقدة أخرى تكون مساوية لأصفر مسافة بين هاتين العقدتين في الشبكة الأصلية . ومع ذلك فإنه بوجه عام لن تزيد الشجرة الأصفر من الشبكة .

مسائل التدفق الأعلى MAXIMAL-FLOW PROBLEMS

المهدف من مسائل التدفق الأعلى هو تصميم جدول شحن يجعل كمية المواد المرسله بين نقطتين أكبر ما يمكن . وتسمى نقطة الأصل « المصدر » ، وتسمى نقطة الوصول « المصب » . وتوجد عدة مسارات تصل بين المصدر والمصب مباشرة ، أو من خلال مواقع متوسطة . تسمى « نقط الوصل » (نقط وسيطة) يفترض أنه لا تخزن أى مواد في نقط الوصل ، بمعنى أن أى مواد تصل إلى نقط الوصل تشحن مباشرة للموقع الآخر .

يمكن تمثيل مسألة التدفق الأعلى بشبكة . وتمثل نقط المصدر للمصب والوصل بواسطة عقد ، بينما تمثل الأفرع المسارات التي من خلالها تنقل المواد . ويرتبط بكل عقدة N ، وبكل فرع NM يخرج من N عدد لاسلي طاقة تمثل أكبر كمية من المواد يمكن أن تشحن خلال NM من N .



شكل ١٥ - ٢

مثال ١٥ - ٣ : بين شكل ١٥ - ٢ شبكة فيها A مصدر ، D مصب ، C كنقط وصل ، وبين طاقات التدفق لكل فرع في الاتجاهين بنحو نهاية الأفرع . لاحظ أن ٧ وحدات يمكن أن تشحن من A إلى C خلال AC ، ولكن صفر وحدة يمكن أن تشحن في الاتجاه المضاد ، وهذا التمثال يسمح لنا إذا أردنا تحديد اتجاه AC . وعلى النقيض .. فإن التدفق خلال BC يمكن أن يتحرك في أى اتجاه بطاقة ٥ وحدات .

تحل مسائل التدفق الأعلى بالطريقة التالية :

الخطوة ١ : أوجد المسار من المصدر إلى المصب الذي يستوعب تدفق مواد موجب . وإذا لم يوجد أى مسار ، فإذهب إلى الخطوة ٢ .

الخطوة ٢ : حدد أعلى تدفق يمكن أن ينقل خلال هذا المسار ، وأطلق عليه k .

الخطوة ٣ : خفض الطاقة المباشرة (بمعنى الطاقة في اتجاه التدفق k وحدة) لكل فرع من هذا المسار بعدد k ، وزد الطاقة العكسية بـ k ، وأضف k وحدة إلى الكمية المسلمة إلى المصب .

الخطوة ٤ : اذهب إلى الخطوة ١

الخطوة ٥ : التدفق الأعلى هو كمية المواد المسلمة إلى المصب . ويحدد جدول الشحن الأمثل بمقارنة الشبكة الأصلية بالشبكة النهائية . وأى تخفيض في الطاقة يعني شحن .
(انظر المسائل ١٥ - ٦ ، ١٥ - ٧)

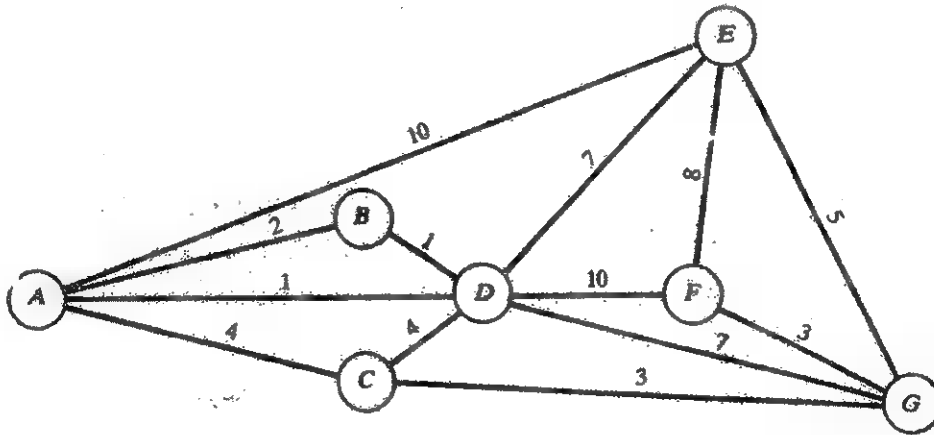
إيجاد مسار التدفق الموجب FINDING A POSITIVE-FLOW PATH

الخطوة ١ هي النقطة الصعبة في طريقة التدفق الأعلى — وهي تعريف مسار من المصدر حتى المصب بطاقة تدفق موجبة . لاكتشاف هذا المسار ، صِل المصدر بكل العقد التي يمكن الوصول إليها بفرع مفرد له طاقة تدفق موجبة في الاتجاه الأمامي (اتجاه المصدر) . صِل هذه العقد بكل العقد الجديدة التي يمكن الوصول إليها بفرع مفرد لها طاقات موجبة في الاتجاه الأمامي . استمر في هذه العملية إلى أن تصل إلى المصب — الذي عنده يكون قد تم تحديد مسار مناسب — أو نجد أنه لا يمكن الوصول إلى عقد جديدة من العقد الموجودة . ولانصل إلى المصب — في هذه الحالة لا يوجد مسار مناسب . (انظر المسألة ١٥ - ٥) .

مسائل محلولة

Solved Problems

١٥ - ١ حل مسألة النطاق الأدنى للشبكة المعطاة في شكل ١٥ - ٢ . تمثل الأعداد على الأفرع تكلفة احتواء الأفرع في الشبكة النهائية . نختار A كمقدمة بداية ، ونأخذ في الاعتبار كل الأفرع الواقعة عليه ، وهي AE, AB, AD, AC بتكلفة ١٠، ٢، ٤، ١، على التوالي ، حيث إن AD هي الأرخص ، ونضيف هذا الفرع إلى الحل ، كما في شكل ١٥ - ٤ (أ) . العقد D ، A تكون متصله الآن .



شكل ١٥ - ٢

نأخذ في الاعتبار بعد ذلك كل الأفرع الواقعة على أي من D ، أو A ، والتي تتصل بالعقد الأخرى . وهذه العقد هي $AE, AB, AC, DB, DE, DF, DG$ ، and DC بتكلفة ١٠، ٢، ٤، ١، ٧، ١٠، ٧، and ٤، على التوالي . حيث إن DB هي الأرخص ، فإننا نصلها بشكل ١٥ - ٤ (أ) ، ونحصل على شكل ١٥ - ٤ (ب) . ونصبح العقد المتصلة هي A, B ، and D .

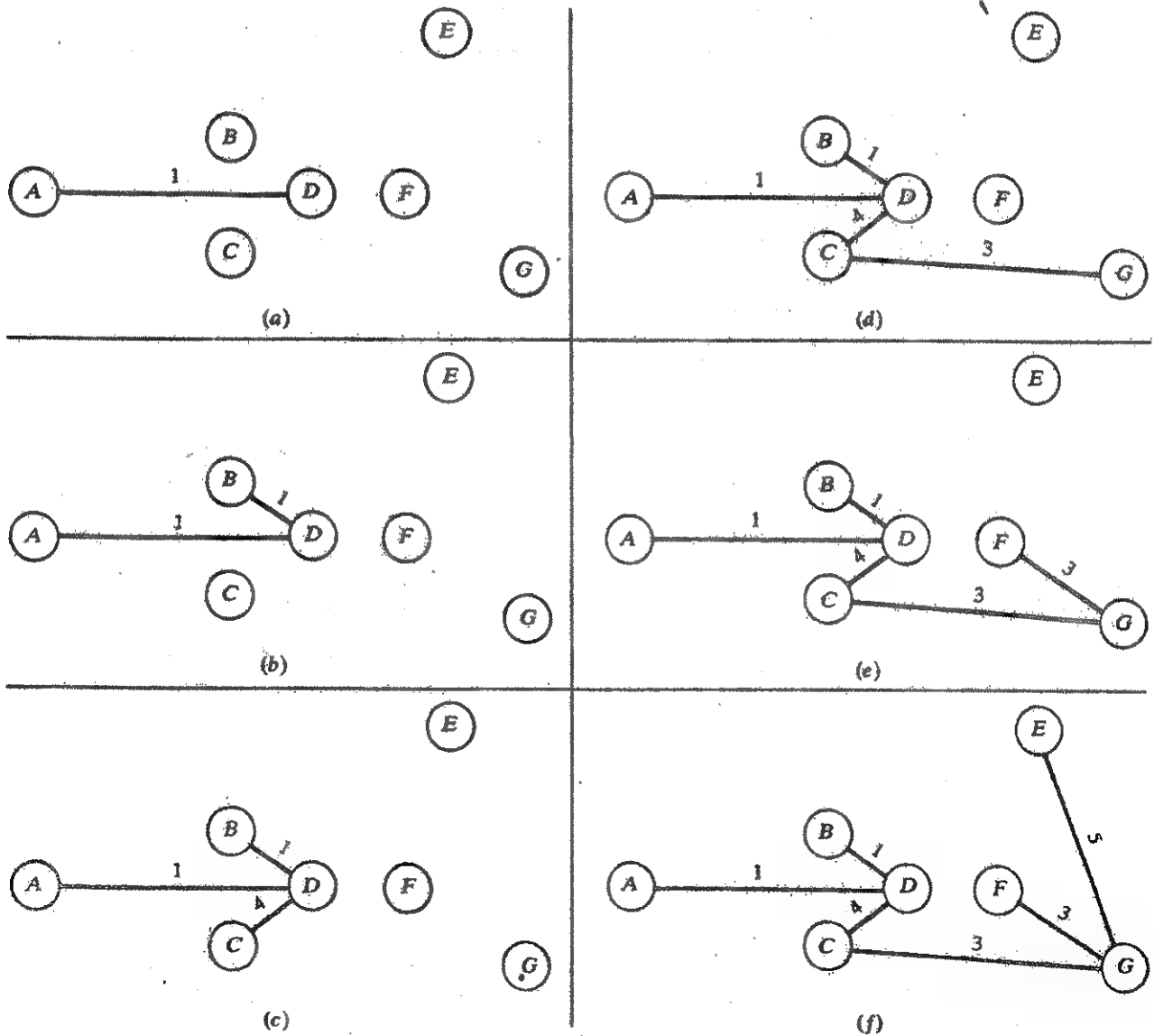
نأخذ في الاعتبار بعد ذلك كل الأفرع الواقعة على $A, B, \text{ or } D$ ، والتي تتصل إلى العقد الأخرى . بمعنى $AC, DE, DC, DF, DG, \text{ and } DC$ بتكلفة 10, 4, 7, 10, 7, 4. ثم نختار DC ونوصله إلى الشكل ١٥ - ٤ (ب) لنحصل على شكل ١٥ - ٤ (ج) .

بالاستمرار في هذه الطريقة نحصل بالتالي على الأشكال ١٥ - ٤ (د) حتى ١٥ - ٤ (و) . ويحتوي الشكل ١٥ - ٤ (و) على كل العقد ، ومن ثم فهو شبكة النطاق الأدنى ، وأقل تكلفة لتوصيل الشبكة هي

$$z^* = 1 + 1 + 4 + 3 + 3 + 5 = 17$$

١٥ - ٢ تخطط إحدى جهات خدمة الحدائق لتطوير مساحة خالية للسياسة . تمعدت أربعة مواقع في المنطقة للوصول بواسطة السيارات . هذه المواقع والمسافات بينها (بالميل) توضح في الجدول ١٥ - ٢ . ولإيقاع أقل ضرر على البيئة ترغب جهة خدمة الحدائق تقليل الأميال من الطريق اللازم للوصول إلى المكان . حدد عدد الطرق التي يجب أن تبني لتحقيق هذا الهدف .

هذه المسألة هي مسألة نطاق أدنى . العقد هي الأربعة مواقع التي ستطور ومدخل الحديقة ، بينما الأفرع المقترحة هي الطرق الموصلة إلى المواقع . والتكلفة هي الأميال . وبين الشكل ١٥ - ٥ الشبكة الكلية . حيث إن كل موقع يُمثل بأول حرف من اسمه .



شكل ١٥ - ٤

نختار مدخل الحديقة كمقدمة البداية . وتوضَّح تكلفة الأفرع الواقعة على هذه المقدمة في الصف الأول من الجدول ١٥ - ١ .
وحيث إن أقل تكلفة هي 7.1 ، فإننا نضيف الفرع من مدخل الحديقة إلى المساقط المائية إلى الشبكة .

نعتبر بعد ذلك كل الأفرع الموصلة إلى موقع جديد مدخل الحديقة أو المساقط المائية . وهذه الأفرع هي من مدخل الحديقة إلى الصخور السحرية ، ونقطة الغروب ، والحديقة . وبالمثل من المساقط المائية إلى نفس المواقع الثلاثة . من هؤلاء - فإن أُرخصها هو الموصل من المساقط المائية إلى الصخور السحرية . لذلك نوصلها إلى الشبكة .

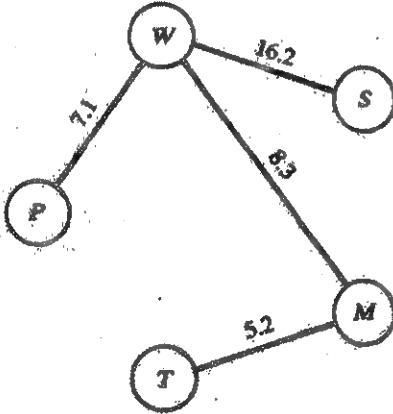
جدول ١٥ - ١

اخرى	نقطة الغروب	الصخور السحرية	المساقط المائية	مدخل الحديقة
مدخل الحديقة	19.1	19.5	7.1	...
المساقط المائية	16.2	8.3	...	7.1
الصخور السحرية	18.1	...	8.3	19.5
نقطة الغروب	...	18.1	16.2	19.1
الحديقة	17.2	5.2	13.2	25.7

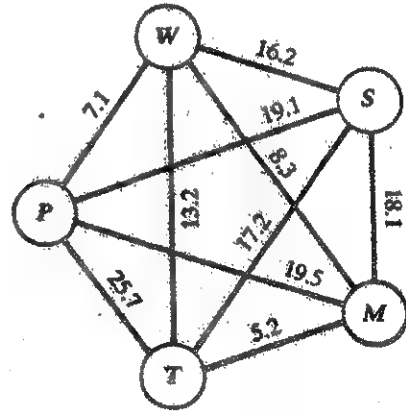
نعتبر بعد ذلك كل الأفرع إلى نقطة الغروب أو الحديقة إما من المدخل ، أو المساقط المائية ، أو الصخور السحرية . من هؤلاء .. الفرع من الصخور السحرية إلى الحديقة تكون له أقل تكلفة ، لذلك يضاف أيضاً إلى الشبكة .

عند هذه المرحلة نجد أن الموقع الوحيد الذي لم يُصل هو نقطة الغروب . وأُرخص فرع يصل نقطة الغروب بأي موقع آخر هو من المساقط المائية ، وبإضافة هذا الفرع إلى الشبكة نصل إلى الشكل ١٥ - ٦ الذي له أقل تكلفة .
ميل

$$z^* = 7.1 + 8.3 + 5.2 + 16.2 = 36.8 \text{ mi}$$



شكل ١٥ - ٦



شكل ١٥ - ٥

١٥ - ٣ يعيش أحد الأفراد في مدينة ريدجود بولاية نيوجرسي . ويعمل بمدينة وياني بولاية نيوجرسي . ويبحث عن طريق سيارات يجعل وقت القيادة الصباحية أقل ما يمكن . وقد سجل هذا الشخص وقت القيادة (بالدقيقة) على الطرق السريعة بين البلدان المتوسطة ، وهذه البيانات مدونة في الجدول ١٥ - ٢ . مدخلات الجدول الخالية من البيانات تعبر عن عدم وجود طريق سريع يربط هذه النقط مباشرة . حدد أحسن طريق لهذا الشخص .

	ريد جود	كليفتون	أورانج	تروى هيلز	بارسياني	ويالي
ريد جود	...	18	...	32
كليفتون	18	...	12	28
أورانج	...	12	...	17	...	32
تروى هيلز	32	28	17	...	4	17
بارسياني	4	...	11
ويالي	32	17	11	...

يمكن صياغة الموقف في صورة مسألة أقصر طريق . تمثل المدن بعقد ، والطرق السريعة بالأفرع . وتكون التكلفة المرتبطة بالأفرع هي وقت السفر . والمصدر هو ريدجود ، والمصب هو ويالي .

الخطوة ١ : يوضح شكل ١٥ - ٧ (أ) الكشف الأساسي ، وفيه تمثل كل مدينة بأول حرف من اسمها . وتختص الأفرع CR و TR تحت C و T على التوالي ، وتظهر RC و RT تحت المصدر فقط بالمائل . ولاتوضح أى أفرع باستخدام المصب كمقدمة أولى .

الخطوة ٢ : نوضح عقدة المصدر بنجمة R ، ونعين لها القيمة صفر . أرخص فرع يغادر RC هو RC ، ونوضح بنجمة RC ونعين لها القيمة 18 وهي تكلفة RC نوضح الفرع RC بدائرة ، ونحذف من الشكل ١٥ - ٧ (أ) كل الأفرع الأخرى التي لها العقد الثانية ، وهي C بمعنى OC و TC ويكون الكشف الأساسي الجديد هو الشكل ١٥ - ٧ (ب) .

الخطوة ٤ : العقد الموضح بنجوم هي R ، C ، O ، ومجموع العائد هو $32=0+32$ تحت R ، ونحصل عليه بإضافة قيمة O إلى تكلفة RT ، $30=18+12$ تحت C ، ونحصل عليه بإضافة قيمة C إلى تكلفة CO . وحيث إن 30 هي المجموع الأصغر ، نوضح CO بدائرة و O بنجمة ، ونعطى O القيمة 30 ، ونحذف من الشكل ١٥ - ٧ (ب) كل الأفرع الأخرى التي لها كمقدمة ثانية ، بمعنى TO . وتكون النتيجة هي الشكل ١٥ - ٧ (ج) .

الخطوة ٤ : العقد الموضحة بنجوم هي R ، C ، O ، ومجموع العائد هو $32=0+32$ تحت $■$ ، $46=18+28$ تحت $■$ ، $47=30+17$ تحت O ، وأصغر مجموع هو 32 . ومن ثم نوضح RT بدائرة ، و T بنجمة ، ونعطى T القيمة 32 ، ونحذف من الشكل ١٥ - ٧ (ج) كل الفرعات التي لها T كمقدمة ثانية . وتكون النتيجة هي الشكل ١٥ - ٧ (د) .

الخطوة ٤ : العقد الوحيدة الموضحة بنجوم هي R ، والتي لها أفرع غير موضحة بدوائر تحتها في الكشف الأساسي الحالي في شكل ١٥ - ٧ (د) هي O ، T . مجموع العائد لهذه العقد هو $62=30+32$ ، $36=32+4$ على التوالي . لذلك نوضح TP بدائرة P بنجمة ، ونعطى P القيمة 36 ، ونحذف كل الأفرع الأخرى التي لها P عقدة ثانية ، ولا توجد أى واحدة من هذا النوع . ويكون الكشف الأساسي الجديد هو الشكل ١٥ - ٧ (هـ) .

الخطوة ٤ : العقد الوحيدة الموضحة بنجوم ، والتي لها أفرع غير موضحة بدوائر تحتها في الكشف الأساسي الحالي هي O ، T . ويكون مجموع العائد على التوالي $62=30+32$ ، $49=30+17$ ، $47=36+11$. وحيث إن 47

هو أصغرهما ، نوضح PW بدائرة ، W بنجمة (المصب) ، ونعطي W القيمة 47 ، ونحذف من شكل ٧ - ١٥ (هـ) كل الأفرع الأخرى التي لها W كمقدرة ثانية . تكون النتيجة شكل ٧ - ١٥ (و)

الخطوة ٥ : يكون أقل وقت قيادة من ويدجود إلى وياني هو : $z^* = 47$. دقيقة . ولتحديد المسار الأمثل ، نبحث في شكل ٧ - ١٥ (ز) عن فرع موضح بدائرة له W كمقدرة ثانية ، فتكون PW ، ثم بالبحث عن فرع موضح بدائرة له P كمقدرة ثانية ، فيكون TP . نبحث عن فرع موضح بدائرة له T كمقدرة ثانية ، فيكون RT . ونبحث إن - في المصدر ، فيكون المسار المطلوب هو $\{RT, TP, PW\}$.

<u>R</u>	<u>C</u>	<u>O</u>	<u>T</u>	<u>P</u>	<u>W</u>
RC 18	CO 12	OC 12	TP 4	PT ■	
RT 32	CT ■	OT 17	TW 17	PW 11	
		OW 32	TO 17		
			TC 28		

(أ)

<u>R* (0)</u>	<u>C* (18)</u>	<u>O</u>	<u>T</u>	<u>P</u>	<u>W</u>
RC 18	CO 12	OT 17	TP 4	PT 4	
RT 32	CT ■	OW 32	TW 17	PW 11	
			TO 17		

(ب)

<u>R* (0)</u>	<u>C* (18)</u>	<u>O* (30)</u>	<u>T</u>	<u>P</u>	<u>W</u>
RC 18	CO 12	OT 17	TP ■	PT 4	
RT 32	CT 28	OW ■	TW 17	PW 11	

(ج)

<u>R* (0)</u>	<u>C* (18)</u>	<u>O* (30)</u>	<u>T* (32)</u>	<u>P</u>	<u>W</u>
RC 18	CO 12	OW 32	TP ■	PW 11	
RT 32			TW 17		

(د)

<u>R* (0)</u>	<u>C* (18)</u>	<u>O* (30)</u>	<u>T* (32)</u>	<u>P* (36)</u>	<u>W</u>
RC 18	CO 12	OW 32	TP 4	PW 11	
RT 32			TW 17		

(هـ)

<u>R* (0)</u>	<u>C* (18)</u>	<u>O* (30)</u>	<u>T* (32)</u>	<u>P* (36)</u>	<u>W* (47)</u>
RC 18	CO 12		TP 4	PW 11	
RT 32					

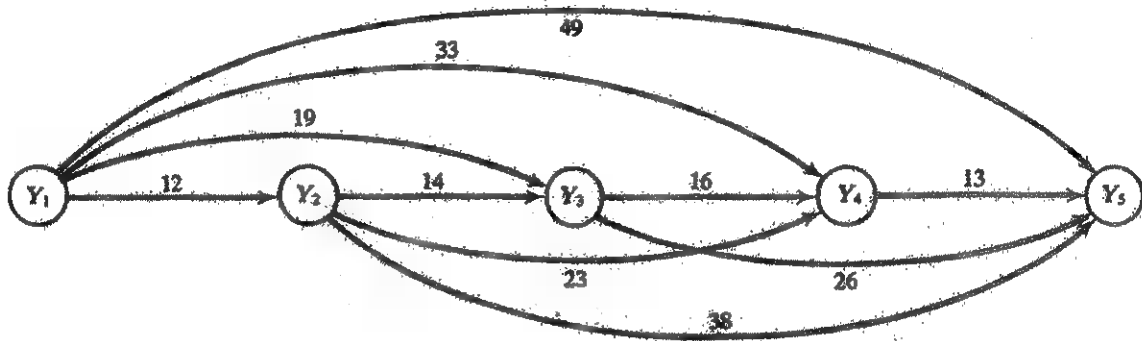
(و)

شكل ٧ - ١٥

١٥ - ٤ وقُمت إحدى الشركات عقداً لتصنيع صناديق تعبئة « مدة العقد » سنوات غير قابلة للتجديد . وتتطلب العملية الإنتاجية ماكينة خاصة لا تمتلكها الشركة . ويمكن للشركة شراء الماكينة وصيانتها لمدة أربع سنوات ، ثم تباعها كخردة ، أو استبدال الماكينة في أى سنة بماكينة جديدة . وتحتاج الموديلات الجديدة صيانة أقل من القديمة . وتقدر تكلفة التشغيل الصافية (ثمن الشراء + الصيانة - الاستبدال) لشراء ماكينة في بداية السنة t ، وبيعها في بداية السنة j ، وتلك موضحة بالجدول ١٥ - ٣ . حيث تعبر كل الأرقام عن وحدات الألف دولار .

جدول ١٥ - ٣

$i \backslash j$	1	2	3	4	٥
1	...	12	19	33	49
2	14	23	38
3	16	26
4	13



شكل ١٥ - ٨

حدد سياسة الاستبدال التي تجعل تكلفة التشغيل الكلية أقل ما يمكن للماكينة خلال مدة العقد . يمكن حل هذه المسألة بالبرمجة الديناميكية ، وبالتبادل فإنها يمكن أن تصاغ في صورة مسألة أقصر طريق على شبكة موجهة . دع العقد Y_1, \dots, Y_5 تمثل بدايات سنوات العقد ، Y_5 بداية السنة الخامسة . والفرع المتجه من Y_i إلى Y_j يعني شراء الماكينة عند بداية السنة i ، واستبدالها أو تكهينها عند بداية السنة j . والتكلفة المرتبطة بكل فرع هي تكلفة التشغيل الصافية . وتوضح الشبكة في شكل ١٥ - ٨ .

يوضح شكل ١٥ - ٩ (أ) الكشف الأساسي لهذه الشبكة الموجهة . وتطبيق طريقة أرخص مسار عليها نحصل على الأشكال ١٥ - ٩ (ب) حتى ١٥ - ٩ (د) على التوالي . ومن الشكل ١٥ - ٩ (د)

$$z^* = 45 \text{ (ألف دولار)}$$

ويكون المسار الأمثل هو $\{Y_1, Y_3, Y_5\}$. ويمثل هذا المسار سياسة الشراء للماكينة عند بداية السنة الأولى ، واستبدالها بماكينة جديدة عند بداية السنة الثالثة ، وأخيراً تكهين الماكينة التي عمرها ستان عند بداية السنة الخامسة .

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
Y_1Y_2 12	Y_2Y_3 14	Y_3Y_4 16	Y_4Y_5 13	
Y_1Y_3 19	Y_2Y_4 23	Y_3Y_5 26		
Y_1Y_4 23	Y_2Y_5 38			
Y_1Y_5 49				

Y_1 (0)	Y_1 (12)	Y_3	Y_4	Y_5
Y_1Y_2 12	Y_2Y_3 14	Y_3Y_4 16	Y_4Y_5 13	
Y_1Y_3 19	Y_2Y_4 23	Y_3Y_5 26		
Y_1Y_4 33	Y_2Y_5 38			
Y_1Y_5 49				

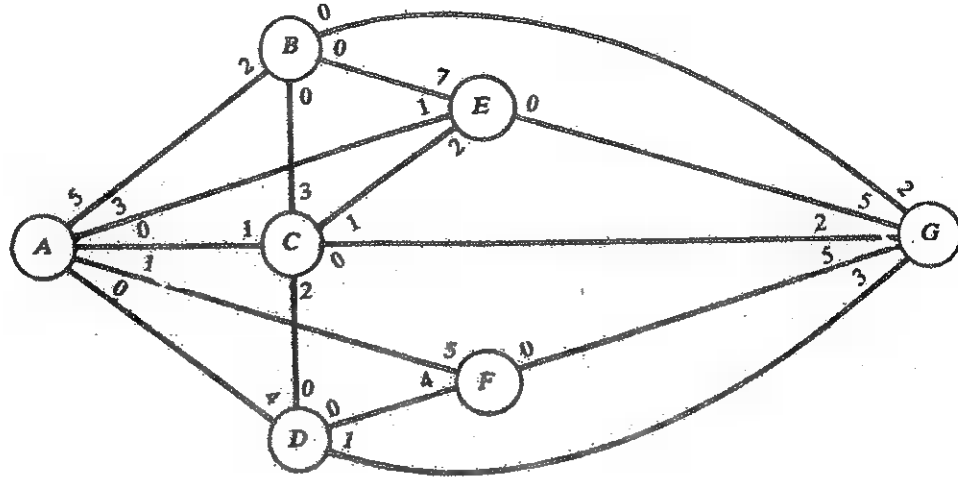
Y_1 (0)	Y_1 (12)	Y_3 (19)	Y_4	Y_5
Y_1Y_2 12	Y_2Y_3 23	Y_3Y_4 16	Y_4Y_5 13	
Y_1Y_3 19	Y_2Y_4 38	Y_3Y_5 ■		
Y_1Y_4 33				
Y_1Y_5 ■				

Y_1 (0)	Y_1 (12)	Y_3 (19)	Y_1 (33)	Y_5
Y_1Y_2 12	Y_2Y_3 ■	Y_3Y_4 26	Y_4Y_5 13	
Y_1Y_3 19				
Y_1Y_4 33				
Y_1Y_5 49				

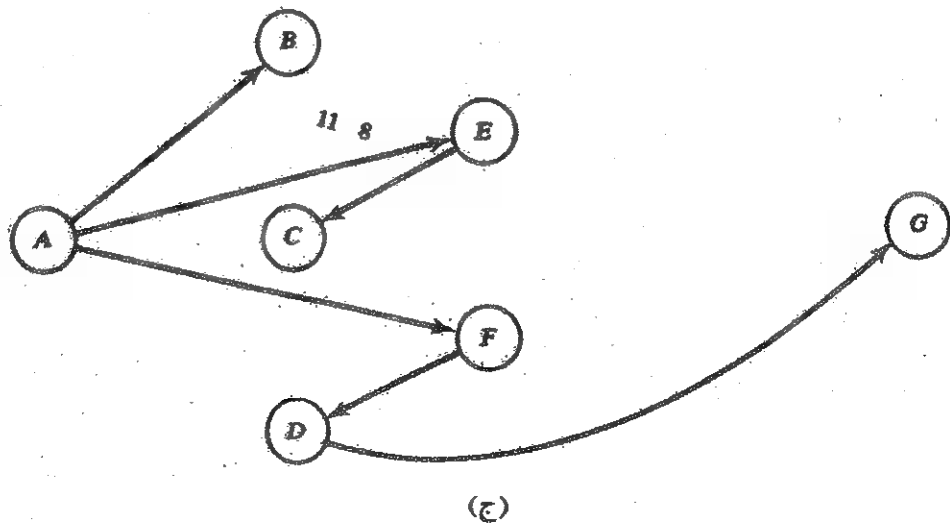
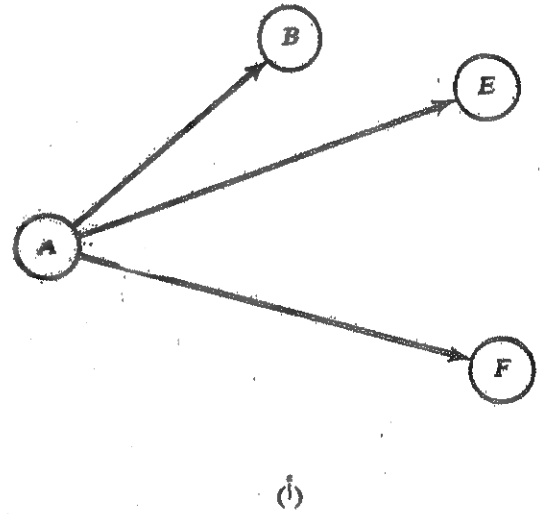
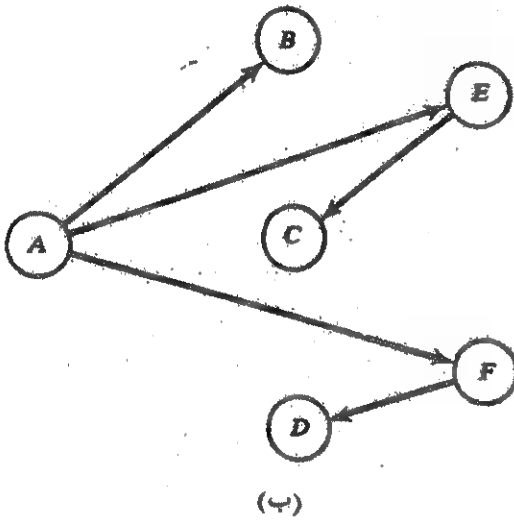
Y_1 (0)	Y_1 (12)	Y_3 (19)	Y_1 (33)	Y_3 (45)
Y_1Y_2 12		Y_3Y_4 26		
Y_1Y_3 19				
Y_1Y_4 33				

شکل ۱۰ - ۹

١٥ - ٥ في شكل ١٥ - ١٠ حدد المسار من المصدر A إلى اللب G الذي يستوعب تدفقاً موجياً .



شكل ١٥ - ١٠



شكل ١٥ - ١١

نبدأ بالمصدر ، ونوجد كل العقد التي يمكن الوصول إليها مباشرة من A خلال الأفرع التي تسمح بتدفق موجب خارجاً من A وهي B, E , and F . كما هو موضح بشكل ١٥ - ١١ (أ) ، ثم نأخذ في الاعتبار بعد ذلك هذه العقد الثلاثة الجديدة على التوالي .

بالتركيز على B أولاً ، نحدد كل العقد غير الواضحة في شكل ١٥ - ١١ (أ) ، والتي يمكن الوصول إليها من B خلال الأفرع التي تسمح بتدفق موجب من B . ولا يوجد أي منها . وبالتركيز على E نرى أن A, B, C يمكن الوصول إليها خلال أفرع تسمح بتدفق موجب من E ، ولكن حيث إن A ، ■ تظهر في الشكل ١٥ - ١١ (أ) ، فتضاف C فقط . ومن F يمكن الوصول إلى A, D خلال الأفرع التي تسمح بتدفق موجب ، ولكن حيث إن A تظهر في شكل ١٥ - ١١ (أ) فتضيف D فقط . وتكون النتيجة شكل ١٥ - ١١ (ب) .

والآن نعتبر النقط C, D على التوالي . بالتركيز على C أولاً ، نحدد أن A, E, D يمكن الوصول إليها مباشرة من خلال الأفرع ذات التدفق الموجب من C . وحيث إن هذه العقد تظهر أصلاً في شكل ١٥ - ١١ (ب) ، فلا نحدث له أي تعديل ، ونعتبر بعد ذلك العقدة D . من D نستطيع الوصول إلى A, G خلال الأفرع التي تسمح بتدفق موجب . وحيث إن G فقط هي الجديدة ، فإننا نوصلها بالشكل ١٥ - ١١ (ب) . ونحصل على الشكل ١٥ - ١١ (ج) . ويتبع ذلك الشكل الأخير أن $\{AF, FD, DG\}$ هي المسار من المصدر إلى المصب الذي يستوعب تدفقاً موجباً (بوحدته واحدة) .

١٥ - ٦ حدد أعلى تدفق للمواد التي يمكن أن ترسل من المصدر A إلى المصب D خلال الشبكة الموضحة بالشكل ١٥ - ٢ .
مسار واحد من المصدر إلى المصب هو الفرع AD الذي يصل بين هاتين العقدتين مباشرة . ويستطيع أن يستوعب ■ وحدات . بشحن هذه الكمية ، فإننا نسلم ■ وحدات إلى D ، ونخفض طاقة AD بـ ٨ ، وحدات ونزيد طاقة DA بـ ■ . ويوضح الشكل ١٥ - ١٢ (أ) الشبكة الناتجة .

مسار آخر من المصدر إلى المصب الذي يستوعب التدفق الموجب هو $\{AC, CB, BD\}$. وأعلى كمية من المواد التي يمكن أن ترسل خلال هذا المسار هي ٤ وحدات ، بطاقة BD . وبإتمام هذا الشحن ، نزيد الإمداد عند D بـ ٤ وحدات إلى $12 = 8 + 4$ ، وفي نفس الوقت نخفض طاقات AC, CB , and BD بـ ٤ وحدات ، ونزيد بنفس الكمية طاقات DB, CA, BC . ويصبح الشكل ١٥ - ١٢ (أ) هو الشكل ١٥ - ١٢ (ب) .

يستطيع المسار $\{AC, CD\}$ في شكل ١٥ - ١٢ (ب) استيعاب ٣ وحدات من A إلى D . وبإتمام هذا الشحن ، نزيد الإمداد عند D بـ ٣ وحدات $15 = 12 + 3$ ، ونخفض طاقات AC and CD ٣ وحدات . ونزيد أيضاً طاقات CA and DC ■ وحدات . وتكون الشبكة الجديدة ١٥ - ١٢ (ج) .

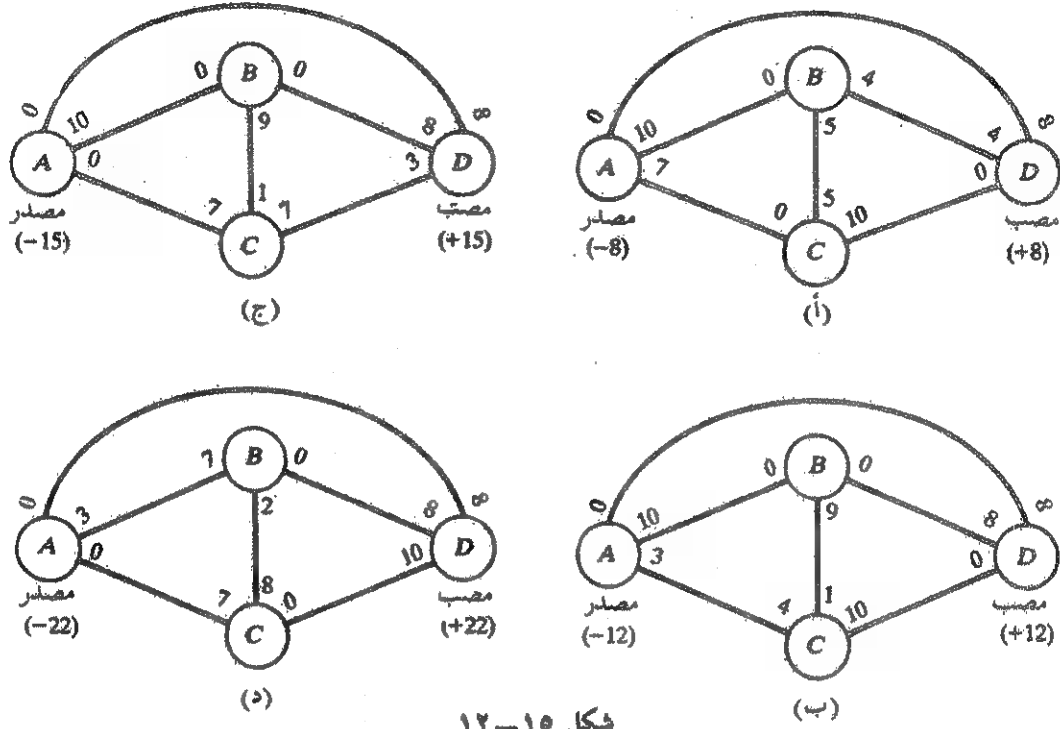
وأيضاً نزيد ٣ وحدات طاقات CA و DC . وتكون الشبكة الجديدة ١٥ - ١٢ (ج) استيعاب ٧ وحدات من المصدر إلى المصب . بحمل ذلك الشحن ، نزيد الإمداد عند D إلى $22 = 15 + 7$ وحدة ، ونخفض طاقات AB, BC, CD ٧ وحدات ونزيد أيضاً ٧ وحدات طاقات BA, CB, DC . وتوضح النتيجة في شكل ١٥ - ١٢ (د) —

لا يوجد مسار من المصدر إلى المصب في شكل ١٥ - ١٢ (د) يسمح بتدفق موجب . لذلك فإن أكبر كمية يمكن أن ترسل من A إلى D هي ٢٢ وحدة . ولتجنب جدول الشحن الأمثل ، نقارن شكل ١٥ - ١٢ (د) بشكل ١٥ - ١٢ . ونلاحظ التخفيض التالي في الطاقات : ٧ وحدات من A إلى ■ ، ٨ وحدات من A إلى D ، ٧ وحدات من A إلى C ، ٤ وحدات من B إلى D ، ٣ وحدات من B إلى C ، ١٠ وحدات من C إلى D . وهذه التخفيضات تعتبر كشحنات . وتكون جدول الشحن الأمثل .

١٥ - ٧ اشرح معنى زيادة الطاقات العكسية كما هو متفق عليه في الخطوة ■ في طريقة التدفق الأعلى .

زيادة هذه الطاقات تسمح بتدفقات في الاتجاهات العكسية في مراحل متأخرة في الطريقة . وهذه التدفقات الوضعية ضرورية لتصحيح التدفق السابق تحديده ، والتي ثبت أنها مثالية .

يمثل مثال في المسألة ١٥ - ٦ ، وذلك في المحاولة الثانية يحدد أن المسار $\{AC, CB, BD\}$ يستطيع أن يستوعب تدفق مباشر 4 وحدات . باستخدام هذا المسار ، ومع ذلك .. ليس مثالياً ، ووجد أن الجدول الأمثل يشحن 3 وحدات من B إلى C ، ولا شيء من C إلى B . بالرغم من ذلك .. فإن شحن 4 وحدات من C إلى B وزيادة الطاقة من B إلى C 4 وحدات تسمح بتصحيح هذا الخطأ بعد ذلك في البرنامج . وفي الحقيقة .. الخطوة الأخيرة في الحل بالمحاولات تسمح بشحن 7 وحدات خلال $\{AB, BC, CD\}$ ولكن هذا الشحن لم تكن في استطاعته زيادة الطاقة في BC عن قيمتها الأصلية 5 وحدات . وفعلياً هذا التدفق لـ 7 وحدات من C إلى B يصبح التدفق غير الأمثل السابق بـ 4 وحدات من C إلى B ، تاركاً تدفق صافي 3 وحدات خلال BC في الاتجاه C .

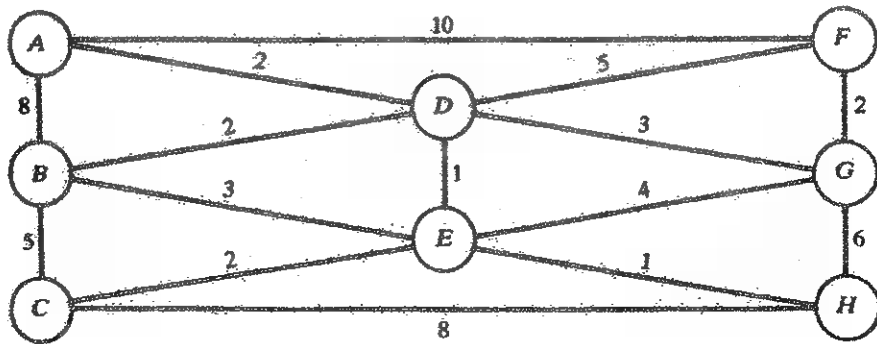


شكل ١٥ - ١٢

مسائل مكملية

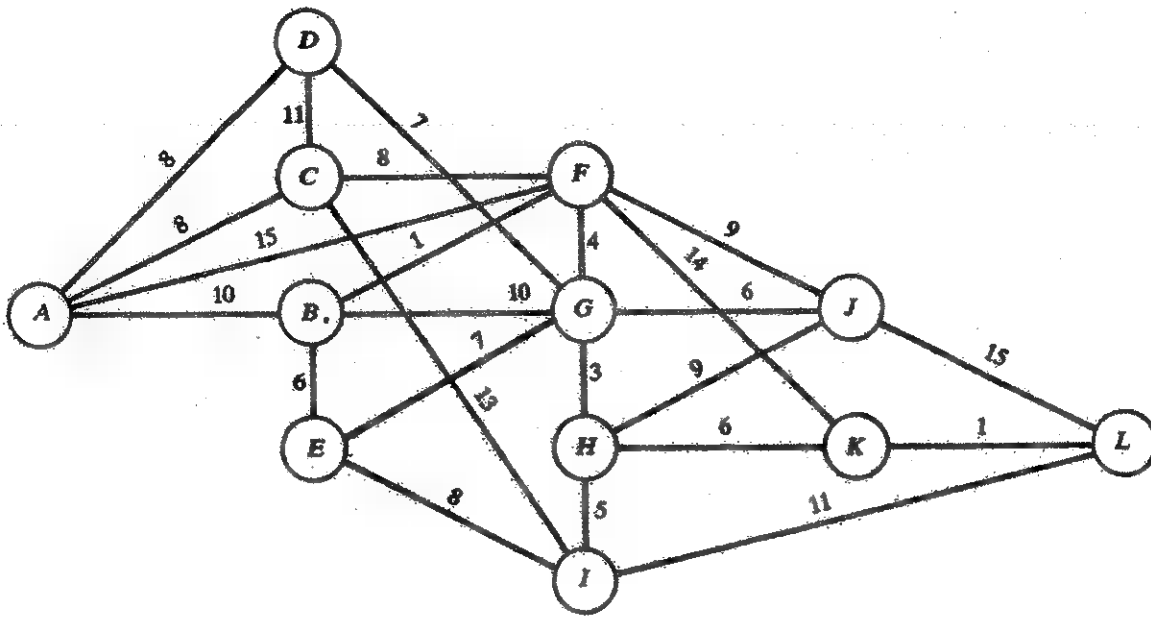
Supplementary Problems

٨ - ١٥ حل مسألة النطاق الأدنى للشبكة الموضحة في شكل ١٥ - ١٣



شكل ١٥ - ١٣

١٥ - حل مسألة النطاق الأدنى للشبكة الموضحة في شكل ١٥ - ١٤ .



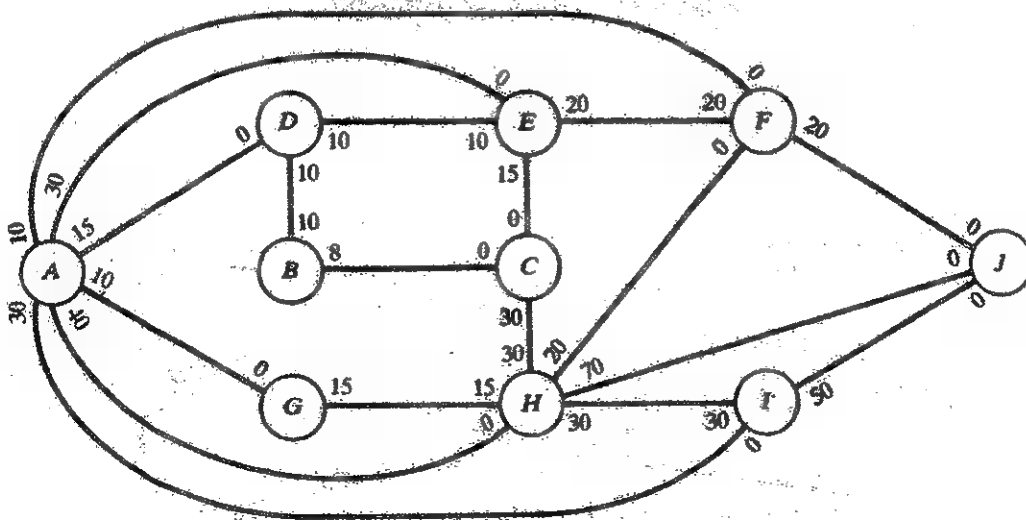
شكل ١٥ - ١٤

١٥ - ١٠ أوجد مسار أقل تكلفة الذي يصل A ، L في الشبكة في شكل ١٥ - ١٤ .

١٥ - ١١ حدد أكبر كمية من المواد التي يمكن أن تشحن من H إلى A خلال الشبكة الموضحة في شكل ١٥ - ١٣ ، بافتراض أن الأعداد على الأفرع تمثل طاقات التدفق في كلا الاتجاهين .

١٥ - ١٢ حدد أكبر كمية من المواد التي يمكن أن تشحن من A إلى K خلال الشبكة الموضحة في شكل ١٥ - ١٤ ، بافتراض أن الأعداد على الأفرع تمثل طاقات التدفق في كلا الاتجاهين .

١٥ - ١٣ حل مسألة التدفق الأعلى للشبكة الموضحة في شكل ١٥ - ١٥ إذا كانت A هي المصدر و J هي المصب .



شكل ١٥ - ١٥

١٥ - ١٤ أعد حل المسألة ١٥ - ١١ إذا كانت H مصدرًا ، بالإضافة إلى D .

١٥ - ١٥ يجب أن تنقل إحدى الشركات 50 وحدة من المنتجات من لوس أنجلوس إلى نيويورك . ويعطى جدول ١٥ - تكاليف النقل (بالدولار لكل وحدة) بين المخازن المختلفة للشركة ؛ وتعني النقط بالجدول أنه لا يمكن النقل مباشرة بين المخازن المناظرة . أوجد جدول النقل الأمثل . حل المسألة كأقصر طريق أولاً . ثم كنوع من التحقق - حل المسألة كمسألة نقل .

جدول ١٥ - ٤

نيويورك	شيكاغو	سانت لويس	لارامي	فيونكس	سان فرنسيسكو	لوس أنجلوس
95	...	39	...	8	7	...
85	36	...	17	22	...	7
...	27	25	14	...	22	8
...	19	31	...	14	17	...
20	14	...	31	25	...	39
13	...	14	19	27	36	...
...	13	20	85	95

١٥ - ١٦ قامت إحدى شركات الإنشاءات بتجميع بيانات عن عربات النقل ، كما في الجدول ١٥ - ٥ (الكميات بالدولار) .

جدول ١٥ - ٥

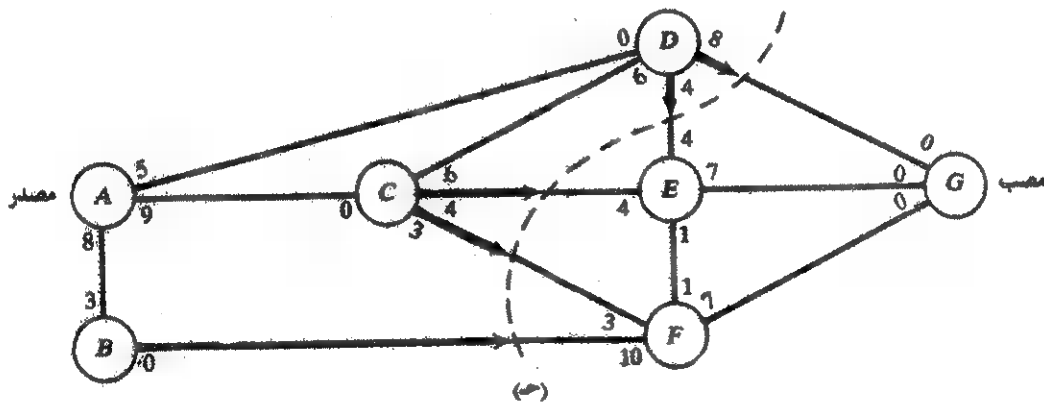
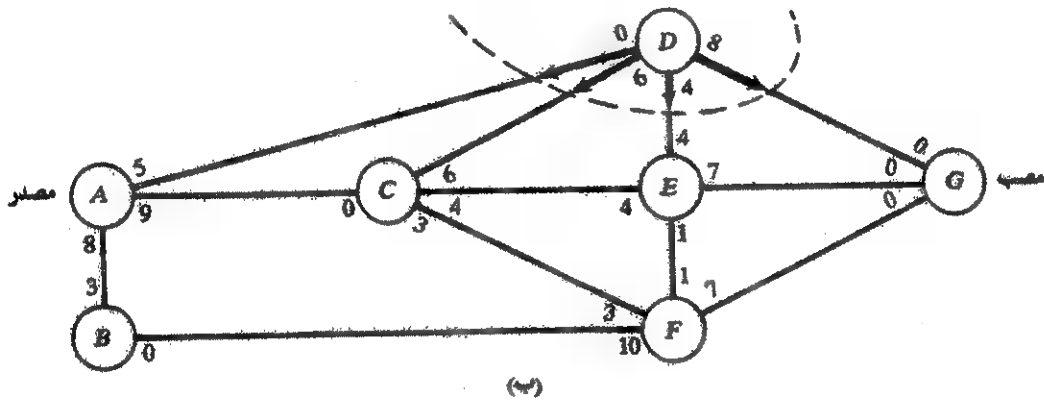
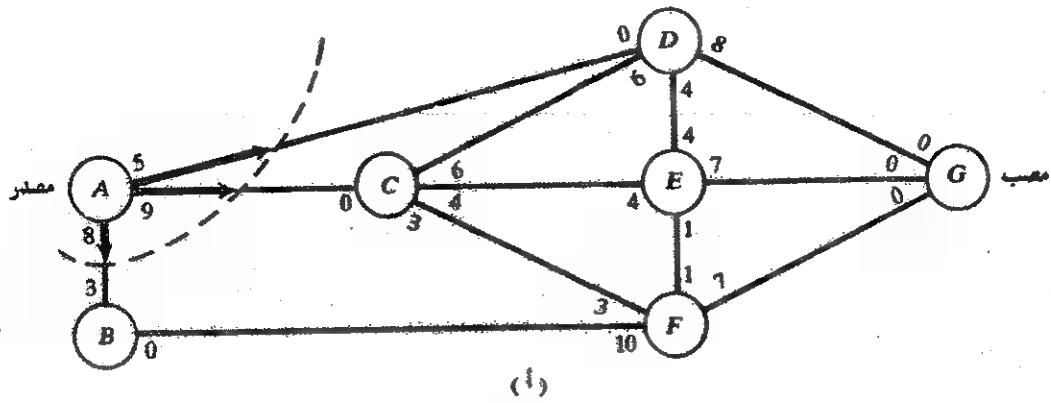
	العمر بالأعوام				
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5
مصاريف الصيانة	7000	7500	9700	7700	9000
العائد الفائق للمعدة	500	800	1200	800	1090
قيمة الاستبدال في نهاية العام	16000	6000	9000	3500	2500

لا تحفظ أى عربة شحن أكبر من خمسة أعوام . حده سياسة الاستبدال لعربة عمرها حالياً ستان . والتي تجعل مصروفات التشغيل أقل مما يمكن خلال ٩ سنوات . تخضع أن مصروفات السيارة الجديدة هي 21000 دولار . وتشتري عربات جديدة فقط للاستبدال . حل المسألة أولاً كأقصر طريق ، ثم تحقق من الحل باستخدام البرمجة الديناميكية . (ملحوظة : عند Y_0 كبدائية للفترة الزمنية ، ثم Y_1 إلى Y_5 كبدائيات للتسبع سنوات التالية ، و Y_2 تمثل يوم شراء العربة الحالية Y_1 غير المطلوبة) .

١٥ - ١٧ القطع في شبكة له مصدر ومصب ، وهو أى مجموعة متجهة من الأفرع تتقوى على الأقل على فرع واحد من كل مسار من المصدر إلى المصب . وقيمة القطع هي مجموع طاقات التدفق في الاتجاهات المحددة للأفرع المكونة للقطع . في الشبكة الموضحة في شكل ١٥ - ١٦ ، والتي فيها تقطع ثلاث مجموعات من الأفرع . ماهي قيم هذه القطع ؟ .

١٥ - ١٨ تنص نظرية أكبر تدفق . وأقل قطع على أن التدفق الأعلى لأي شبكة مصدر واحد ومصب واحد خلال الشبكة يساوى قيمة أقل قطع في الشبكة . باستخدام هذه النظرية ونتائج المسألة ١٥ - ١٧ . حدد حداً أعلى للتدفق خلال الشبكة في شكل ١٥ - ١٦ .

١٥ - ١٩ أوجد قطع خلال الشكل ١٥ - ١٠ تكون قيمته ١ ، وباستخدام نظرية التدفق الأعلى وأقل قطع ونتائج المسألة ١٥ - ٥ استنتج أن أعلى تدفق خلال الشبكة هو وحدة واحدة .



شكل ١٥ - ١٦

الجزء الثاني : الطرق الاحتمالية

PART II: Probabilistic Methods

الفصل السادس عشر

نظرية المباريات

Game Theory

المباريات GAMES

المباراة هي موقف تنافسي بين N أشخاص أو مجموعات يطلق عليها « اللاعبون ». وتجرى تحت قواعد موضوعة مسبقاً بعائد مغروظ . تحدد تلك القواعد الأنشطة الأولية أو تحركات المباراة . ويسمح للاعبين المختلفين بتحركات مختلفة ، ولكن كل لاعب يعرف التحركات الممكنة للاعبين الآخرين .

إذا كسب أحد اللاعبين ما يخسره الآخر ، فإن المباراة تسمى « مباراة صفرية » . والمباراة بين شخصين هي المباراة التي « لاعبان اثنان فقط » ، وتسمى المباراة بين شخصين « وكذلك الصفرية » . « مباريات المصفوفات » . وهذا هو النوع الوحيد الذي سنأخذه في الاعتبار في هذا الفصل .

الاستراتيجيات STRATEGIES

السياسة المطلقة هي خطة محددة مسبقاً تصف للاعب التحركات والتحركات المضادة التي سيقوم بها خلال المباراة . وفي مباريات المصفوفات نجد أن أي لاعب تكون له مجموعة محددة من السياسات المطلقة ، رغم أن عددها قد يكون كبيراً ، فاللاعب $I(II)$ يعرف مجموعة سياسات اللاعب $II(I)$ ، ولكنه لا يعرف بالتأكيد أي من عناصر هذه المجموعة $II(I)$ سيقوم بها عند بداية لعب المباراة . لذلك .. فإن التوصيف الكامل للمباراة يُعطى بمصفوفة العائد (الربحية) ، جدول ١٦ - ١ ، يعطى الكمية g_{ij} التي يكسبها اللاعب I من اللاعب II عندما ينتقل اللاعب I استراتيجيته المطلقة رقم i ، A_i وعندما يلعب II استراتيجيته المطلقة رقم j ، B_j (مصفوفة الربحية للاعب II هي القيم السالبة للمصفوفة السابقة) .

جدول ١٦ - ١

		اللاعب II			
		B_1	B_2	...	B_n
اللاعب I	A_1	g_{11}	g_{12}	...	g_{1n}
	A_2	g_{21}	g_{22}	...	g_{2n}

	A_m	g_{m1}	g_{m2}	...	g_{mn}

جدول ١٦ - ٢

		اللاعب II		
		1	2	3
اللاعب I	1	2	-3	4
	2	-3	4	-5
	3	4	-5	6

تحدد السياسات المطلقة هذه المباراة الصفوية البسيطة لشخصين بالتحركات الفردية (لا يمكن عمل هذا بلعب الحظ مثلاً : إذا تحرك إلى المركز أولاً ، سأتحرك إلى الركن الأعلى الأيمن . وإذا تحرك إلى الركن الأسفل الأيمن سأتحرك ...) . وبالإضافة إلى ذلك .. فإن لكل اللاعبين نفس مجموعة السياسات المطلقة [1, 2, 3] . تعطي مصفوفة الربحية في الجدول ١٦ - ٢ .

حيث إن $(i = 1, \dots, m)$ تناسب الزمن (بمعنى التكرار التسمي أو الاحتمال) الذي يخالف فيه A_i . وبالمثل تكون الاستراتيجية للاعب II هي

حيث y_j ($j = 1, \dots, n$) هي احتمال أن B_j قد أُعْتُبرت. وكل حالات x_i ، y_j تكون لاسلبية. عند

مثال ١٦ - ٢ : في مباراة المثال ١٦ - ١ إذا كشف اللاعب I دائماً ثلاثة أصابع ، فإن اللاعب II يمكن أن يهزم هذه الاستراتيجية المطلقة بكشف أصبعين فقط دائماً . وإذا نفذ اللاعب I تسلسل الاستراتيجيات المطلقة ... 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 3 , فإن اللاعب II يمكن أن يهزم هذه الاستراتيجية بالتسلسل ... 3, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 2.

STABLE GAMES **المباراة المستقرة**

$$m_1 = \text{أعلى قيمة لأقل مكسب للاعب I}$$

$$\{g_{ij}\} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n \end{matrix}$$

$$m \equiv \text{أقل قيمة لأعلى خسارة للاعب II}$$

$$\{g_{ij}\} \quad \begin{matrix} \text{أقل أعلى} \\ j=1, \dots, n \quad i=1, \dots, m \end{matrix}$$

إذا لعب اللاعب I الصف الذي يؤدي إلى أعلى قيمة في (١٦ - ١) — أعلى استراتيجية — فإنه سيكون متأكداً من كسب كمية m_I على أسوأ فرض ؛ بينما يلعب صف آخر ، فإنه يمكن أن يكسب أقل من m_I (وبالتكافؤ) في ظل أعلى استراتيجية ، يخسر اللاعب I — m_I على أسوأ فرض) . وبالتناظر .. إذا لعب اللاعب II العمود الذي يؤدي إلى أقل قيمة في (١٦ - ٢) — الاستراتيجية الأعلى — فإن خسارته المؤكدة (التي تعتبر مكسب للاعب II) ستكون m_{II} على أسوأ فرض . سنقول أن هاتين الاستراتيجيتين ستحققان أقل أعلى دلالة .

والآن من التعريف

(١٦ - ٣)

$$m_I \leq m_{II}$$

لأي مباراة مصفوفة إذا كانت $m_I = m_{II}$ ، فإن اللاعب I سيضعف موقفه بالبعد عن الاستراتيجية الأعلى ، واللاعب II سيضعف موقفه بالبعد عن أقل أعلى استراتيجية فقط . وهذه المباراة تكون « مستقرة » ، وتكون الاستراتيجيات هي الموصوفة مسبقاً بأقل أعلى دلالة مثالية لكل من اللاعبين . بالإضافة إلى ذلك — فإن كلا من اللاعبين يمكن أن يوافق على كيفية لعب المباراة (بالنسبة للاعب I) بمعنى :

$$G^* = m_I = m_{II}$$

تسمى G^* « قيمة » المباراة ؛ وهي الكمية المدفوعة بواسطة اللاعب II للاعب I عندما يستخدم كل منهما استراتيجية المثلى . وتليخضاً لذلك .. فإن كل مباراة مستقرة تكون لها قيمة واحدة ، واستراتيجية مثلى (مطلقة) لكل لاعب . (لاحظ أن الاستراتيجيات المثلى لا تحتاج أن تكون وحيدة)

المباريات غير المستقرة UNSTABLE GAMES

إذا تحققت المتباينة (١٦ - ٣) ، فإن المباراة تكون « غير مستقرة » ، وتصبح الاستراتيجية المطلقة الموصوفة بأقل أعلى دلالة غير مثلى . وتكون النتيجة الأساسية . لمباريات المصفوفات هي عند استخدام استراتيجيات مشتركة ، فإن المباريات غير المستقرة يكون لها حل أيضاً . بمعنى استراتيجيات مثلى وقيمة — على أن تستبدل العائد العشوائي بقيمته المتوقعة . في ظل الاستراتيجيات المختلطة (المعرفة بالمتجه الاحتمالي X للاعب I ، و Y للاعب II ، يكون العائد من II إلى I متغيراً عشوائياً له القيمة المتوقعة .

١٦ - ٤

$$E(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g_{ij} x_i y_j$$

وبالتناظر مع (١٦ - ١) ، (١٦ - ٢) نكتب :

$$M_I = \text{أعلى قيمة لأقل ربح متوقع للاعب I} \\ \text{أعلى (أقل) } (E(X, Y)) \\ Y \quad X$$

(١٦ - ٥)

$$M_{II} = \text{أقل قيمة لأعلى خسارة متوقعة للاعب II} \\ \text{أقل (أعلى) } (E(X, Y)) \\ X \quad Y$$

(١٦ - ٦)

وفيها $X = Y$ تتراوح بين متجهات الاحتمال ذات الأبعاد m ، n على التوالي . لذلك نحصل على :

نظرية أقل أعلى : *Minimax theorem* لأي مباراة مصفوفة ، توجد استراتيجية مثلى X^* ، Y^* بحيث إن

$$E(X^*, Y^*) = M_I = M_{II} = G^*$$

وبمعنى آخر .. فإن أي مباراة مصفوفة تكون لها قيمة . لاحظ أن المباريات المستقرة أيضاً تنطبق عليها نظرية الأقل أعلى ، حيث إن الاستراتيجية المطلقة هي استراتيجية مختلطة خاصة لها عنصر واحد غير صفري (يساوي ١)

الحل بواسطة البرمجة الخطية SOLUTION BY LINEAR PROGRAMMING

الاستراتيجيات المثلى المضمونة بنظرية الأمل أعلى . وكذلك قيمة المباراة يمكن أن تُحسب من خلال البرمجة الخطية . والاستراتيجية المثلى للاعب II تفضل في حل البرنامج الخطي التالي .

$$z = -y_{n+1} \quad \text{تعظيم}$$

$$g_{11}y_1 + g_{12}y_2 + \dots + g_{1n}y_n - y_{n+1} = 0 \quad \text{علماً بأن :}$$

$$g_{21}y_1 + g_{22}y_2 + \dots + g_{2n}y_n - y_{n+1} \leq 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$g_{m1}y_1 + g_{m2}y_2 + \dots + g_{mn}y_n - y_{n+1} \leq 0$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$$

(٧ - ١٦)

حيث إن y_1, y_2, \dots, y_n لا سلبية

وهنا $G^* = y_{n+1}^*$ ، $Y^* = [y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*]^T$ زيادة كل g_i بمقدار بنفس الكمية الموجبة (هذا يترك طبيعة المباراة دون تغيير) .
 فإننا نجعل $\square \geq 0$ لذلك يكون العائد المتوقع للاعب I لا سلبياً أيضاً . وحيث إن هذه الكمية تمثل بـ y_{n+1} في البرنامج (٧ - ١٦) .
 فإنه يتبع ذلك أن تكون كل المتغيرات مقيدة لتكون لا سلبية تحت هذه الظروف . وبالتكافؤ .. فإن y_{n+1} يمكن أن تستبدل بالفرق بين متغيرين جديدين لا سلبين . وتكون الاستراتيجية المثلى للاعب I هي متجه الاحتمال الذي تكون عناصره هي حل ازدواج البرنامج (٧ - ١٦) . (انظر المسألة ١٦ - ٩) .

وعندما تكون لأي لاعب استراتيجيتان مطلقتان فقط ، فإن الاستراتيجية المثلى لهذا اللاعب يمكن تحديدها بالرسم . (انظر المسألة ١٦ - ١٠) وإذا كان لكلا اللاعبين استراتيجيتان مطلقتان بالضبط ، فتكون الاستراتيجيات المثلى هي :

$$(٨ - ١٦) \quad x_1^* = \frac{g_{22} - g_{21}}{g_{11} + g_{22} - g_{12} - g_{21}} \quad x_2^* = \frac{g_{11} - g_{12}}{g_{11} + g_{22} - g_{12} - g_{21}}$$

$$(٩ - ١٦) \quad y_1^* = \frac{g_{22} - g_{12}}{g_{11} + g_{22} - g_{12} - g_{21}} \quad y_2^* = \frac{g_{11} - g_{21}}{g_{11} + g_{22} - g_{12} - g_{21}}$$

حيث

$$(١٠ - ١٦) \quad G^* = \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}{g_{11} + g_{22} - g_{12} - g_{21}}$$

أنظر المسألة (٧ - ١٦)

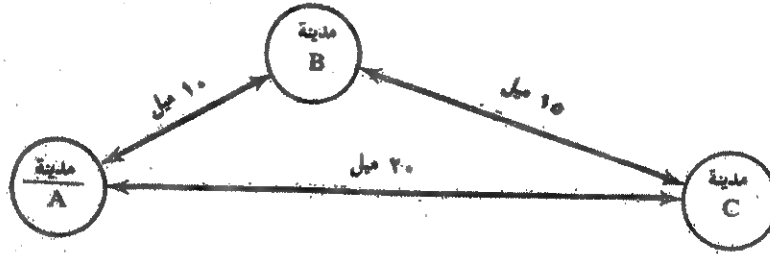
السيطرة DOMINANCE

الاستراتيجية المطلقه P مسيطر عليها بالاستراتيجية المطلقه Q . وإذا كان لكل استراتيجيه مطلقه للخصم — العائد المرتبط بـ P ليس أحسن من العائد المرتبط بـ Q وحيث إن الاستراتيجية المطلقه للسيطرة لا يمكن مطلقاً أن تكون جزءاً من استراتيجية مثلى ، فإن الصف أو العمود المناظر في مباراة المصفوفة يمكن أن يحدف كأسيقيه أولى .

مسائل محلولة

Solved Problems

١٦ - ١ : انشئ مصفوفة عائد للمباراة التالية . يعمل كل من متجرين كبيرين على إنشاء مخزن في منطقة ريفية تقدم ثلاث مدن . وبين شكل ١ - ١٦ المسافات بين المدن ويعيش % 45 تقريباً من تعداد المنطقة بالقرب من المدينة A ، ويعيش % 35 بالقرب من المدينة B ، و % 20 بالقرب من المدينة C . وبسبب أن المتجر I أكبر من وله سمعة طيبة عن المتجر II . فإن المتجر I سيتحكم في معظم الأعمال إذا قارنا وضعيهما . ويتخلى كلا المتجرين من اهتمامات الآخر في المنطقة ، وكل منهما قد استكمل دراسة التسويق التي تعطي دلالات متشابهة . فإذا وقع كل من المتجرين في نفس المدينة أو على مسافة متساوية من مدينة ما ، فإن المتجر I سيتحكم في 65 في المئة من حجم الأعمال في هذه المدينة . وإذا كان المتجر I أبعد عن مدينة ما من المتجر II ، فإنه سيأخذ 40 في المئة من حجم أعمال هذه المدينة . ويذهب باقي حجم الأعمال في كل الحالات إلى المتجر II . بالإضافة إلى ذلك - فإن كلا المتجرين يعلم أن سياسة المتجر هي عدم التواجد في المدن الصغيرة ، وتقع المدينة C داخل هذه الفئة .



شكل ١٦ - ٣

هناك لاعبان لهذه المباراة : المتجر I والمتجر II . للاعب I استراتيجيتان مطلقتان : A_1 (التواجد في المدينة A) ، A_2 (التواجد في المدينة B) ؛ اللاعب II له ثلاث استراتيجيات : B_1 (التواجد في المدينة A) ، B_2 (التواجد في المدينة B) ، B_3 (التواجد في المدينة C) . نأخذ العائد للمتجر I لتكون نسبة حجم الأعمال في المنطقة التي سيحصل عليها I طبقاً لدراسات التسويق . وحيث إن أي نقطة زيادة أو انخفاض في النسبة تمثل انخفاضاً أو زيادة مماثلة للمتجر II على التوالي . فإن المباراة تكون ذات لاعبين صفريّة .

إذا وقع المتجران في نفس المدينة فإن اللاعب I سيحصل على 65 في المئة من حجم العمل في المنطقة كلها . لذلك - $g_{11} = g_{22} = 65$. إذا وقع المتجر I في المدينة A ، بينما يقع المتجر II في المدينة B ، فإن اللاعب I يكون أقرب إلى المدينة A من اللاعب II ، ولكن اللاعب II يكون أقرب إلى المدينتين B و C من اللاعب I . وبالتالي اللاعب I يحصل على :

$$(0.90)(0.45) + (0.40)(0.35) + (0.40)(0.20) = 0.625$$

أو 62.5 في المئة من حجم أعمال المنطقة . لذلك - $g_{12} = 62.5$. وإذا وقع المتجر I في المدينة B ، والمتجر II في المدينة C فإن اللاعب I يكون أقرب إلى المدن B و A ، بينما اللاعب II يكون أقرب إلى المدينة C . وبالتالي يحصل اللاعب I على :

$$(0.90)(0.45) + (0.90)(0.35) + (0.40)(0.20) = 0.80$$

أو 80 في المئة من حجم أعمال المنطقة . لذلك .. $g_{23} = 80$. وبالمثل $g_{21} = 80$. ونجمع هذه النتائج في الجدول ١٦ - ٣ الذي يبين مصفوفة الربحية للمباراة .

جدول ١٦ - ٢

اللاعب II

		B ₁	B ₂	B ₃
	A ₁	65	62.5	80
	A ₂	67.5	65	80

٢ - ١٦

انشئ مصفوفة الربحية للعبة التالية : يتولى برميل على عدد متساوي من الكرات الحمراء والخضراء . يختار اللاعب I عشوائياً كرة واحدة ، ويفحص لونها دون أن يراها اللاعب II . إذا كانت الكرة حمراء يقول اللاعب I « حصلت على كرة حمراء » ، ويطلب من اللاعب II دولاراً واحداً . وإذا كانت الكرة خضراء يقول اللاعب I « الكرة خضراء » ، ويدفع اللاعب II دولاراً واحداً ، أو يقوم اللاعب II بالخداع بقوله « الكرة حمراء » ، ويطلب دولاراً من اللاعب II ، وعندما يطلب اللاعب I دولاراً ، فإن اللاعب II يمكنه أن يدفع أو يتحدى اللاعب I في معرفة لون الكرة إذا ما كانت حمراء أم لا . عند التحدي يجب أن يظهر اللاعب II الكرة للاعب II . وإذا كانت حمراء فعلاً ، يدفع اللاعب II للاعب I دولارين ، وإذا لم تكن حمراء يدفع اللاعب I للاعب II دولارين .

اللاعب I عنده استراتيجيتان مطلقتان فقط هما :

أ : أن يعلن اللون الحقيقي للكرة

ب : أن يعلن أن لون الكرة أحمر ، سواء أكانت كذلك أم لا .

[لاحظ أن الاستراتيجيات المطلق لـ I لا تنطبق مع تحركاته ، وهي (أ) أن يعلن أن الكرة حمراء ، (ب) أن يعلن أن الكرة خضراء] . ولللاعب II أيضاً استراتيجيتان مطلقتان هما :

A₁ : أن يصدق اللاعب I

A₂ : أن يصدقه إذا أعلن أن الكرة خضراء ، وأن يتحدها إذا أعلن أن الكرة حمراء . وحيث إنه إذا كسب أحد الأشخاص ، فإن الآخر يخسر ، فإن المباراة تكون صفرية ذات لاعبين .

في هذه المباراة نجد أن مصفوفة الربحية المرتبطة بالاستراتيجيات المطلق تكون متفرقات عشوائية ، ونستبدلها بقيمتها المتوقعة . لذلك .. تكون g₁₁ هي الربح المتوقع للاعب I إذا أعلن اللاعب I اللون الحقيقي للكرة المختارة ويصدق اللاعب II ، وحيث إن نصف عدد المرات تكون الكرة حمراء ، والنصف الآخر تكون خضراء ، فإن

$$g_{11} = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1) = 0$$

المائد g₁₂ هو العائد المتوقع للاعب II عندما يعلن اللاعب II اللون الحقيقي للكرة ويتحدها اللاعب II عند إعلان أن الكرة حمراء . وحيث إن الكرة II احتمال 1/2 لتكون بأحد اللونين ، فإن نصف عدد المرات لن يكون هناك تحدٍ . ولللاعب II سيتحدى نصف عدد المرات ويخسر . لذلك ..

$$g_{12} = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(2) = \frac{1}{2}$$

بالمثل

$$g_{21} = \frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{2}(2) = 0$$

$$g_{22} = \frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{2}(2) = 0$$

نجمع هذه النتائج بالجدول ١٦ - ٤ الذي يمثل مصفوفة العائد للمباراة

جدول ١٦ - ٤

اللاعب II

		B ₁	B ₂
	A ₁	■	1/2
	A ₂	■	0

٣ - ١٦ حدد ما إذا كانت أى استراتيجية مطلقة في المباراة في جدول ١٦ - ٣ يمكن أن تستبعد من خلال التفضيل .

اللاعب II يمكن أن يستبعد A_1 (التواجد في المدينة A) حيث إن العائد من هذه الاستراتيجية يكون دائماً أقل من II أو يساوى العائد المناظر من A_2 . واللاعب II يمكن أن يستبعد كلا من B_1 ، B_2 كتدخل مع B_2 (لاحظ أن العائد للاعب II هو القيم السالبة في الجدول ١٦ - ٣ للاعب II) . وبمذف الصف الأول ، والعمودين الأول ، الثالث ، فإن مصفوفة العائد تتكون من مدخل واحد . لذلك .. تكون A_2 ، B_2 استراتيجيات مثلى . لذلك يجب أن يتواجد كل من المتجرين في المدينة B ، ويستحكم المتجر II في 65 في المئة من حجم أعمال المنطقة ، والباقي ■ في المئة سيذهب إلى المتجر II .

٤ - ١٦ دع G' تمثل مصفوفة المباراة الناتجة من المصفوفة G بمحذف الصفوف والأعمدة المفضلة . بين أن G تكون مستقلة إذا كانت G' مستقلة .

يكفى أن نعتبر الحالة التي فيها الصف الأول في ■ بفضل عن الصف الثاني . إذا كان g_{1p} ، g_{2p} هما أقل قيمة في الصفين (موضحين بدوائر)

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1p} & \dots & g_{1q} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2p} & \dots & g_{2q} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

فإن $g_{1p} \leq g_{1q}$ ، وأيضاً $g_{1p} \leq g_{2p}$ (بالتفضيل) . لذلك ..

$$g_{1p} \leq g_{2p}$$

وهذا يعنى أن أعلى حد أدنى في ■ هو نفسه أعلى حد أدنى في G' ، أى أن $m_I = m'_I$

وبالإضافة إلى ذلك .. إذا احتوى الصف I على عمود حد أعلى في G - مثلاً g_{1p} يتبع من أن $g_{2p} = g_{1p}$ هي حد أعلى في العمود ، وبالتالي أقل حد أعلى في العمود في ■ هو نفسه أقل حد أعلى في G' ، أى أن $m_{II} = m'_{II}$ نستنتج أن $m_I = m_{II}$ إذا كانت فقط $m'_I = m'_{II}$

■ - ١٦ هل المباراة في جدول ١٦ - ٣ مستقرة ؟

نعم . من المسألة ١٦ - ٣ ، ١٦ - ٤

٦ - ١٦ هل المباراة في الجدول ١٦ - ٤ مستقرة ؟

هنا $m_I = 0 < 1/2 = m_{II}$ المباراة غير مستقرة .

٧ - ١٦ أوجد الاستراتيجيات المثلى لكل من اللاعبين للمباراة في الجدول ١٦ - ٤ .

كما تمجد في المسألة ١٦ - ٦ المباراة غير مستقرة ، وبالتالي لا تحل بالاستراتيجيات المطلقة . وحيث إن هذه المباراة تتضمن استراتيجيتين مطلقتين بالتحديد لكل لاعب ، فإن الاستراتيجيات المثلى (المخططة) هما كما في (١٦ - ٨) ، (١٦ - ٩) مثل

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{0-1}{0+0-(1/2)-1} = \frac{2}{3} & x_2^* &= 1-x_1^* = \frac{1}{3} \\ y_1^* &= \frac{0-(1/2)}{0+0-(1/2)-1} = \frac{1}{3} & y_2^* &= 1-y_1^* = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

وتبعاً لذلك .. فإن اللاعب ■ يجب أن يصدق اللاعب I ثلث عدد المرات ، بينما يتحدى اللاعب ■ الثلثين الثانيين من عدد المرات إذا أعلن اللاعب I أن الكرة حمراء . ويجب أن يعلن اللاعب I اللون الحقيقي للكرة ثلثي عدد المرات ، بينما يخدع الثلث الثالث من عدد المرات . وإذا كانت الكرة خضراء ، تكون النتيجة النهائية من (١٦ - ١٠) هي عائد متوقع

$$G^* = \frac{(0)(0) - (1/2)(1)}{0+0 - (1/2) - 1} = \frac{1}{3} \text{ دولار}$$

للاعب I في كل مرة تلعب المباراة . والعائد المتوقع للاعب ■ هو القيمة السالبة لهذه الكمية .

١٦ - A أوجد الاستراتيجيات المثلى لكلا اللاعبين للمباراة المعرفة بمصفوفة العائد ، والمعطاة في الجدول ١٦ - ١٦ .

جدول ١٦ - ١٦

		اللاعب II			
		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
اللاعب I	A ₁	3	-2	-4	6
	A ₂	-4	2	-1	-8
	A ₃	0	-3	-2	-1
	A ₄				

جدول ١٦ - ١٦

		اللاعب II				
		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅
اللاعب I	A ₁	3	-2	-4	0	6
	A ₂	-4	2	-1	7	-8
	A ₃	2	-5	-4	1	-1
	A ₄	0	-3	-2	-1	-1

الاستراتيجية المطلقة B₄ تسيطر عليها B₃ (وكذلك B₂) ، لذلك يمكن أن نحذف ، وبمجرد ذلك ، فإن A₃ يسيطر عليها B₁ ، ومن ثم A₂ أيضاً يمكن أن تستبعد . وتكون مصفوفة العائد الناتجة هي جدول ١٦ - ٦ الذي فيه

$$m_2 = -3 < -1 = m_1$$

وحيث إن المباراة غير مستقرة ، تكون الاستراتيجيات لكلا اللاعبين مختلطة ومفصلة في حل البرنامج (١٦ - ٧) . وللعائد في جدول ١٦ - ٦ يصبح هذا البرنامج

$$\begin{aligned} z &= -y_6 && \text{تعظيم} \\ 3y_1 - 2y_2 - 4y_3 + 6y_5 - y_6 &\leq 0 && \text{علماً بأن} \\ -4y_1 + 2y_2 - y_3 - 8y_5 - y_6 &\leq 0 \\ -3y_2 - 2y_3 - y_5 - y_6 &\leq 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_5 &= 1 \end{aligned}$$

عند y₁, y₂, y₃, and y₅ لا سالبة

وحيث إن y₆ غير مقيدة ، اجعل y₆ = y₇ - y₈ ، حيث إن كلا من y₇ ، y₈ متغيران غير سالبين (انظر الفصل ٢) . ويكون جنود السبيلكس المبدئ هو الجدول 1 ، بمتغيرات Kاسنة y₉, y₁₀, and y₁₁ ، ومتغير صناعي y₁₂ . وتؤدي خمس محاولات لطريقة السبيلكس إلى جدول 6 . ويتبع ذلك أن الاستراتيجية المثلى للاعب II (عند y₇ = 0 ، ولأن B₄ لم تستخدم) هي

$$Y^* = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5]^T = [0, 7/60, 7/10, 0, 11/60]^T$$

الاستراتيجية المثلى للاعب I (عند $x_3 = 0$ ، ولأن A_3 لم تستخدم) معطاة بدلالة حل الازدواج (انظر الفصل ٥) مثل

$$X^* = [x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*]^T = [1/15, 1/5, 0, 11/15]^T$$

وتكون قيمة المباراة هي

$$G^* = y_8^* = y_7^* - y_8^* = 0 - \frac{29}{15} = -\frac{29}{15}$$

بمعنى أن اللاعب I يمكن أن يتوقع خسارة $29/15$ وحدة للاعب II في كل مرة يلعب ، على أن كلا اللاعبين يستخدم استراتيجيته المثلى .

جدول 1

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	
	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	-M	
y_1	0	3	-2	-4	6	-1	1	1	0	0	0	0	0
y_2	0	-4	2	-1	-8	-1	1	0	1	0	0	0	0
y_3	0	0	-3	-2	-1	-1	1	0	0	1	0	0	0
y_4	-M	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
$(z_i - c_j):$	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	-1
	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1

جدول 6

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	
y_1	7/12	0	0	0	0	0	1/15	-1/20	-1/60	11/60		
y_2	-1/12	1	0	0	0	0	4/15	3/20	-17/20	7/60		
y_3	4/3	0	1	0	0	0	1/15	1/5	11/15	29/15		
y_4	1/2	0	1	0	0	0	-1/5	-1/10	3/10	7/10		
	4/3	0	0	0	0	0	1/15	1/5	11/15	29/15		

١٦ - ٩ (أ) اشتق البرنامج الخطي للاستراتيجية المثلى للاعب I في مباراة المصفوفة المحددة بالجدول ١٦ - ١ . (ب) بين أن هذا البرنامج هو ازدواج مثالي لـ (١٦ - ٧) ، برنامج الاستراتيجية المثلى للاعب II .

(أ) دع X^* تمثل تعظيم X في (١٦ - ٥) ، فإن (١٦ - ٥) تكون مكافئة للشرطين التاليين :

(١) $E(X^*, Y) \geq M_1$ لكل متجهات الاحتمال Y .

(٢) إذا كانت $M_1 > x_{m+1}$ ، فلا يوجد متجه احتمال Y يحقق $E(X, Y) \geq x_{m+1}$ لكل متجهات الاحتمال Y .

يقول الشرط (١) أن اللاعب I يضمن عائد متوقع M_1 على الأقل إذا لعب X^* ، ويقول الشرط (٢) أنه لا توجد استراتيجية أخرى تعطي للاعب I حداً أدنى أكبر للعائد المتوقع . من (١) ، (٢) يتبع أن البرنامج

تعظيم : $x = x_{m+1}$

(١)

علماء بأن : $E(X, Y) \geq x_{m+1}$

(٢)

في المتغيرات x_1, \dots, x_m, x_{m+1} لما الحل $[x_1^*, \dots, x_m^*, M_1]^T$ وهما كان

$$E(X, Y) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m g_{ji} x_i \right) y_j \geq x_{m+1} \quad (y_j \geq 0, \sum y_j = 1)$$

لو فقط لو

(٢)

$$\sum_{j=1}^n g_{ji} x_i = x_{m+1} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

في الحقيقة ، العلاقة (٢) هي التكوين المقعر (فصل ٣) ، بالأوزان y_j للعلاقة (٣) . وبالتالي يمكن كتابة البرنامج (١)

(٤)

$$\begin{aligned} z &= -x_{m+1} && \text{تصغير :} \\ g_{11}x_1 + g_{21}x_2 + \dots + g_{m1}x_m - x_{m+1} &\geq 0 && \text{علماً بأن :} \\ g_{12}x_1 + g_{22}x_2 + \dots + g_{m2}x_m - x_{m+1} &\geq 0 \\ &\dots\dots\dots \\ g_{1n}x_1 + g_{2n}x_2 + \dots + g_{mn}x_m - x_{m+1} &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m &= 1 \end{aligned}$$

عند x_1, x_2, \dots, x_m لا سلبية

حيث إننا غيرنا التعظيم إلى تصغير ، وأضفنا القيد على الاحتمالات .

(ب) في البرنامج (٤) استبدل x_{m+1} بـ $x_{m+1} - x_{m+2}$ ، حيث إن x_{m+1} and x_{m+2} متغيرات لا سلبية ، وأيضاً استبدل متساوية القيد بـ

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 - \dots - x_m &\geq -1 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m &\geq 1 \end{aligned}$$

قم بالاستبدال المناظر في البرنامج (٧ - ١٦) ، فيصبح البرنامج (٤) من الصيغة (٥ - ١) ، والبرنامج (٧ - ١٦) من الصيغة (٥ - ٢) حيث إن ،

$$\begin{aligned} X &= [x_1, x_2, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}]^T & W &= [y_1, y_2, \dots, y_{n+1}, y_{n+2}]^T \\ A &= \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & \dots & g_{m1} & -1 & +1 \\ g_{12} & g_{22} & \dots & g_{m2} & -1 & +1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{1n} & g_{2n} & \dots & g_{mn} & -1 & +1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & \dots & +1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix} & C &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

١٦ - ١٥ استخدم طريقة الرسم لتحديد الاستراتيجية المثلى للاعب I في المباراة المعروفة في الجدول ٧ - ١٦

جدول ٧ - ١٦

اللاعب II

		اللاعب II		
		B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	A ₂	2	-3	-4
		-6	-1	1

يصح البرنامج (٤) لهذه المبراه في المسألة ١٦ - ٩ (أ)

$$z = -x_3 \quad \text{تصغير :}$$

$$2x_1 - 6x_2 - x_3 \geq 0 \quad \text{علماً بأن :}$$

$$-3x_1 - x_2 - x_3 \geq 0$$

$$-4x_1 + x_2 - x_3 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

عند x_1 و x_2 لا سلبية

قبل حل هذا البرنامج بالرسم يجب أن يختصر إلى نموذج يحتوي على متغيرين فقط . ويمكن كتابة متساوية القيد

$$(٢) \quad x_2 = 1 - x_1$$

وبالتالي نضمن لا سلبية x_2 يجعل

$$(٣) \quad x_1 \leq 1$$

بتعويض (٢) في القيود في النموذج (١) ، واستبدال شرط اللاسلبية على x_2 بالقيد الجديد (٣) وبالذهاب إلى برنامج تعظيم نحصل على .

$$z = x_3 \quad \text{تعظيم :}$$

$$8x_1 - x_3 \geq 5 \quad \text{علماً بأن :}$$

$$-2x_1 - x_3 \leq 1$$

$$5x_1 + x_3 \leq 1$$

$$x_1 \leq 1$$

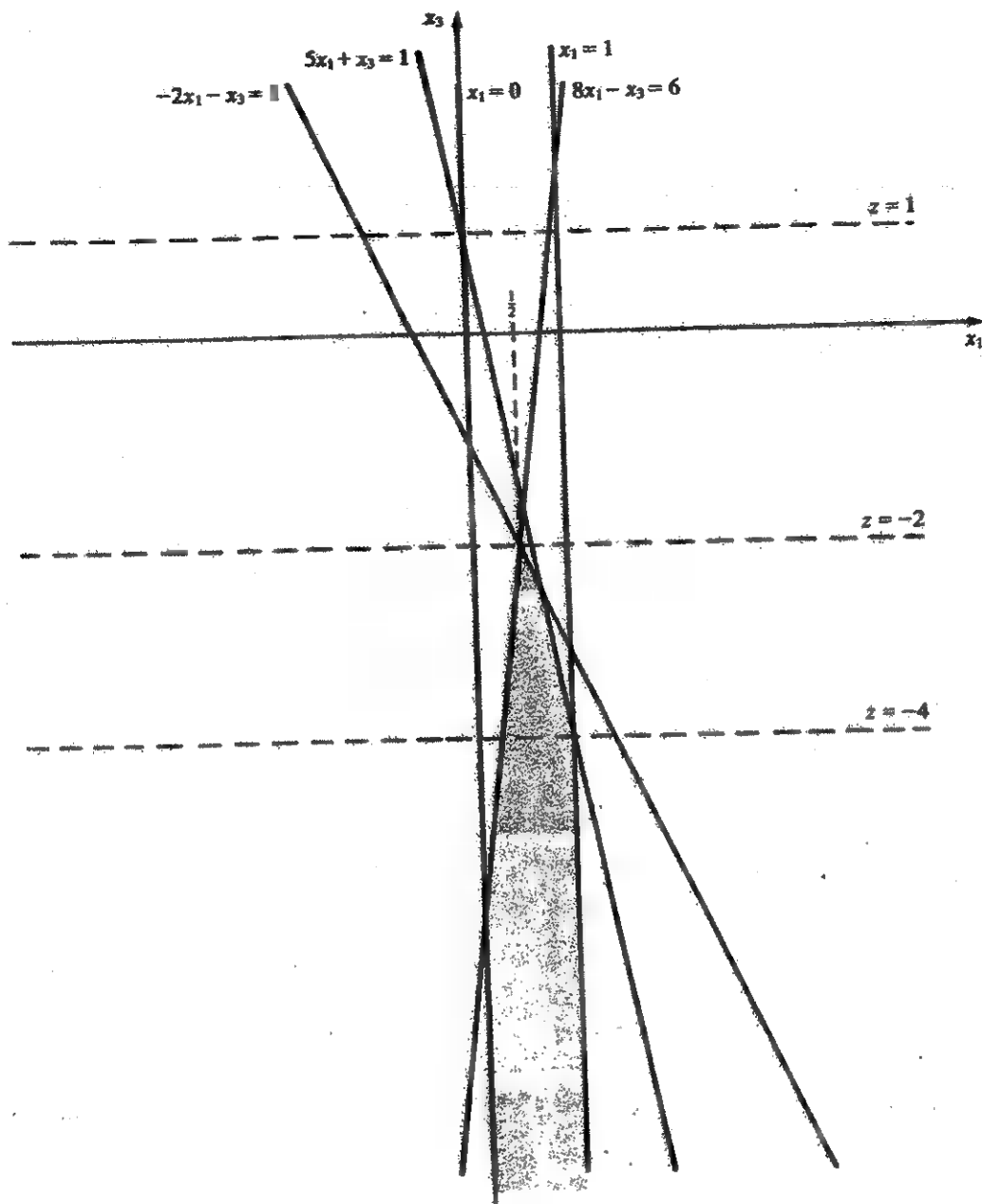
$$x_1 \geq 0 \quad \text{عند}$$

والحل بالرسم للبرنامج (٤) يوضح في شكل ١٦ - ٢

$$x_1^* = 1/2 \quad x_2^* = 1 - x_1^* = 1/2$$

$$z^* = x_3^* = -2$$

ونتيجة المبراه تكون



شکل ۱۶-۲

مسائل مكاملة :

Supplementary Problems

١٦ - ١١ حدد ما إذا كانت كل مباراة مصفوفة « معرفة بأسفل بعائد لاعب الصف ، مستقرة ، ثم أوجد كلا من الاستراتيجية المثلى ، وقيمة المباراة .

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	0	-6
A_2	-1	-1	2
A_3	-2	0	0

(٤)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	-1	-2	-1
A_2	0	-2	8	6

(١)

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	6	1
A_2	8	4	6
A_3	1	2	1

(٥)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	-1	1	0
A_2	-1	1	0	1

(٦)

	B_1	B_2
A_1	-1	-2
A_2	0	2
A_3	-1	-5
A_4	-2	1

(٧)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-2	-1	-2	8
A_2	1	0	-1	-1
A_3	-3	1	-3	1

(٨)

١٦ - ١٢ حل المسألة ١٦ - ١ : إذا كان الشجر يتحكم في 70 في المئة من حجم أعمال المدينة أينما يتواجد كلا المتجرين في نفس المدينة ، أو يكونا على مسافة متساوية من مدينة ما .

١٦ - ١٣ حل المسألة ١٦ - ١ : إذا كانت المنطقة تخضع بأربع مدن تقع على طريق سريع ، هو مبين في شكل ١٦ - ٣ يمشي 15 في المئة من السكان تقريباً بالقرب من المدينة ■ و 30 في المئة بالقرب من المدينة B ، و 20 في المئة بالقرب من المدينة C ، و ■ في المئة بالقرب من المدينة D ، وكل المدن كبيرة بشكل كافٍ يسمح لكلا المتجرين بالتواجد بها .



شكل ١٦ - ٣

١٦ - ١٤ اقترح طريقة لتنفيذ الاستراتيجية X^* للمسألة ١٦ - ٨ .

١٦ - ١٥ يرغب أحد الجيوش في شحن إمدادات لنقطة على الحدود ، مع توقع هجوم من الجيش ■ خلال ساعات . يتصل أقرب مخزن إمداد بالموقع بطريقتين منفصلتين : الأول خلال الغابات ، والثاني خلال الأرض المنبسطة . تسير قافلة الإمداد أسرع على الأرض المنبسطة ■ ولكن تتمتع بإخفاء أكثر في الغابات ، ولكن يجب أن تسلك القافلة طريقاً واحداً .

يتوقع الجيش ■ مجهود إمداد على أحد الطرق ، ويخطط لخمسة بضربات جوية . عند الجيش B سرب منفرد من الطائرات لا يمكن تقسيمه . إذا أرسل الجيش B طائراته فوق طريق الغابة ، ووجد الجيش A هناك ، فإن الجيش ■ سيجد الوقت لأربع ضربات ضد القافلة . وإذا أرسل الجيش B طائراته فوق طريق الأرض المنبسطة ، وكان الجيش A يستخدم هذا الطريق ، فإن الجيش B سيجد وقت لثلاث ضربات . وإذا أرسل الجيش ■ طائراته إلى الطريق الخاطئ ■ فإن الوقت سيضيع . وبمجرد أن يتحقق من الخطأ ويوجه القافلة على الطريق الآخر سيجد الجيش ■ وقت لضربتين على طريق الأرض المنبسطة ■ وضربة واحدة على طريق الغابات (بسبب صعوبة العثور على القافلة بين الأشجار) . حدد الاستراتيجية المثلى للجيشين .

١٦ - ١٦ يتنافس جيش أزرق وجيش أحمر على مجالين جويين يساويان 20 ■ 80 مليون دولار . والاثنان تحت سيطرة الجيش الأحمر . يتولى الجيش الأزرق الهجوم على أي من أو كلا من المجالين الجويين مع إحداث خسائر (بالدولار) في الإمكانات المتاحة . وواجب الجيش الأحمر هو تقليل الخسائر . لتحقيق أهدافهما فإن كل جيش يعين كل قوته لأحد المجالين الجويين ■ أو تقسم قوته لنصفين لتغطية المجالين الجويين بطاقة مخفضة .

ووجد بالتجربة أن موقع ما يتعرض لخسارة 25 في المئة ، إذا هوجم ودفع عنه بكامل القوة ، و 10 في المئة خسائر إذا هوجم ودفع عنه بنصف القوة . وإذا هوجم الموقع بالقوة الكاملة ودفع عنه بنصف القوة ، فإنه سيحدث خسائر 30 في المئة وأي موقع يُهاجم بالقوة الكاملة أو بنصف القوة سيتعرض للتدمير الكامل . والموقع الذي لا يُهاجم أو إذا هوجم بنصف القوة ودفع عنه بالقوة الكاملة لن يتعرض لأي خسائر . حدد الاستراتيجية المثلى لكلا الجيشين .

١٦ - ١٧ يتنازع اثنان من أصحاب عرب المواشي على شريط من الأرض طوله 6 ياردات يفصل بين ممتلكاتهما . يدعى كل منهما أن شريط الأرض من ممتلكاته . يخشى الاثنان أن يسأل المحكم كل منهما بتقديم اقتراح سرى لإنهاء النزاع بعدالة ، ويقبل الاقتراح الذي يفيد أكثر إذا كان الاقتراحان متساويين أو غير متساويين على الإطلاق ، فإن المحكم سيفصل في الاختلاف بجعل الحدود في منتصف مساحة ال ■ ياردات . حدد أحسن اقتراح لأصحاب العرب إذا كانت الاقتراحات كميات صحيحة .

١٦ - ١٨ يستخدم مهربو السجائر طريقين لنقل السجائر خارج نورث كارولينا ، وهما : طريق داخل رقم 95 ، أو الطريق الخلفي . وكلا الطريقين معروف لدى البوليس ، ونظراً لقلّة عدد أفرادهم ■ فإنه يراقب أحد الطرق فقط بكفاءة في أي وقت . وهذه الحقيقة معروفة لدى المهربين .

يقدر البوليس أن متوسط الحمولة المسافرة على الطريق الداخلي ■ تساوي 1000 دولار للمهربين إذا وصلت إلى نيويورك . ويحدد الطريق الخلفي حجم العربات إلى حد ما ، لذلك فإن متوسط الحمولة المسافرة على هذا الطريق يساوي 800 دولار إذا وصلت لمكان الوصول . وأي حمولة تكشف بواسطة البوليس تصادر ويقض على المهربين . بالنسبة للسجائر المسافرة على الطريق 95 تقدر الخسائر للمهرب بمتوسط 700 دولار ، والخسائر على الشحنة المسافرة على الطريق الخلفي بمتوسط 600 دولار . بالإضافة إلى ذلك .. فإن البوليس يقدر أنه يستطيع اعتراض 40 في المئة من حمولة العربات المسافرة على الطريق 95 إذا كانوا يراقبون الطريق السريع ■ و 25 في المئة من العربات على الطريق الخلفي إذا كانوا يراقبون هناك . حدد استراتيجية عمل للبوليس إذا كان هدفه هو تقليل مكاسب المهربين .

١٦ - ١٩ قبل الانتخابات يوم واحد وضع المرشحان لمنصب حاكم الولاية الهدف على أن هناك ثلاث مدن مهمة تستحق زيارة أخيرة .
وحيث إنه لا تفيد أى زيارة دون الإعداد المسبق من معاونيه . فإن الخطط يجب أن توضع لكل مرشح قبل معرفة اختيار منافسه . ويوضح تقرير كلا الجانبين نفس المفاهيم . وبين جدول ١٦ - ٨ العائد المتوقع (بالألف صوت) للمرشح ■ الناتج من كل زيارة في اليوم الأخير . ما هي المدينة التي يجب أن يختارها كل مرشح للزيارة .

جدول ١٦ - ٨

■ المرشح

	الى المدينة 1	الى المدينة 2	الى المدينة 3
الى المدينة 1	12	-9	14
الى المدينة 2	-8	7	12
الى المدينة 3	11	-10	10

١٦ - ٢٠ تكون المباراة عادلة إذا كانت $G^* = 0$. وتكون المباراة متعادلة إذا كان لكل من اللاعبين نفس العدد من الاستراتيجيات . وإذا كان لكل i : i العائد للاعب I من استراتيجيته المطلقة رقم i ، والاستراتيجية رقم i للثاني نفس العائد للاعب II من استراتيجيته رقم i ، رقم لـ I . اثبت أن أى مباراة متعادلة تكون عادلة .

١٦ - ٢١ في إحدى ألعاب الورق المعروفة يمسك اللاعب I ورقة لعب لونها أحمر ، واثنين لونهما أسود ، بينما يمسك اللاعب II اثنين لونهما أحمر ، وثلاث لونهما أسود . في نفس الوقت كلا اللاعبين يظهر ورقة واحدة باختياره . إذا تساوت الورقتان في اللون : يكسب اللاعب I ، وإلا يكسب اللاعب II . يتحدد العائد بالصيغة التالية : إذا أظهر اللاعب I الواحد (الآس) : فإن اللاعبين يتبادلان الفرق (بالدولار) بين الكميات الظاهرة على الورقتين (الآس بعد بواحد) ؛ وإذا أظهر اللاعب I الاثنين : يتبادل اللاعبان مجموع (بالدولار) الكميات الظاهرة على الكارتين . اللاعب I ، من الواضح أنه يمكن أن يكسب إما دولاراً أو 3 دولارات أو يخسر إما 2 دولار أو 4 دولارات . وهي من أسباب أن المباراة عادلة ؛ أليست كذلك ؟

نظرية القرار Decision Theory

عمليات القرار DECISION PROCESSES

عملية القرار هي عملية تتطلب لاستكمالها إما قراراً أو مجموعة متتالية من القرارات . وكل قرار مسموح به يرتبط به مكسب أو خسارة تتحدد بالاشتراك مع الظروف الخارجية المحيطة بالعملية . وهذه الخاصية تميز هذه العمليات من العمليات التي عولجت في الفصل ١٤ . ومجموعة الظروف الممكنة ، المفروقة بحالات الطبيعة ، والتوزيع الاحتمالي الذي يحكم حدوث كل حالة منها ، من المفترض أن تكون معروفة . وسيفترض أن كلاً من حالات الطبيعة والقرارات المسموح بها محدودة (هذا الفرض لا يعمل في حالة النظرية الأكثر تفضيلاً) .

نرمز للقرارات المسموحة بالرموز D_1, D_2, \dots, D_m وحالات الطبيعة بالرموز S_1, S_2, \dots, S_n ، والعائد المرتبط بالقرار D_i ، حالة الطبيعة S_j هو g_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) . والعملية التي تتطلب تنفيذ أحد هذه القرارات تعرف كاملة في جدول ١٧ - ١ . وهذا الجدول للعائد يعرف باسم مصفوفة العائد عندما تكون مدخلات المصفوفة هي عائد لصانع القرار . وتمثل الخسارة بالعائد السلبى .

جدول ١٧ - ١

	حالات الطبيعة			
	S_1	S_2	\dots	S_n
D_1	g_{11}	g_{12}	\dots	g_{1n}
D_2	g_{21}	g_{22}	\dots	g_{2n}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
D_m	g_{m1}	g_{m2}	\dots	g_{mn}

جدول ١٧ - ٢

	حالات الطبيعة	
	S_1	S_2
D_1	60	660
D_2	-100	2000

مثال ١٧ - ١ : تقدم إحدى شركات الطاقة إلى صاحب أرض مبلغ 60 000 دولار لحقوقي الاستكشاف للغاز الطبيعي في موقع معين . وبدائل التطوير المستقبلى . وهذا البديل ، إذا تم ، يستحق مبلغاً إضافياً 600 000 دولار لصاحب الأرض ، ولكن هذا يتم إذا اكتشف الغاز في مرحلة الاستكشاف . وصاحب الأرض يعتقد أن اهتمامات شركة الطاقة هي مؤشر جيد على وجود الغاز . لذا يحاول تطوير الحقل بنفسه . ولعمل هذا ، فإنه يجب أن يوقع عقداً مع أحد بيوت الخبرة المحلية في الاستكشاف والتطوير . والتكلفة الأولية لذلك هي 100 000 دولار تفقد كلها في حالة عدم اكتشاف غاز . ومع ذلك .. فإن صاحب الأرض يتوقع عائداً قدرة 2 مليون دولار إذا اكتشف الغاز .

قرارات صاحب الأرض هي : D_1 (أن يقبل عرض شركة الغاز) ، D_2 (يستكشف ويطور بنفسه) . وحالات الطبيعة هي : S_1 (لا يوجد غاز في الأرض) ، S_2 (هناك غاز في الأرض) . يوضح الجدول ١٧ - ٢ العائد (بالآلاف دولار) لصاحب الأرض لكل مجموعة أحداث .

ويعنى أن نقدر الاحتمالات المرتبطة بكل حالة من حالات الطبيعة $P(S_1)$ ، $P(S_2)$ رغم أن جدول ١٧ - ١ يشابه في الشكل جدول ١٦ - ، ولكن يوجد فرق واضح بين عملية القرار ومباريات المصفوفات . ففى عملية القرار نجد أن صانع القرار فقط هو القادر على صنع القرارات الرشيدة ، أما الطبيعة فلا . والحالة الفعلية للطبيعة الموجودة في أى وقت محدد هي حدث عشوائى « ولا يمكن اعتبار التوزيع الاحتمالى لهذه الأحداث » استراتيجية مختلطة « مصممة لإحداث خسائر على صانع القرار . وأكثر من ذلك ، فإننا نستبعد بوجه عام أى عشوائية في اختيارية صانع القرار » فهو أو هي تكون مقيدة بواحدة أو أكثر من الاستراتيجيات المطلقة D_1, \dots, D_n . وبسبب هذه الاختلافات تميل الاستراتيجيات المثلى للمباراة إلى عملية القرار لتكون أكثر تحفظاً .

مقياس القرار الساذج NAIVE DECISION CRITERIA

مقياس « الأقل أعل » (التشائم) هو أن نختار القرار الذى يقلل أعلى خسارة ممكنة لصانع القرار . وبدلالة مصفوفة العائد « فإنه القرار الذى يعظم أقل عائد ممكن . والمقياس المتفائل هو أن نختار القرار الذى يعظم العائد الممكن . ومقياس نقطة منتصف الطريق هي أن نختار القرار الذى فيه يكون متوسط أعل وأقل عائد أكبر ما يمكن (انظر المسألة ١٧ - ١ ، ١٧ - ٢) . وحيث إنه لا يبنى أى من هذه المقاييس على احتمال حالة الطبيعة « فإنها تكون مقاييس داخلية لمقاييس أخرى . وسنطلى الآن مقاييس احتمالية .

أ - المقياس السابق A PRIORI CRITERION

المقياس السابق (أو بايز) هو أن نختار القرار الذى يعظم العائد المتوقع ، (انظر المسائل ١٧ - ٣ ، ١٧ - ٤) .

ب - المقياس اللاحق A POSTERIORI CRITERION

إذا أمكن عمل تجربة غير كاملة بحيث تعطى معلومات عن حالة الطبيعة الحقيقية « فإن هذه البيانات من التجربة تجمع الاحتمالات الأولية لحالات الطبيعة المختلفة لتؤدى إلى توزيع احتمال معدل . أطلق على ناتج التجربة θ ، وافرض أن صلاحية التجربة تعطى بالاحتمالات المشروطة $P(\theta | S_1)$ ، $P(\theta | S_2)$ ، \dots ، $P(\theta | S_n)$. فإن الاحتمالات المعدلة (اللاحقة) لحالات الطبيعة $P(S_1 | \theta)$ ، $P(S_2 | \theta)$ ، \dots ، $P(S_n | \theta)$ تحدد من نظرية بايز (المسألة ١٧ - ٥) . ويكون المقياس اللاحق هو أن نختار القرار الذى يعظم العائد المتوقع بالنسبة للتوزيعات الاحتمالية المعدلة . (انظر المسألة ١٧ - ٦ ، ١٧ - ٧)

DECISION TREES أشجار القرار

شجرة القرار هي الشجرة الموجهة (انظر الفصل ١٥) التى تمثل عملية القرار . تمثل العقد نقط زمنية « حيث إن : (١) يجب أن يصنع قراراً أو آخر بواسطة صانع القرار « أو (٢) يواجه صانع القرار بحالة أو بأخرى من حالات الطبيعة ، أو (٣) تنتهى العملية . المتجه الخارج من (١) هو فرع لكل قرار ممكن « والمتجه الخارج من (٢) هو فرع لكل حالة ممكنة من حالات الطبيعة . وتحت كل فرع يكتب الاحتمال المناظر لكل حدث ، عندما يحدد (انظر المسائل ٧ - ١٣ حتى ٧ - ١٦) .

وتفيد أشجار القرارات في تحديد القرارات المثلى للعمليات المعقدة . ويبدأ الأسلوب بمقد النهايات ، ثم التحرك للخلف بحلال الشبكة ، وحساب العائد المتوقع في العقد المتوسطة ، ويكتب كل عائد فوق عقده المناظرة . والقرار المفضل هو الذى يؤدى إلى أعلى عائد متوقع . والقرارات التى يظهر أنها غير مفضلة تشطب أفرعها المناظرة (انظر المسألة ١٧ - ٨ ، ١٧ - ٩) .

UTILITY المنفعة

المنفعة من العائد هي القيمة العددية لصانع القرار . وحيث إنه لا يمكن اختبار أى معيار للقرارات إذا لم يقدر عائد الكلى بطريقة كمية ، بوحدات متماثلة ، فإن الخطوة الأولى في تحليل أى عملية قرار هي تحديد المنفعة للعائد الكلى غير الكمي . (انظر المسألة ١٧ - ١٢)

والمنفعة المشتركة هي القيمة النقدية « حيث يستبدل كل عائد (مثلاً : منزل جديد) بقيمته بالدولارات في مصفوفة العائد . ومع ذلك .. فإن القيمة النقدية لا تكون دائماً مناسبة . فعائد 2 مليون دولار هو ضعف عائد 1 مليون دولار ، ولكن قد لا يساوى القرار الأول ضعف القرار الثاني بالنسبة لصانع القرار . فقد يكون المليون الأول ذا قيمة أعلى من المليون الثاني . وفي الحالات التي لا تعكس فيها الدولارات القيمة الحقيقية لأي عائد بالنسبة لعائد آخر « أو حيناً لا تكون الدولارات مناسبة للتقييم الكمي ، فإن وحدات منفعة أخرى يجب أن تُستخدم .

لعبة الحظ (اليانصيب) : LOTTERIES

لعبة الحظ $\mathcal{L}(A, B; p)$ هي حدث عشوائي له مخرجان ، A ، ■ ، يحدثان باحتمال p ، $1-p$ على التوالي .

وحدات المنفعة لقانون نيومان VON NEUMANN UTILITIES

تستخدم الطريقة التالية ذات الأربع خطوات لتحديد وحدات المنفعة لقانون نيومان لعدد محدد من العائد .

الخطوة 1 : رتب العائد ترتيباً تنازلياً طبقاً للرغبة : e_1, e_2, \dots, e_p وهنا e_p تكون على الأقل مطلوبة مثل e_1 إذا كانت $i < j$.

الخطوة 2 : حدد إحصائياً قيمة عددية $u(e_1)$ ، $u(e_p)$ للعائد e_1 ، e_p على التوالي ، بحيث إن $u(e_1) > u(e_p)$.

الخطوة 3 : لكل عائد e_j مرتب بين e_1 ، e_p من حيث درجة الطلب ، حدد احتمال مكافئ ■ الذي له خاصية أن صانع القرار لا يفضل بين الحصول على e_j بالتأكد أو باشتراكه في لعبة الحظ $\mathcal{L}(e_1, e_p; p_j)$.

الخطوة 4 : دع $u(e_j) = p_j u(e_1) + (1-p_j) u(e_p)$ لتكون المنفعة للعائد e_j .

الخطوة 3 موضوعية بدرجة كبيرة . قيمة p_j لكل عائد e_j ($j = 2, 3, \dots, p-1$) هي تحديد فردي يمكن أن يتغير بشكل مؤثر من شخص لآخر ، وحتى لنفس الشخص في وقتين مختلفين . والمنفعة الناتجة ، لذلك ، تحدد كمياً القيمة النسبية للعائد لصانع قرار معين في لحظة معينة . ومع ذلك .. للفرد الرشيد فإنه من المتوقع دائماً أن ترتيب p 's وكذلك ترتيب u 's سيكون نفس الترتيب مثل e 's (انظر المسائل 17 - 10 حتى 17 - 12) .

تكون المنفعة معجلة إذا كان $u(e_1) = 1$ ، $u(e_p) = 0$ ، مما يجعل المنفعة متماثلة للاحتالات المتكافئة .

مسائل محلولة

Solved Problems

17 - 1 حدد القرارات المفضلة في ظل المعايير البسيطة للعملية الموضحة في المثال 17 - 1 .

مصفوفة العائد لهذه العملية توضح بالجدول 17 - 2 أقل عائد للقرار D_1 هو 60 ، بينما العائد للقرار D_2 هو 100 . وبما أن أعلى 60 = $\{60, -100\}$ هو العائد المرتبط D_1 ، تكون D_1 هي القرار المفضل في ظل دلالة الأقل أعلى .

وأعلى مدخل في المصفوفة هو 2000 ، وهو العائد المرتبط بـ D_2 . لذلك تكون D_2 هي القرار المفضل في ظل المعيار المتفائل .

متوسط أعلى وأقل عائد لـ D_1 ، D_2 على التوالي هو

$$\frac{660 + 60}{2} = 360 \quad , \quad \frac{2000 + (-100)}{2} = 950$$

وبما أن أعلى $\{360, 950\} = 950$ مرتبطة بـ D_2 ، D_2 يكون هو القرار المفضل في ظل مقياس منتصف الطريق .

١٧ - ٢ حدد القرارات المفضلة في ظل المعايير البسيطة (الساذجة) لعملية القرار التالية . يصدر أحد مشتري الأزياء لأحد المحلات الكبيرة أوامر الشراء للصناع قبل موعد طلب الأزياء بتسعة أشهر . وأحد القرارات يتعلق بعدد الأزياء القصيرة المطلوبة للمخزن . وأعلى عائد للمحل يعتمد على هذا القرار وعلى الطراز السائد بعد ٩ أشهر . وتعطى تقديرات العائد (بالألف دولار) في جدول ١٧ - ٣ .

جدول ١٧ - ٣

	S_1 طول قصير طراز جيد	S_2 طول قصير طراز مقبول	S_3 طول قصير طراز غو مقبول
D_1 : لا طلب	-50	0	80
D_2 : طلب بسيط	-10	30	35
D_3 : طلب متوسط	60	45	-30
D_4 : طلب كبير كبيره	80	40	-45

وأقل عائد للقرارات D_1 وحتى D_4 على التوالي هو -50 ، -10 ، -30 ، -40 . وحيث إن أكبر هذه الكميات هي -10 ، العائد المرتبط بـ D_2 ، فإن D_2 هي القرار المفضل بدلالة الأقل أعلى .

أعلى عائد هو ■ مرتبط بكل من D_1 ، D_4 ومن ثم فإن أي من D_1 أو D_4 هو القرار المفضل في ظل المعايير المتفائلة . متوسط أعلى أقل عائد لـ D_1 وحتى D_4 على التوالي هي 15 ، 12.5 ، 15 ، 17.5 . وحيث إن أعلى هذه المتوسطات مرتبط بـ D_4 ، فإن D_4 تكون هي القرار المفضل في ظل مقياس منتصف الطريق .

١٧ - ٣ حدد القرار المفضل تحت ظل المقياس السابق للعملية في المثال ١٧ - ١ ، وإذا قدر صاحب الأرض احتمال وجود الغاز بـ 0.6 . عند $P(S_1) = 1 - 0.6 = 0.4$ يجمع ذلك أن $P(S_2) = 0.6$. باستخدام البيانات في جدول ١٧ - ٢ نحسب العائد المتوقع من D_1 كما يلي

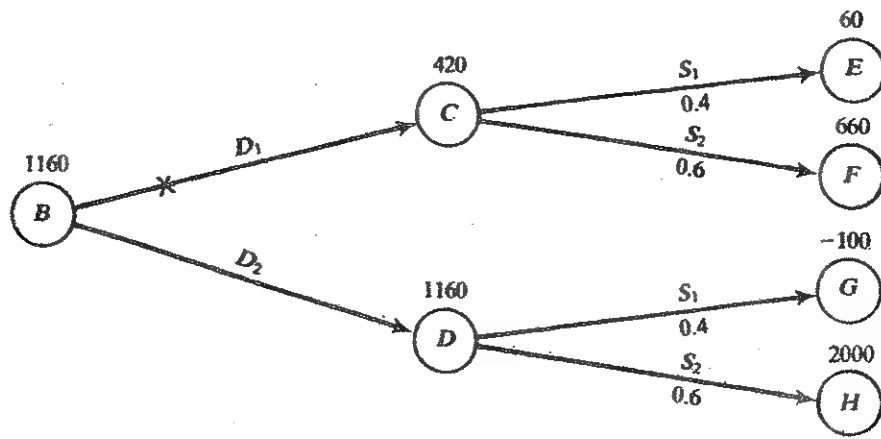
$$E(G_1) = (60)(0.4) + (660)(0.6) = 420$$

والعائد المتوقع من D_2 هو

$$E(G_2) = (-100)(0.4) + (2000)(0.6) = 1160$$

وحيث إن أعلى هاتين القيمتين هي 1160 مرتبطة بـ D_2 ، فإن D_2 تكون هي القرار المفضل في ظل المقياس السابق .

تمثل هذه العملية بشجرة القرار في شكل ١٧ - ١ . والعائد المتوقع للعملية 1160 عند العقدة B . يؤخذ بالعودة خلفياً من العقدة D .



شكل ١٧ - ١

١٧ - ٤ حدد القرار المفضل في ظل المقياس السابق لعملية القرار الموضحة في المسألة ١٧ - ٢ ، إذا قدر المشتري

$$P(S_1) = 0.25, P(S_2) = 0.40, \text{ and } P(S_3) = 0.35.$$

باستخدام البيانات في الجدول ١٧ - ٣ نحسب العائد المتوقع للقرارات D_1 حتى D_4 على التوالي .

$$E(G_1) = (-50)(0.25) + (0)(0.40) + (80)(0.35) = 15.5$$

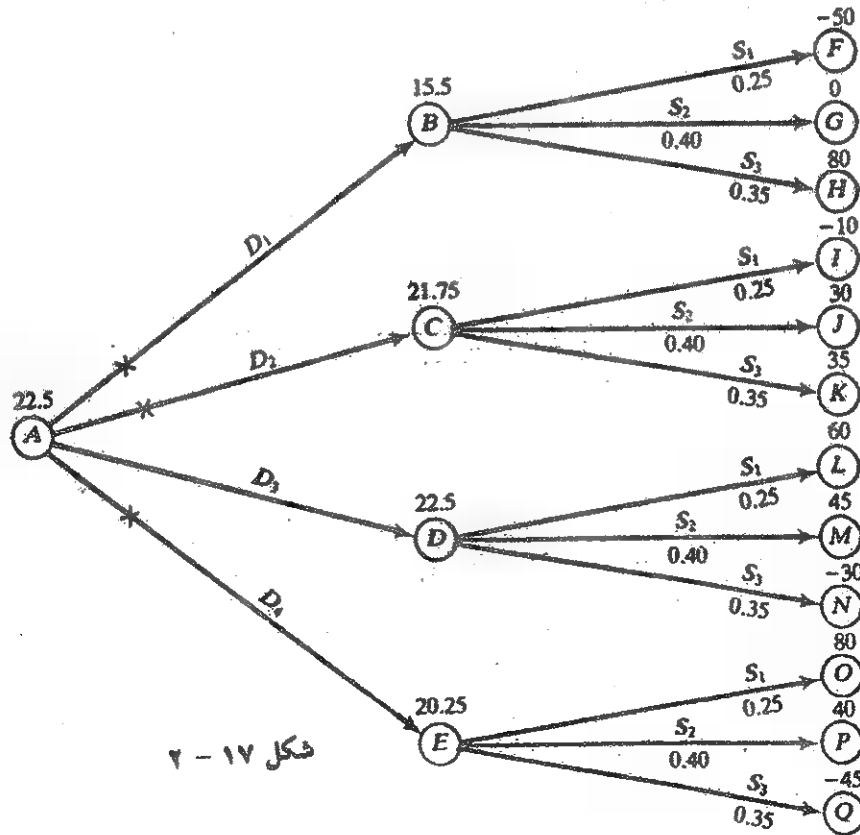
$$E(G_2) = (-10)(0.25) + (30)(0.40) + (35)(0.35) = 21.75$$

$$E(G_3) = (60)(0.25) + (45)(0.40) + (-30)(0.35) = 22.5$$

$$E(G_4) = (80)(0.25) + (40)(0.40) + (-45)(0.35) = 20.25$$

وحيث إن أكبر عائد من هذه الكميات هو 22.5 مرتبط بـ D_3 ، فإن D_3 هي القرار المفضل في ظل المقياس السابق .

تمثل هذه العملية بشجرة القرار في شكل ١٧ - ٢ .



شكل ١٧ - ٢

اعتبر عينة فراغ \mathcal{S} تتكون من كل المخرجات لتجربة تصورية (بمعنى أن تتوقع حالة الطبيعة عند أى وقت محدد) . إذا كان A ، B حدثين (مجموعة فرعية) من \mathcal{S} ، فإن الاحتمال المشروط لـ A بشرط حدوث B ، وكذلك الاحتمال المشروط لـ B بشرط حدوث A يُعرف كما يلي :

$$(1) \quad P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

حيث إن $A \cap B$ هي تقاطع A ، B . يحل (١) نحصل على

$$(2) \quad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

وفيها يفترض أن $P(A) > 0$ المعادلة (٢) هي الصيغة البسيطة لنظرية بايز .

والصيغة الأكثر استخداماً نحصل عليها بإدخال مجموعة من الأحداث المشتركة في خصوصيتها $\{H_1, H_2, \dots, H_k\}$ واتحادها هو \mathcal{S} . لذلك

$$(3) \quad \begin{aligned} P(A) &= P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \dots + P(A \cap H_k) \\ &= P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \dots + P(A|H_k)P(H_k) \end{aligned}$$

بالتعويض بـ (٣) في (٢) واختيار H_i نحصل على

$$(4) \quad P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^k P(A|H_j)P(H_j)}$$

وبوجه عام .. فإن النظرية (٤) تقم احتمال السبب H_i عند إعطاء التأثير A .

صاحب الأرض في المثال ١٧ - ١ أعاد بعض الاختبارات للموقع الذى اشبه في وجود غاز به ، وذلك بتكلفة 30 000 دولار . وتدل الاختبارات على أن الغاز غير موجود ، ولكن الاختبار ليس كاملاً . والشركة التي تقوم بالاختبار تسلم بأن 30 في المئة من وقت الاختبار يدل على عدم وجود غاز ، بينما في الحقيقة يوجد غاز . وإذا لم يوجد غاز يكون الاختبار صحيحاً 90 في المئة من الوقت . باستخدام هذه البيانات ، عدل التقدير الأول لصاحب الأرض ، وهو أن احتمال وجود الغاز هو 0.6 ، ثم حدد القرار المفضل بمفهوم المقياس اللاحق .

مبدئياً $P(S_2) = 0.6$ ، $P(S_1) = 0.4$ دع \blacksquare تمثل الحدث ، أنه لا يوجد غاز ، فتعطي صلاحية الاختبار بالاحتمال

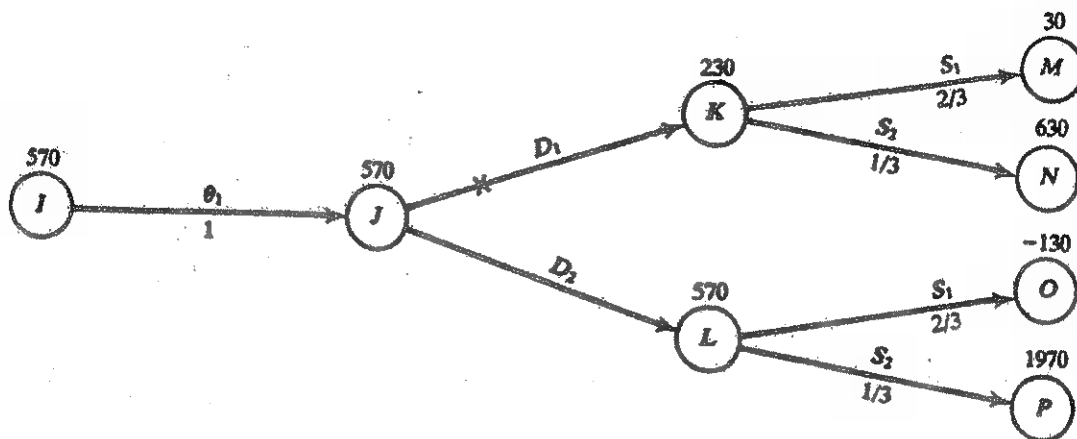
المشروط $P(\theta_1|S_1) = 0.90$ and $P(\theta_1|S_2) = 0.30$. وتعطي نظرية بايز (٤) في المسألة ١٧ - ٦ الاحتمالات المعدلة

$$\begin{aligned} P(S_1|\theta_1) &= \frac{P(\theta_1|S_1)P(S_1)}{P(\theta_1|S_1)P(S_1) + P(\theta_1|S_2)P(S_2)} = \frac{(0.90)(0.4)}{(0.90)(0.4) + (0.30)(0.6)} = \frac{2}{3} \\ P(S_2|\theta_1) &= 1 - P(S_1|\theta_1) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ونحصل على مصفوفة العائد بالمقياس اللاحق من الجدول ١٧ - ٢ بطرح 30 (ألف دولار) من كل مدخل في المصفوفة .
لذلك نمكس تكلفة الاختبار . ويكون الربح المتوقع (بالآلف دولار) للقرارات D_1 و D_2 على التوالى بمعرفة الاحتمالات
المعدلة هو

$$E(G_1 | \theta_1) = (60 - 30)(\frac{2}{3}) + (660 - 30)(\frac{1}{3}) = 230$$

$$E(G_2 | \theta_1) = (-100 - 30)(\frac{2}{3}) + (2000 - 30)(\frac{1}{3}) = 570$$



شكل ١٧ - ٢

حيث إن أكبر عائد متوقع يرتبط بـ D_2 ، فإن D_2 تكون هي القرار المفضل باعتبار المقياس اللاحق .
الشكل ١٧ - ٢ هو شجرة القرار لهذه العملية . واحتمال أن تدل الاختبارات على عدم وجود غاز $P(\theta_1)$ هي واحد . حيث
إن نتيجة التجربة معروفة .

١٧ - ٧ حل المسألة ١٧ - ٦ إذا دلت الاختبارات على وجود غاز .

أطلق على الحدث أن الاختبارات تدل على وجود غاز θ_2 . من البيانات للمسألة ١٧ - ٦

$$P(\theta_2 | S_1) = 0.10 \quad P(\theta_2 | S_2) = 0.70$$

الاحتمالات المبدئية هي : $P(S_1) = 0.4$, $P(S_2) = 0.6$ ، لذلك يكون التوزيع الاحتمالي المعدل هو

$$P(S_1 | \theta_2) = \frac{P(\theta_2 | S_1) P(S_1)}{P(\theta_2 | S_1) P(S_1) + P(\theta_2 | S_2) P(S_2)} = \frac{(0.10)(0.4)}{(0.10)(0.4) + (0.70)(0.6)} = 0.087$$

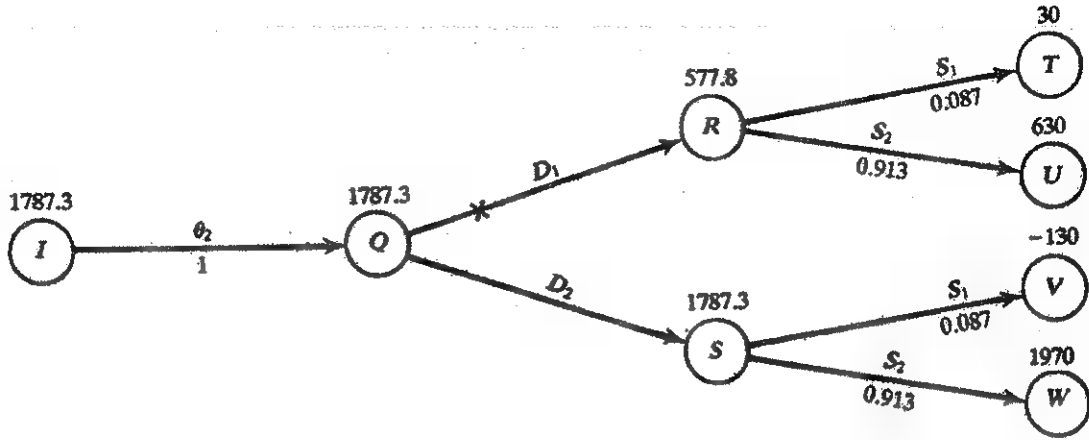
$$P(S_2 | \theta_2) = 1 - P(S_1 | \theta_2) = 0.913$$

ومرة أخرى يجب أن يخفض كل مدخل في مصفوفة العائد الأصلية في الجدول ١٧ - ٢ بـ 30 (ألف دولار) لتكلفة
الاختبار . لذلك يكون العائد المتوقع (بالآلف دولار) للقرارات D_1 و D_2 بالنسبة إلى آخر توزيع احتمالي هو

$$E(G_1 | \theta_2) = (60 - 30)(0.087) + (660 - 30)(0.913) = 577.8$$

$$E(G_2 | \theta_2) = (-100 - 30)(0.087) + (2000 - 30)(0.913) = 1787.3$$

حيث إن أعلى عائد متوقع يرتبط بـ D_2 ، فإن D_2 يكون القرار المفضل بمفهوم المقياس اللاحق
الشكل ١٧ - ٤ هو شجرة القرار لهذه العملية . واحتمال أن تدل الاختبارات على وجود غاز $P(\theta_2)$ هو واحد . حيث إن
نتيجة التجربة معروفة .



شكل ١٧ - ٤

١٧ - ٨ ما هو القرار المفضل إذا كانت الاختبارات التي نوقشت في المسائل ١٧ - ٦ ، ١٧ - ٧ لم تؤخذ كلية ، ولكن أخذت في الاعتبار فقط .

هذه الحالة هي عملية قرار ذات مرحلتين . أولاً : يجب أن يقرر صاحب الأرض ما إذا كان سينفذ الاختبارات . ثم بعد ذلك يجب أن يقرر ما إذا كان سيقبل عرض شركة الطاقة . اجعل .

D_I = قرار أن ينفذ الاختبارات
 D_{II} = قرار ألا ينفذ الاختبارات
 θ_1 = حالة أن الاختبارات تبين عدم وجود غاز
 θ_2 = حالة أن الاختبارات تبين وجود غاز

شجرة القرار لهذه العملية هي شكل ١٧ - ٥ الذي يتكون أساساً من الأشكال ١٧ - ١ ، ١٧ - ٣ ، ١٧ - ٤ . والاحتمالات الأساسية هي في $P(\theta_1)$ ، $P(\theta_2)$. ولا تكون هذه الاحتمالات واحدة كما في الأشكال ١٧ - ٣ ، ١٧ - ٤ ، وذلك لأن نتيجة التجربة غير معروفة . والحالات S_1 ، S_2 مع ذلك تكون غير مشتركة ، ولها مجموعة مخرجات مستنفدة ، ومن ثم .. من (٣) في المسألة ١٧ - ٨ ومن البيانات المعلقة في المسائل ١٧ - ٦ ، ١٧ - ٧ .

$$P(\theta_1) = P(\theta_1 | S_1)P(S_1) + P(\theta_1 | S_2)P(S_2) = (0.90)(0.4) + (0.30)(0.6) = 0.54$$

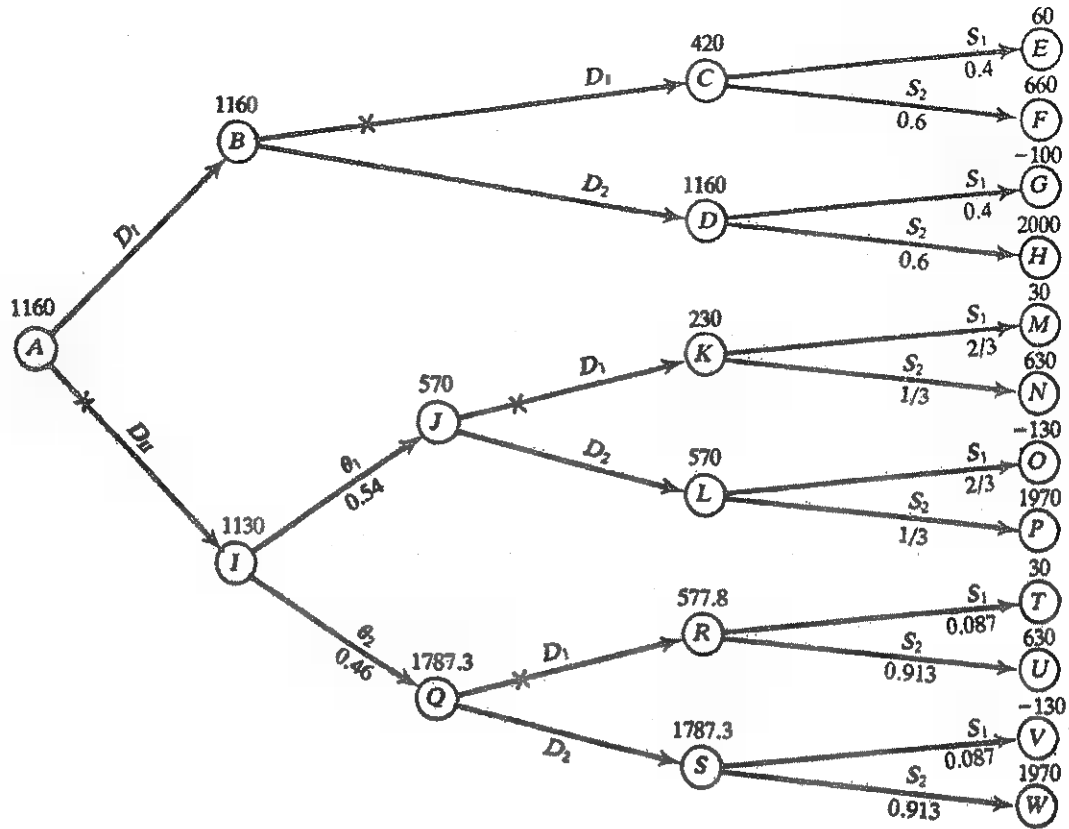
$$P(\theta_2) = P(\theta_2 | S_1)P(S_1) + P(\theta_2 | S_2)P(S_2) = (0.10)(0.4) + (0.70)(0.6) = 0.46$$

بهذه الاحتمالات يكون العائد المتوقع عند العقدة I هو

$$(570)(0.54) + (1787.3)(0.46) = 1130$$

وحيث إن العقدة B لها عائد متوقع أكبر من العقدة I ، تفضل على D_{II} لذلك تكون القرارات المفضلة هي ألا تنفذ الاختبارات ، وألا تقبل عرض شركة الطاقة . والبديل لذلك أن يبدأ صاحب الأرض بالاستكشاف بمفرده فوراً .

لاحظ أن القرار المفضل هو D_2 ، بصرف النظر عما إذا تقرر عمل الاختبارات ، أو حتى بصرف النظر عن نتائج الاختبارات إذا تمت . لذلك .. فإن الاختبارات لا يكون لها أى تأثير على القرار النهائي « وتمثل تكلفة فقط . وهذا يعكس الحقيقة « وهي أن الفرق في العائد المتوقع عند العقد \square ، I في شكل ١٧ - ■ هو بالتحديد تكلفة الاختبار .



■ شكل ١٧ - ■

١٧ - ٩ تعزم بلدية إحدى المدن استبدال أسطولها من العربات البنزين بعربات كهربية . ويُلحى صانع العربات الكهربائية أن البلدية ستوفر كثيراً خلال فترة استخدام العربات إذا غيرها ، وتشك البلدية في ذلك . إذا كان رأى الصانع صحيحاً ، فإن البلدية ستوفر مليون دولار . أما إذا كانت التكنولوجيا الجديدة غير سليمة (العربات الكهربائية) ، كما يوعز بعض النقاد ، فإن هذا التحويل سيكلف المدينة 450,000 دولار . وهناك احتمال ثالث ، وهو ألا تحدث أى من الحالتين ، ولا تتكلف ، ولا توفر المدينة شيئاً نتيجة التحويل . وطبقاً لتقرير استشارى حديث ، فإن الاحتمالات لهذه الأحداث الثلاثة هي 0.25 ، 0.45 ، 0.30 . ولدى المدينة برنامج شامل إذا نفذته ، سيوضح التكلفة أو التوفير في التحول إلى العربات الكهربائية . يتضمن البرنامج تأجير ثلاث عربات لمدة 3 أشهر ، وتشغيلهم في الظروف العادية . وتكلفة هذا البرنامج للمدينة ستكون 50,000 دولار . ويقتد مستشار المدينة أن نتائج هذا البرنامج الشامل ستكون مرضية ، ولكن ليست نهائية . ويقدم المستشار جدول ١٧ - ٤ كترجمة للاحتمالات مبينة على خبرته في المدن الأخرى « وذلك لتأييد وجهة نظره . ما هي الأفعال التي تقرها المدينة لتعظيم الوفر المتوقع ؟

جدول ١٧ - ٤

بدل البرنامج الشامل على

	بدل البرنامج الشامل على		
	خساره	لا تغير	وفر
التحويل	0.1	0.3	0.6
تقطة التبادل	0.2	0.4	0.4
خسارة النقود	0.4	0.5	0.1

هذه العملية هي عملية ذات مرحلتين. أولاً يجب أن تقرر النتيجة ما إذا كانت مستفد البرنامج الشامل أم لا. ثم بعد ذلك يجب أن تقرر ما إذا كانت ستحول أسطولها إلى عربات كهربية أم لا. اجعل :

D_1 =	قرار ألا تنفذ البرنامج الشامل
D_{II} =	قرار أن تنفذ البرنامج الشامل
θ_1 =	حدث أن يدل البرنامج الشامل على توفير
θ_2 =	حدث ألا يدل البرنامج الشامل على توفير أو خسارة
θ_3 =	حدث ألا يدل البرنامج الشامل على خسارة
D_1 =	قرار التحول إلى العربات الكهربائية
D_2 =	قرار عدم التحول إلى العربات الكهربائية
S_1 =	حالة أن العربات الكهربائية أرخص من عربات البنزين في التشغيل
S_2 =	حالة أن العربات الكهربائية لها نفس تكلفة تشغيل عربات البنزين
S_3 =	حالة أن العربات الكهربائية أغلى من العربات البنزين في التشغيل

مصفوفة العائد (بالآلف دولار) هي

	S_1	S_2	S_3
D_1	1000	0	-450
D_2	0	0	0

التوزيع الاحتمالي الأولي للحالات هو $P(S_1) = 0.25$, $P(S_2) = 0.30$, and $P(S_3) = 0.45$.

إذا لم ينفذ البرنامج الشامل ، فإن التوزيع الاحتمالي الأولي لن يبدل ، ويكون العائد المتوقع لـ D_1 ، D_2 هو على التوالي

$$E(G_1) = (1000)(0.25) + (0)(0.30) + (-450)(0.45) = 47.5$$

$$E(G_2) = (0)(0.25) + (0)(0.30) + (0)(0.45) = 0$$

وبحيث إن أكبر عائد متوقع يرتبط بـ D_1 ، فإن D_1 تكون القرار المفضل بمفهوم المقياس السابق

إذا نفذ البرنامج الشامل تخفض كل المدخلات في المصفوفة بـ 50 لتوضيح تكلفة الاختبار. ويصبح جدول ١٧ - ■ أنه

$P(\theta_1 S_1) = 0.6$	$P(\theta_1 S_2) = 0.4$	$P(\theta_1 S_3) = 0.1$
$P(\theta_2 S_1) = 0.3$	$P(\theta_2 S_2) = 0.4$	$P(\theta_2 S_3) = 0.5$
$P(\theta_3 S_1) = 0.1$	$P(\theta_3 S_2) = 0.2$	$P(\theta_3 S_3) = 0.4$

باستخدام نظرية بايز (٤) في المسألة ١٧ - ■ نحصل على

$$(1) \quad P(S_1 | \theta_1) = \frac{(0.6)(0.25)}{(0.6)(0.25) + (0.4)(0.30) + (0.1)(0.45)} = 0.4762$$

$$(2) \quad P(S_2 | \theta_1) = \frac{(0.4)(0.30)}{(0.6)(0.25) + (0.4)(0.30) + (0.1)(0.45)} = 0.3810$$

$$(3) \quad P(S_3 | \theta_1) = \frac{(0.1)(0.45)}{(0.6)(0.25) + (0.4)(0.30) + (0.1)(0.45)} = 0.1429$$

$$(٤) \quad P(S_1 | \theta_2) = \frac{(0.3)(0.25)}{(0.3)(0.25) + (0.4)(0.30) + (0.5)(0.45)} = 0.1786$$

$$(٥) \quad P(S_2 | \theta_2) = \frac{(0.4)(0.30)}{(0.3)(0.25) + (0.4)(0.30) + (0.5)(0.45)} = 0.2857$$

$$(٦) \quad P(S_3 | \theta_2) = \frac{(0.5)(0.45)}{(0.3)(0.25) + (0.4)(0.30) + (0.5)(0.45)} = 0.5357$$

$$(٧) \quad P(S_1 | \theta_3) = \frac{(0.1)(0.25)}{(0.1)(0.25) + (0.2)(0.30) + (0.4)(0.45)} = 0.0943$$

$$(٨) \quad P(S_2 | \theta_3) = \frac{(0.2)(0.30)}{(0.1)(0.25) + (0.2)(0.30) + (0.4)(0.45)} = 0.2264$$

$$(٩) \quad P(S_3 | \theta_3) = \frac{(0.4)(0.45)}{(0.1)(0.25) + (0.2)(0.30) + (0.4)(0.45)} = 0.6792$$

وفي حدود التقريب للخطأ ، فإن كل مجموعة من الاحتمالات يكون مجموعها ١ .

إذا كانت نتيجة البرنامج الشامل θ_1 ، تعطى الاحتمالات المعدلة بالمعادلات (١) حتى (٣) ، ويكون العائد للقرارات D_1 ، D_2 هو على التوالي

$$E(G_1 | \theta_1) = (950)(0.4762) + (-50)(0.3810) + (-500)(0.1429) = 361.9 \quad E(G_2 | \theta_1) = -50$$

ويكون القرار المفضل بمفهوم المعيار اللاحق هو D_1 .

وإذا كانت نتيجة البرنامج الشامل θ_2 ، تعطى الاحتمالات المعدلة بالمعادلات (٤) حتى (٦) ، ويكون العائد المتوقع للقرارات D_1 ، D_2 على التوالي

$$E(G_1 | \theta_2) = (950)(0.1786) + (-50)(0.2857) + (-500)(0.5357) = -112.5 \quad E(G_2 | \theta_2) = -50$$

ويكون القرار المفضل بمفهوم المعيار اللاحق هو D_2 .

وإذا كانت نتيجة البرنامج الشامل θ_3 ، تعطى الاحتمالات المعدلة بالمعادلات (٧) حتى (٩) ، ويكون عائد القرارات D_1 ، D_2 على التوالي

$$E(G_1 | \theta_3) = (950)(0.0943) + (-50)(0.2264) + (-500)(0.6792) = -261.3 \quad E(G_2 | \theta_3) = -50$$

ويكون القرار المفضل بمفهوم المعيار اللاحق هو D_2 .

وشجرة القرار لهذه العملية هي شكل ١٧ - ٦ ، حيث تظهر النتائج التي حصل عليها على العقد غير الموضحة بحروف ، والأفرع المتجهة إلى الخارجة من هذه العقد . ويكون العائد المتوقع عند العقد B ، E ، F ، G هو العائد المرتبط بالعقد التالية لها إذا أخذت القرارات المفضلة .

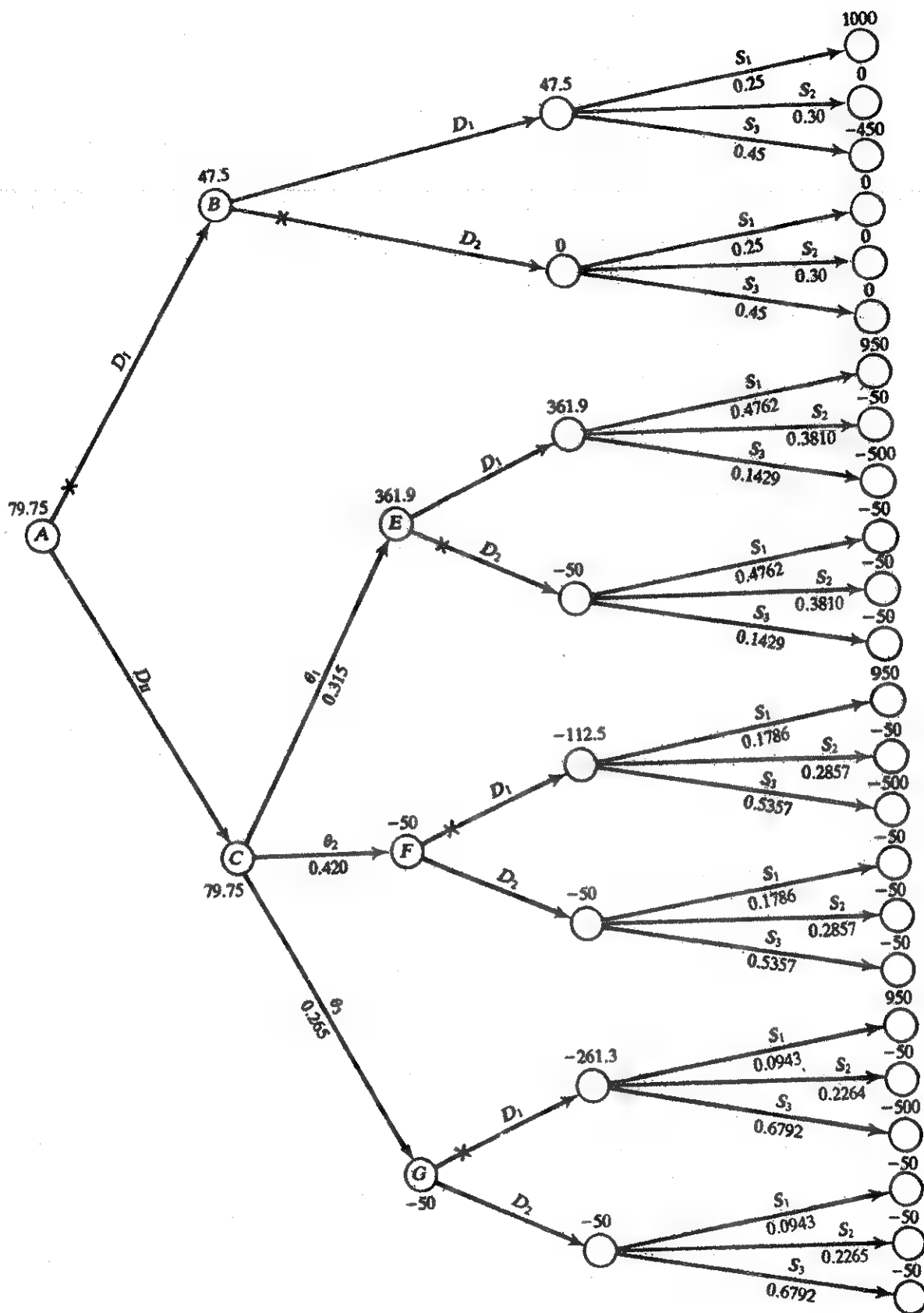
يجب (٣) في المسألة ١٧ - أن

$$P(\theta_1) = P(\theta_1 | S_1)P(S_1) + P(\theta_1 | S_2)P(S_2) + P(\theta_1 | S_3)P(S_3) \\ = (0.6)(0.25) + (0.4)(0.30) + (0.1)(0.45) = 0.315$$

$$P(\theta_2) = P(\theta_2 | S_1)P(S_1) + P(\theta_2 | S_2)P(S_2) + P(\theta_2 | S_3)P(S_3) \\ = (0.3)(0.25) + (0.4)(0.30) + (0.5)(0.45) = 0.420$$

$$P(\theta_3) = P(\theta_3 | S_1)P(S_1) + P(\theta_3 | S_2)P(S_2) + P(\theta_3 | S_3)P(S_3) \\ = (0.1)(0.25) + (0.2)(0.30) + (0.4)(0.45) = 0.265$$

لذلك يكون العائد المتوقع عند العقدة C هو $(361.9)(0.315) + (-50)(0.420) + (-50)(0.265) = 79.75$



شکل ۱۷ - ۶

وحيث إن هذه القيمة أكبر من العائد المتوقع عند العقدة B، فإن القرار المؤدى إلى العقدة C، بالتحديد D_{11} هو القرار المفضل. ويجب أن تنفذ الشركة البرنامج الشامل وتحول إلى العربات الكهربائية فقط في حالة حدوث توفير من البرنامج الشامل. ويمثل هذا الحل للمسألة في شكل ١٧ - ٦ بالشجرة الفرعية المكونة من كل المسارات من العقدة A غير المقفلة بعلامة X:

١٧ - ١٥ اقترح موقفاً يكون فيه العائد الموضح بالجدول ١٧ - ٢ لا يعكس حقيقة القيمة الفعلية للعائد بالنسبة لصاحب الأرض في المثال ١٧ - ١. بين كيف تستخدم دالة المنفعة لفون نيومان لتصحيح اللامساويات.

العائد بترتيب تنازلي هو:

$$e_1 = 2000000 \text{ دولار} \quad e_2 = 560000 \text{ دولار} \quad e_3 = 60000 \text{ دولار} \quad e_4 = -100000 \text{ دولار}$$

إذا كانت 100,000 دولار تمثل الوفر الكلي لصاحب الأرض، فإن فقدانها يعتبر كارثة. وتجنب هذه الخسارة قد يكون له أهمية أكثر لدى صاحب الأرض من مكسب 2 مليون دولار. وهذا التفضيل لا ينعكس في صف أرقام الدولارات في العائد. وأكثر من ذلك.. 660,000 دولار قد تكون نقوداً كافية لتحقيق كل احتياجات الأرض لصاحبها. ومن الواضح أن مبلغ مليون دولار أحسن، ولكنها لا تساوي ثلاثة أمثال قيمتها كما هو موضع نصف الأرقام

يمكن لصاحب الأرض تحديد المنفعة من e_1 بـ 100، من e_4 بـ 1000 لتعكس خوفها من فقد مدخرات حياتها، وبعد هذا التجزئ، فإنها قد تجد نفسها في حالة لا خلاف بين استلام e_2 بالتأكد، والاشتراك في لعبة الحظ. $\mathcal{E}(e_1, e_4; 0.999)$. عندئذ فإن e_2 تصبح

$$u(e_2) = (0.999)u(e_1) + (1 - 0.999)u(e_4) = (0.999)(100) + (0.001)(-1000) = 98.9$$

وقد يجد صاحب الأرض أيضاً أنه لا خلاف بين استلام e_3 بالتأكد والاشتراك في لعبة الحظ. $\mathcal{E}(e_1, e_4; 0.95)$. عندئذ فإن تصبح

$$u(e_3) = (0.95)u(e_1) + (1 - 0.95)u(e_4) = (0.95)(100) + (0.05)(-1000) = 45$$

يوضح جدول ١٧ - ١ مصفوفة العائد لعملية القرار بمعرفة هذه المنفعات

جدول ١٧ - ١

	S_1	S_2
D_1	45	98.9
D_2	-1000	100

١٧ - ١١ حدد القرار المفضل في ظل المعيار السابق لصاحب الأرض في المثال ١٧ - ١، إذا كانت مصفوفة العائد موضحة بالجدول ١٧ - ١. ويقرر صاحب الأرض احتمال وجود غاز بـ 0.6.

عند $P(S_1) = 0.4$ ، $P(S_2) = 0.6$ فإن العائد المتوقع لـ D_1 ، D_2 على التوالي هو

$$E(G_1) = (45)(0.4) + (98.9)(0.6) = 77.34 \quad E(G_2) = (-1000)(0.4) + (100)(0.6) = -340$$

القرار المفضل هو D_1 . وهو على النقيض من هذه النتيجة. ونتيجة المسألة ١٧ - ٣ كذلك.

١٧ - ١٢ تمتلك سيدة تذكرة مباراة كرة قدم في يوم تتوقع فيه مصلحة الأرصاد سقوط الأمطار باحتمال 40 في المئة . يمكن للسيدة البقاء بالمنزل لمشاهدة التلفزيون « وهو الاختيار المفضل تحت ظروف المطر » أو الذهاب إلى الاستاد « وهو القرار المفضل في ظروف الجفاف . ما هو القرار الذي يجب أن تتخذه »

أطلق على قرار الذهاب إلى الاستاد D_1 ، وقرار البقاء بالمنزل D_2 . وحالات الطبيعة هي S_1 (شمطر) ، S_2 (لن تمطر) . عند $P(S_1)=0.4$ ، $P(S_2)=0.6$. الأربع تكوينات الممكنة هي كما هو موضح « مرتبة طبقاً للأهمية بالنسبة للسيدة :

- e_1 : تذهب إلى الاستاد ولا تمطر
- e_2 : تبقى بالمنزل وتمطر
- e_3 : تبقى بالمنزل ولا تمطر
- e_4 : تذهب إلى الاستاد وتمطر

يمكن تقييم مستوى رضاها كمياً بالنسبة لـ e_1 ، e_4 بالأرقام 100 ، على التوالي وبعد عناء في التفكير ، فإنها تشعر أنها لا تختلف عن حلول e_2 بالتأكد أو الإشتراك في لعبة الحظ $\mathcal{L}(e_1, e_4; 0.85)$. ونحدد السيدة الاحتمالات المكافئة لـ e_3 عند $p_3 = 0.5$. لذلك

$$u(e_2) = (0.85)(100) + (0.15)(0) = \blacksquare \quad u(e_3) = (0.5)(100) + (0.5)(0) = \blacksquare$$

وتصبح مصفوفة العائد بمعرفة المنفعة هذه العملية

	S_1	S_2
D_1	0	100
D_2	85	50

ويكون العائد المتوقع للقرارات D_1 ، D_2 على التوالي

$$E(G_1) = (0)(0.4) + (100)(0.6) = 60$$

$$E(G_2) = (85)(0.4) + (50)(0.6) = 64$$

وحيث أن $E(G_2) > E(G_1)$ ، فيكون القرار المفضل بمفهوم المعيار السابق هو D_2 ، وتبقى السيدة بالمنزل .

١٧ - ١٣ حل المسألة ١٧ - « إذا كانت منفعة المثل بالنقود كما في شكل ١٧ - ٧ حيث أن كميات النقود في جدول ١٧ - ٣ لا يمكن القيمة النسبية للمثل من مختلف العائد » فإننا نستبدل كل كمية بالمنفعة منها ونحصل على جدول ١٧ - ٦ .

$$P(S_1) = 0.25, P(S_2) = 0.4, P(S_3) = 0.35,$$

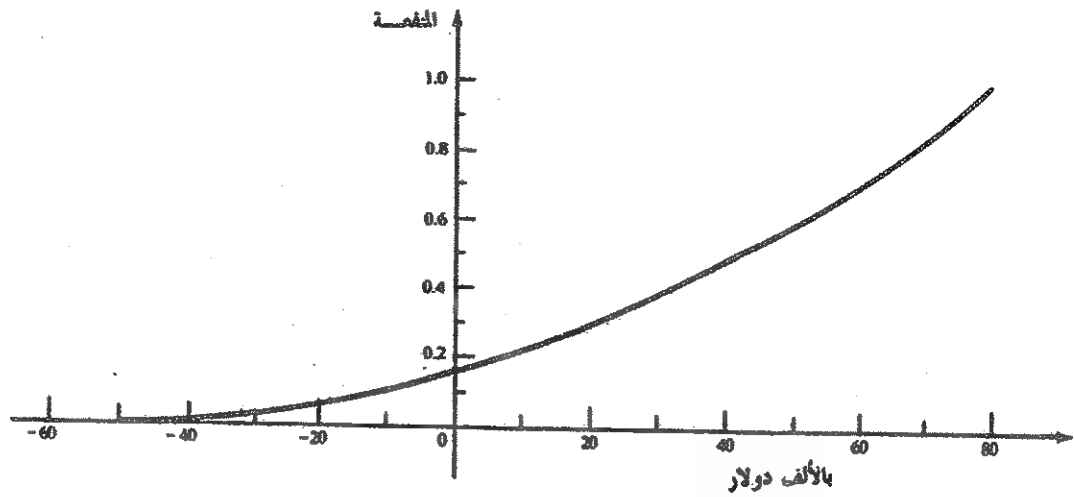
عند

جدول ١٧ - ٦

$$\begin{aligned} E(G_1) &= (0)(0.25) + (0.15)(0.4) + (1)(0.35) = 0.410 \\ E(G_2) &= (0.09)(0.25) + (0.38)(0.4) + (0.43)(0.35) = 0.325 \\ E(G_3) &= (0.72)(0.25) + (0.53)(0.4) + (0.02)(0.35) = 0.399 \\ E(G_4) &= (1)(0.25) + (0.48)(0.4) + (0)(0.35) = 0.442 \end{aligned}$$

	S_1	S_2	S_3
D_1	0	0.15	1
D_2	0.09	0.38	0.43
D_3	0.72	0.53	0.02
D_4	1	0.48	0

ويكون القرار المفضل بمفهوم المقياس السابق هو D_4 .



شكل ١٧ - ٧

١٧ - ١٤ المكافئ المؤكد للقرار ذو العائد النقدي هو كمية الدولارات C التي لها منفعة تساوى المنفعة المتوقعة لهذا القرار . حدد المكافئ المؤكد لكل من القرارات في المسألة ١٧ - ٣ .

المنفعة المتوقعة لـ D_1 تحددت في المسألة ١٧ - ١٣ لتكون 0.410 . باستخدام شكل ١٧ - ٧ نقدر $u(33000) = 0.410$ ؛ ومن ثم $C_1 = 33000$ دولار .

بالمثل ، نقدر المكافئ المؤكد لـ D_2, D_3 , and D_4 ، $C_2 = 24000$ ، $C_3 = 32000$ ، $C_4 = 36000$ ، دولاراً على التوالي .

١٧ - ١٥ المجازفة الأولية للقرار الذي له عائد نقدي هي الكمية R التي يزيد بها العائد بالدولار لهذا القرار عن المكافئ المؤكد للقرار . حدد المجازفة الأولية لكل من القرارات في المسألة ١٧ - ١٣ .

تم الحصول على العائد المتوقع بالدولار لكل من D_1 حتى D_4 في المسائل ١٧ - ٤ ، بالقيم 15 500, 20 250, 22 500, and 20 250, دولار على التوالي . بأخذ الفروق بين هذه الكميات وبين مكافئها المؤكدين كما تحدد في المسألة ١٧ - ١٤ ، نجد أن

$$R_1 = 15\,500 - 33\,000 = -17\,500 \text{ دولار}$$

$$R_2 = 21\,750 - 24\,000 = -2\,250 \text{ دولار}$$

$$R_3 = 22\,500 - 32\,000 = -9\,500 \text{ دولار}$$

$$R_4 = 20\,250 - 36\,000 = -15\,750 \text{ دولار}$$

مسائل مكملية

Supplementary Problems

١٧ - ١٦ حدد القرارات المفضلة في ظل المقاييس البسيطة لعمليات القرار التالية . تلقى أحد الزارع في الخريف 50 000 دولار نظير محصول البرتقال الذي سيُحصد في بداية العام التالي . إذا قبل الزارع ندا العرض ، فإن النقود تكون له بصرف النظر عن جودة أو كمية المحصول . وإذا لم يقبل الزارع العرض ، فإنه يجب أن يبيع المحصول في السوق بعد حصاده . وتحت الظروف العادية فإن الزارع يتوقع الحصول على 70 000 دولار نظير محصوله من السوق . وإذا تعرض المحصول للصقيع ، فإن جزءاً كبيراً من المحصول سيتلف ، ويتوقع الحصول على 15 000 دولار فقط من السوق .

١٧ - ١٧ يجب أن يقرر أحد الصناع ما إذا كان سيد ضمان متعهد يرغب في فتح حساب مع الشركة . من الخبرة السابقة بالحسابات الجديدة فإن 30 في المئة منها يقع تحت المجازفة البسيطة ، و 30 في المئة مجازفة متوسطة ، و 30 في المئة مجازفة كبيرة . إذا امتد الضمان فإن الصناع يتوقع خسارة 30 000 دولار بمجازفة قليلة ، ومكسب 25 000 دولار بمجازفة متوسطة ، و 50 000 دولار بمجازفة كبيرة . وإذا لم يمتد الضمان فإن الصناع لا يكسب ولا يخسر . حيث إنه لن يتم أى عمل مع المتعهد . حدد القرار المفضل بمفهوم المقاييس السابقة

١٧ - ١٨ تفكر إحدى الشركات في عمليات إنتاج جديد بحيث إذا ثبتت كفاءتها فإنها ستوفر للشركة 350 000 دولار كل عام للسنوات الخمس القادمة ، وإذا لم تثبت كفاءتها ، فإن تكلفة الخسارة في المبيعات بالإضافة إلى مصروفات التحويل إلى العمليات الجديدة ، وإعادة التحويل إلى العمليات القديمة قد تصل إلى 925 000 دولار . حدد القرار المفضل بمفهوم المعيار السابق إذا كانت الشركة تشعر بأن احتمال نجاح العمليات الجديدة 80 في المئة .

١٧ - ١٩ حدد القرار المفضل بمفهوم المعيار السابق للمسألة ١٧ - ١٦ إذا كان الزارع في الماضي ، قد خسر كثيراً من محصوله نتيجة الصقيع مرة واحدة كل سبع سنوات .

١٧ - ٢٠ افترض أنه قبل اتخاذ القرار يدفع الصناع في المسألة ١٧ - ١٧ 1000 دولار رسوم تقرير الضمان على المتعهد . ويضع التقرير على المتعهد مجازفة قليلة . ولكن الصناع يعلم بأن طريقة التقرير لا يعتمد عليها كلية . ويعترف مكتب الضمان بأن هناك مجازفة متوسطة في المئة من الوقت . وتقدر المجازفة العالية على أنها ضعيفة في المئة من الوقت . وتقدر المجازفة الضعيفة بالضبط 90 في المئة من الوقت . وبناء على هذه البيانات .. حدد القرار المفضل للصانع بمفهوم المعيار اللاحق .

١٧ - ٢١ للشركة في المسألة ١٧ - ١٨ بدليل ثالث هو أن تستكمل مرحلة الاعتماد على نفسها في العملية الجديدة . وتختبر كفاءتها قبل أن تقرر التحويل . وتكلفة فترة اختبار اعتمادها على نفسها تقدر بـ 75 000 دولار تسترد إذا نفذت العملية الجديدة . وإذا كانت فترة الاعتماد على نفسها ليست ذات كفاءة فإن خسائر مبيعات قيمتها 25 000 دولار ستحدث خلال الاختبار .

إذا كانت العملية الجديدة ذات كفاءة ، فإن فترة الاعتماد ستعمل بكفاءة باحتمال 99 في المئة . وإذا كانت العملية الجديدة ليست ذات كفاءة على الإطلاق فإن فترة الاعتماد على النفس يمكن أن تستمر بكفاءة ، وتقدر الشركة احتمال حدوث ذلك بنسبة 60 في المئة . انشئ شجرة القرار لعملية القرار الكلية . وحدد التصرفات المفضلة .

١٧ - ٢٢ يعتقد رؤساء إحدى الشركات لصناعة منافسة أن أحد الموظفين يمد المنافسين بمعلومات سرية عن الشركة ويعتقد الرئيس بدرجة تأكيد 90 في المئة أن هذا الموظف هو أمين صندوق الشركة ، والذي أدت علاقته إلى الحصول على تمويل كبير للشركة . إذا فصلته الشركة وكان هو المبلغ ، فإن الشركة تكسب 100 000 دولار . وإذا فصلته الشركة ولم يكن هو المبلغ فستخسر الشركة خبرته ، ويظل المبلغ بين موظفيها بخسارة للشركة 500 000 دولار . وإذا لم تفصل الشركة أمين الصندوق ، فإن الشركة ستخسر 300 000 دولار ، سواء أكان هو المبلغ أم لا ، حيث إنه في كلتا الحالتين سيظل المبلغ داخل الشركة . وقبل تقرير مصير أمين الصندوق ، فإن رئيس الشركة يمكنه طلب اختبار كذب . ولعدم الوقوع في المسؤولية ، فإن هذا التفتيش يجب أن يشمل كل موظفي الشركة بتكلفة كلية 30 000 دولار . وهناك مشكلة أخرى ، وهي أن اختبارات الكذب ليست مؤكدة تماماً ، فإذا كان الشخص كاذباً ، فإن الاختبار يكشفه بنسبة 90 في المئة من الحالات ، ولكن إذا لم يكن الشخص كاذباً ، فإن الاختبار سيقرر ذلك في 70 في المئة من الحالات . ما هي الإجراءات التي يجب أن يتخذها رئيس الشركة ؟

١٧ - ٢٣ يحترم أحد مصانع الأغذية تقديم خطط جديد للوجبات الجاهزة على المستوى القومي ، وتقدر الشركة ربماً 50 مليون دولار إذا كان الإنتاج ناجحاً بدرجة كبيرة ، و 10 مليون دولار إذا كان ناجحاً بدرجة متوسطة ، وخسارة 10 مليون دولار إذا لم يكن ناجحاً . وإذا لم تقدم الشركة هذا الخط ، فإن مصروفات البحوث والتطوير ، وتقدر بـ 10 مليون دولار ، يجب أن تحسب من الخسائر . وتشير التقديرات أن احتمال النجاح الكبير 10 في المئة ، والنجاح العادي 40 في المئة .

وقبل تقديم هذا الخط على المستوى القومي ، فإن الشركة تختبره على المستوى المحلي . وتكلفة هذا الاختبار هي 1 مليون دولار . وبالرغم من أن نتائج الاختبار قد تكون مرضية ، إلا أنها ليست قاطعة ، والاعتماد على هذا الاختبار يعطي بالاحتمالات المشروطة الموضحة بالجدول ١٧ - ٧ . ما هو قرار المصنع الذي يجب أن يكون ؟

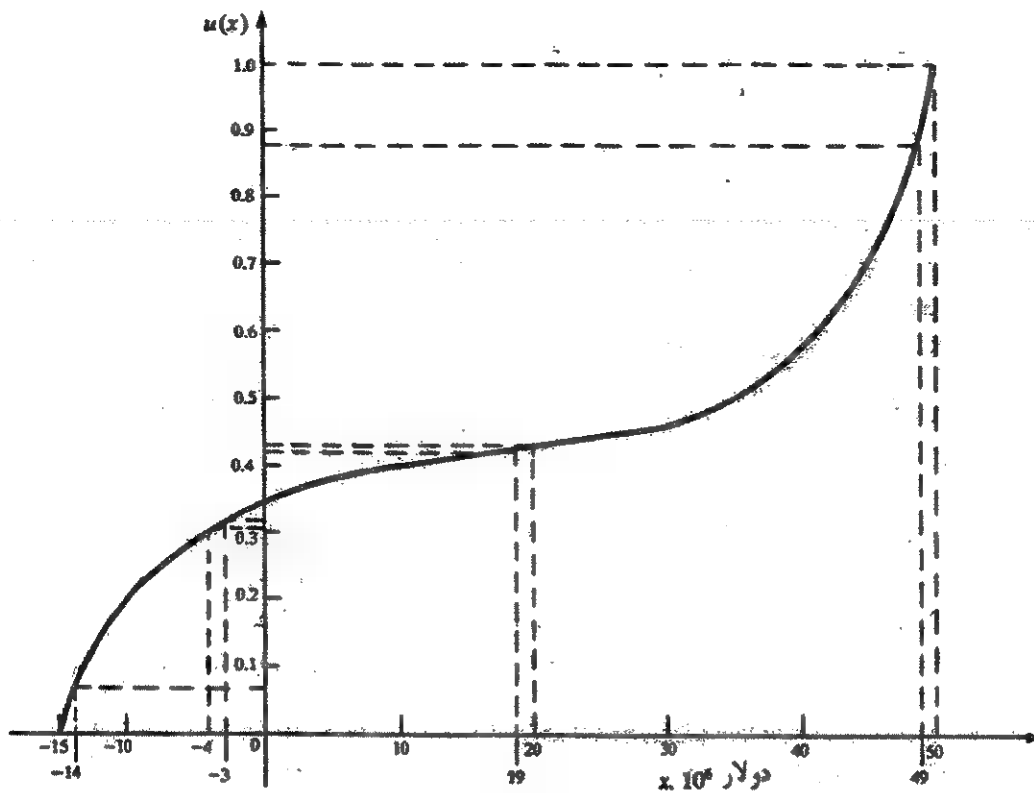
جدول ١٧ - ٧

نتائج الاختبار تدل على				
النتيجة		لا نجاح	نجاح عادي	نجاح كبير
	نجاح كبير	0	0.4	0.6
	نجاح عادي	0.2	0.6	0.2
	لا نجاح	0.6	0.3	0.1

١٧ - ٢٤ حدد أكبر كمية نفود يجب أن تدفعها المدينة في المسألة ١٧ - ٩ للبرنامج الشامل . (ملحوظة : تقدر قيمة الأخبار بالفرق بين العائد المتوقع للعملية إذا نفذ الاختبار بدون تكلفة ، والعائد المتوقع من العملية جحقيق بدون اختبار) .

١٧ - ٢٥ حدد أقصى كمية من النفود يجب أن يدفعها رئيس الشركة في المسألة ١٧ - ٢٢ لاختبارات الكذب . انشئ شجرة للعملية .

١٧ - ٢٦ حل المسألة ١٧ - ٢٣ إذا كانت منفعة مصنع الأغذية بالنفود توضح بالشكل ١٧ - ٨ .



شكل ١٧ - ٨

١٧ - ٢٧ اشتق المنفعة بالدولار للمخرجات $e_1 = 5000$, $e_2 = 4000$, $e_3 = 3000$, $e_4 = 2000$, $e_5 = 1000$ إذا كانت

$p_2 = 0.9$, $p_3 = 0.7$, and $p_4 = 0.2$ ، والاحتمالات المكافئة هي $u(e_1) = 100$, $u(e_5) = -50$,

١٧ - ٢٨ حدد المكافئ المؤكد ، والمجازفة الأولية للقرارات المفضلة في المسألة ١٧ - ٢٦ .

١٧ - ٢٩ يبحث أحد متخذي القرارات عن مجازفة بالنسبة لاتخاذ قرار عملية على مدى عدد للعائد دالة المنفعة $u(x)$ مقرة بالتحديد (بمعنى $u(x) > 0$ على هذا المدى) . ويتجنب المجازفة إذا كانت $u(x)$ محدبة بالتحديد (أى أن $u''(x) < 0$ على هذا المدى) . إذا كانت $u(x)$ خط مستقيم (بمعنى $u''(x) = 0$ على هذا المدى) ، فإن متخذ القرار لا يتأثر بالمجازفة . حدد اتجاهات المجازفة لمتخذ القرار في المسألة ١٧ - ٢٦ .

١٧ - ٣٠ من تعريف الدوال المحدبة والمقعرة المعطاة في الفصل 11 ، ومن حقيقة أن دوال المنفعة تزيد على وتقررة واحدة « بين أن المجازفة الأولية تكون موجبة لمتخذ القرار الذى يتجنب المجازفة » وسالبة لمتخذ القرار الذى يبحث عن المجازفة .

١٧ - ٣١ مصفوفة الاعتذار هي مصفوفة عائد تتلشى فيها عناصر كل عمود بواسطة أكبر عنصر في العمود . أوجد مصفوفة الاعتذار المناظرة للجدول ١٧ - ٣٠ .

١٧ - ٣٢ حل المسألة ١٧ - ١ ، ١٧ - ٢ باستخدام مصفوفة الاعتذار ، بدلاً من الجدول ١٧ - ٢ . ثم تحقق من أن القرارات المفضلة بمصفوفة الاعتذار ليس من الضروري أن تكون هي نفسها مثل قرارات مصفوفة للعائد في ظل المعايير البسيطة « ولكن كلتا المصفوكتين تؤدي إلى نفس القرارات المفضلة بمفهوم المعيار السابق .

البرمجة الديناميكية التصادفية Stochastic Dynamic Programming

عمليات القرار التصادفية المتعددة المراحل

STOCHASTIC MULTISTAGE DECISION PROCESSES

تكون عملية القرار المتعددة المراحل « تصادفية » إذا كان العائد المرتبط بقرار واحد على الأقل في العملية عشوائياً . وتدخل هذه العشوائية عموماً بإحدى طريقتين ، إما أن تحدد الحالات بشكل لا بديل له بواسطة القرارات ، ولكن العائد المرتبط بحالة أو أكثر يكون غير مؤكد (انظر الفصل ١٤) . (انظر المسألة ١٨ - ١) أو يحدد العائد بشكل لا بديل له بواسطة الحالات ، ولكن الحالات الناتجة من واحد أو أكثر من القرارات تكون غير مؤكدة (انظر المسألة ١٨ - ٢) .

وإذا كان التوزيع الاحتمالي الذي يحكم الأحداث العشوائية معروفاً ، وكان عدد المراحل وعدد الحالات محدداً ، فإن مدخل البرمجة الديناميكية المقدم في فصل ١٤ يكون مفيداً في جعل عملية القرار التصادفية المتعددة المراحل مثلى . والطريقة العامة هي أمثلة قيمة العائد المتوقع . (وكاستثناء ، انظر المسألة ١٨ - ٣) . وفي الحالات التي تحدث فيها العشوائية بطريقة استثنائية في العائد المرتبط بالحالات ، وليس في الحالات الناتجة من القرارات ، فإن هذه الطريقة يكون لها تأثير في تحويل العملية التصادفية إلى عملية ثابتة .

جدول السياسة POLICY TABLES

في العمليات التي توجد فيها العشوائية ، في الحالات المرتبطة بالقرارات ، نجد أن السياسة — وبالأخص السياسة المثلى — يمكن أن تعرض في صورة « جدول السياسة » الذي يشابه جدول ١٨ - ١ . وهنا $d_j(a_k)$ ($j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, r$) تدل على القرار عند المرحلة j إذا وجدت العملية نفسها عند الحالة a_k

جدول ١٨ - ١

حالات		a_1	a_2	...	a_r
$\frac{j}{i}$	1	$d_1(a_1)$	$d_1(a_2)$...	$d_1(a_r)$
	2	$d_2(a_1)$	$d_2(a_2)$...	$d_2(a_r)$

	n	$d_n(a_1)$	$d_n(a_2)$...	$d_n(a_r)$

مسائل محلولة

Solved Problems

١٨ - ١ : ثمان كميات من البرتقال يجب أن توزع على ثلاثة مخازن . والاحتياج من البرتقال عند كل مخزن عشوائي . وطبقاً للتوزيعات الاحتمالية الموضحة في جدول ١٨ - ٢ فإن الربح من الكمية المباعة في المخازن ١ ، ٢ ، ٣ هو ٢٠ ، ١٠ ، ٠ دولار على التوالي . حدد عدد الكميات (بشرط أن تكون عدد صحيح) التي يجب أن تخصص لكل مخزن لتعظيم الربح الكلي المتوقع .

جدول ١٨ - ٢

الكميات	احتمالات الطلب		
	المخزن 1	المخزن 2	المخزن 3
0	0.1	0.1	0.1
1	0.2	0.2	0.3
2	0.3	0.6	0.2
3	0.2	0	0.2
4	0.1	0.2	0
5	0.1	0	0.2

هذه العملية هي عملية ذات ثلاث مراحل . وفيها تمثل المرحلة ١ تسليم البرتقال إلى المخزن ١ . والحالات لكل مرحلة $u = 0, 1, \dots, 8$ تمثل عدد كميات البرتقال المتاحة للتسليم للمخزن . لا توجد عشوائية في الحالة الناتجة عن أي قرار — إذا خصص 2 كمية إلى مخزن ، فإن هذا المخزن سيخزن 2 كمية ، ولكن هناك عشوائية في عائد كل حالة . وعند وجود كميتين في المخزن ، فإن المخزن يمكن أن يبيع ١ ، ٢ ، أو ٣ كمية ، وفي كل احتمال ينتج عائد مختلف . وبالتالي نعظم العائد الكلي المتوقع ، فضلاً عن العائد الكلي . نحدد :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \text{الربح المتوقع من تخصيص } x \text{ كمية للمخزن 1} \\ m_1(u) &= \text{أعلى ربح متوقع ابتداءً من المرحلة 1 في الحالة } u \\ d_1(u) &= \text{القرار المتخذ عن المرحلة 1 الذي يحقق } m_1(u) \end{aligned}$$

وتعرض قيم دوال الربحية (بالدولار) في جدول ١٨ - ٣ . وبحسابات مماثلة — مثلاً $f_1(3)$ نتيج : إذا خصص لها ٣ كميات ، فإن المخزن 1 يربح ٣ دولار إذا بيعت 0 كمية ١ و ٣ دولار إذا بيعت واحدة ، و 36 دولاراً إذا بيعت إثنان ١ و 54 دولاراً إذا بيعت ثلاث . والاحتمالات المناظرة للثلاثة أحداث الأولى هي : من جدول ١٨ - ٢ 0.1 ، 0.2 ، 0.3 والاحتمال للحدث الرابع هو : أن الطلب يساوي أو يزيد عن 3 كميات ، $0.1 + 0.1 + 0.2 = 0.4$. لذلك

$$f_1(3) = (0)(0.1) + (18)(0.2) + (36)(0.3) + (54)(0.4) = 36$$

وبدلالة $f_1(x)$ مسألة بصيغة ثابتة تتحقق بالمعراج (١٤ - ١) . وتطبيق أساليب الفصل ١٤ : نوجد الجدول ١٨ - ٤ . وتكون السياسة المثلى هي تخصيص ٣ كميات من البرتقال للمخزن 1 و كميتين للمخزن 2 و ثلاث كميات للمخزن 3 ، بربح متوقع كلي 111.90 دولار .

جدول ١٨ - ٣

$x \backslash f$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_1(x)$	0	16.20	28.80	36.00	39.60	41.40	41.40	41.40	41.40
$f_2(x)$	0	20.00	36.00	40.00	44.00	44.00	44.00	44.00	44.00
$f_3(x)$	0	18.90	31.50	39.90	44.10	48.30	48.30	48.30	

جدول ١٨ - ١

	u								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$m_1(u)$	0	18.90	31.50	39.90	44.10	48.30	48.30	48.30	48.30
$d_1(u)$	0	1	2	3	4	5	5	5	5
$m_2(u)$	0	20.00	38.90	54.90	67.50	75.90	80.10	84.30	88.30
$d_2(u)$	0	1	1	2	2	2	2	2	3
$m_3(u)$	111.90
$d_3(u)$	3

١٨ - ٢

يملك أحد الأشخاص ثلاث وحدات نقدية (ألف دولار) متاحة للاستثمار في إحدى فرص العمل التي تشر في عام واحد . والعمل بهذه الفرصة مجازفة ، حيث إن العائد إما أن يتضاعف أو يكون لا شيء . ومن الخبرة السابقة .. فإن احتمال مضاعفة نفود الشخص هي 0.6 ، بينما فرصة خسارة الاستثمار 0.4 . حدد استراتيجية للاستثمار للسنوات الأربع التالية التي تعظم الرصيد الكلي المتوقع في نهاية هذه الفترة ، إذا كان الربح خلال عام يمكن إعادة استثماره في العام التالي ، وكانت الاستثمارات مقيدة بالوحدة الكاملة .

هذه العملية ذات أربع مراحل . حيث تمثل كل مرحلة سنة كاملة . وتكون الحالات هي الكميات المتاحة للاستثمار $u_4 = 0, 1, \dots, 24$ (نحصل على الأخيرة باستثمار كل الأموال المتاحة كل عام ، ويتضاعف الاستثمار كل مرة) للمرحلة 4 ، $u_3 = 0, 1, \dots, 12$ للمرحلة 3 ، $u_2 = 0, 1, \dots, 6$ للمرحلة 2 ، $u_1 = 3$ للمرحلة 1 ، ونحدث العشوائية هنا في الحالة التي تدخل بقرار خاص . فمثلاً ، إذا امتلك أحد الأشخاص ١١ وحدات (بمعنى الحالة الحالية هي ١١) ، وصمم على استثمار وحدتين ، فإن الحالة التالية تكون إما ١١ أو متوقفة على ما إذا كانت الكمية المستثمرة تتضاعف أو تنحصر . اكتب

أعلى رصيد متوقع في نهاية العملية ابتداءً من الحالة ١١ عند المرحلة ١ $m_1(u_1) = 11$ الكمية المستثمرة عند المرحلة ١ التي تحقق $d_1(u_1) = m_1(u_1)$ إذا دخل أحد المرحلة ١ بـ u_1 وحدة ، فإن ١١ وحدة $(x = 0, 1, \dots, u_1)$ يمكن أن تستثمر ، تاركة $u_1 - x$ وحدة كاحتياطي . إذا تضاعفت الكمية المستثمرة ١١ فسيكون هناك .

$$2x + u_1 - x = u_1 + x$$

وحدة متاحة للمرحلة التالية ١١ وإذا خسرت الوحدات المستثمرة ، فإن الاحتياطي $(u_1 - x)$ وحدة سيكون متاحاً للمرحلة التالية فقط . وأحسن عائد من هذه النقطة هو إما $m_{1+1}(u_1 + x)$ ، أو $m_{1+1}(u_1 - x)$. والقيمة المتوقعة لهذا العائد تكون

$$0.6m_{1+1}(u_1 + x) + 0.4m_{1+1}(u_1 - x)$$

والاختيار الأمثل لـ x هي تلك الكمية التي تعظم التعبير الرياضي السابق

$$(1) \quad m_j(u_j) = \max_{x=0,1,\dots,u_j} [0.6m_{j+1}(u_j+x) + 0.4m_{j+1}(u_j-x)]$$

المعادلة (١) هي صيغة عكسية للعملية ، وتحقق عند $j=1,2,3$ ، كما تتحقق أيضاً عند $j=4$ بالشرط النهائي $m_5(u) = u$. ومن الواضح أنه حيث إن m_5 دالة خطية متزايدة ، فكذلك m_4, \dots, m_1 . والحقيقة أنه ، بتنفيذ التعظيم في (١) نحصل على

$$m_4(u_4) = 1.2u_4 \quad m_3(u_3) = (1.2)^2u_3 \quad m_2(u_2) = (1.2)^3u_2 \quad m_1(u_1) = (1.2)^4u_1$$

عند $(j=4,3,2,1)$ ، $d_j(u_j) = u_j$ ، لذلك فإن الرصيد الأمثل المتوقع يكون

$$m_1(3) = (1.2)^4(3) = 6.2208 \text{ وحدة}$$

نحصل عليها باستثمار كل الوحدات المتاحة في كل عام من العملية . لاحظ أن هذه السياسة التل يمكن أن تنتج إما 48 وحدة ، أو 0 وحدة في نهاية 4 سنوات ، متوقعة على ما إذا تضاعفت كل الاستثمارات ، أو أن أحد الاستثمارات يخسر كلية . وبالرغم من ذلك .. فإن العائد المتوقع بهذه السياسة هو

$$\text{وحدة } 6.2208 = (0.6)^4[1 - (0.6)^4] + (48)(0.6)^4$$

حيث إن $(0.6)^4$ هي احتمال أن كل الاستثمارات الأربعة ناجحة ، و $1 - (0.6)^4$ هي احتمال أن استثماراً واحداً يفشل على الأقل .

٣ - ١٨

حل المسألة ١٨ - ٢ إذا كان الهدف هو تعظيم احتمال تجنب أرصدة على الأقل 5 وحدات (ألف دولار) بعد 4 سنوات .

هذه المسألة لا تتعامل مع القيمة المتوقعة للعائد ، ولكن إلى حد ما مع احتمال أن العائد يكون بحجم معين . وكمثال إذا نفذ المستثمر سياسة الاستثمار لكل الوحدات المتاحة في كل مرحلة = وكما هو واضح في المسألة ١٨ - ٢ ، فإن الاحتمال أن تنتهي العملية بـ 5 وحدات أو أكثر هو $(0.6)^4 = 0.1296$. ويكون السؤال هو : هل يمكن تحسين هذه القيمة بأي اختيار لسياسة أخرى ؟ وتكون الحالات والمراحل كما هي موضحة في المسألة ١٨ - ٢ . اكتب

حدث أن تنتهي العملية بـ 5 وحدات أو أكثر $E =$

احتمال = بمعرفة أن الحالة عند المرحلة j هي \blacksquare ، وأن السياسة $m_j(u_j)$ التل متبع ابتداءً من المرحلة j

الكمية المستمرة عند المرحلة j التي تحقق $d_j(u_j) = m_j(u_j)$

إذا استثمرت x وحدة $(x=0,1,\dots,u_j)$ عند المرحلة j ، فإنه ، كما في المسألة ١٨ - ٢

$$P(u_{j+1} = u_j + x) = 0.6 \quad P(u_{j+1} = u_j - x) = 0.4$$

وبقاعدة الاحتمالات المشروطة [(٣) في المسألة ١٧ - = عند الضيق H_1 - ولا شيء H_2] ، فإن التعبير الرياضي

$$0.6m_{j+1}(u_j+x) + 0.4m_{j+1}(u_j-x)$$

يمثل احتمال E بمعرفة u_j ، والقرار x ، والاستمرار الأمثل من المرحلة $j+1$. ومن ثم

$$(1) \quad m_j(u_j) = \max_{x=0,1,\dots,u_j} [0.6m_{j+1}(u_j+x) + 0.4m_{j+1}(u_j-x)]$$

لكل $j=1,2,3$. ورسمياً .. فإن هذه المعادلة تمثل معادلة الفرق التي حصلنا عليها في المسألة ١٨ - ٢ ومع ذلك .. فإن شرطاً نهائياً جديداً ينطبق .

وبوضع شروط مخرجات قرار الاستثمار النهائي نحصل على

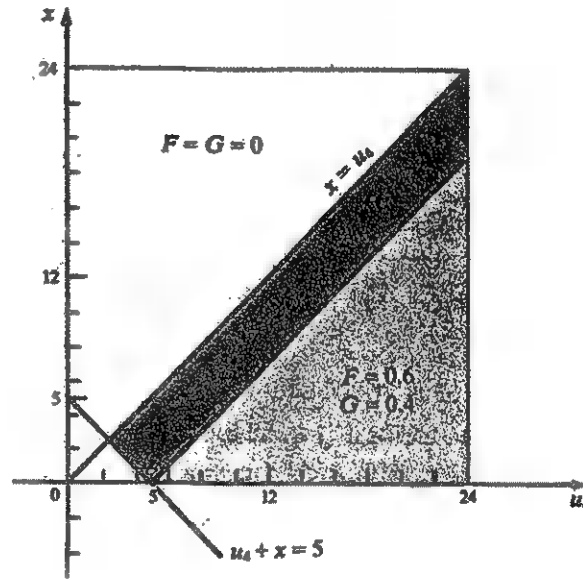
$$m_4(u_4) = \max_{x=0,1,\dots,u_4} [0.6P(u_4 + x \geq 5) + 0.4P(u_4 - x \leq 5)]$$

$$= \max_x [F + G]$$

بمساعدة الشكل ١٨ - ١ تنفيذ التمثيل في (٢) ونحصل على

$$(٢) \quad m_4(u_4) = \begin{cases} 0 & u_4 = 0, 1, 2 \\ 0.6 & u_4 = 3, 4 \\ 1 & u_4 = 5, 6, \dots, 24 \end{cases} \quad \text{عند} \quad d_4(u_4) = \begin{cases} 0 & u_4 = 0, 1, 2 \\ 2 & u_4 = 3 \\ 1 & u_4 = 4 \\ 0 & u_4 = 5, 6, \dots, 24 \end{cases}$$

حيث يوضح أصغر استثمار أمثل $d_4(u_4)$



شكل ١٨ - ١

يمثل الجدول ١٨ - ٥ حل (١)، مع اعتبار الشرط النهائي (٢). ومرة أخرى « فإن أصغر قيمة $d_4(u_4)$ هي التي تذكر في حالة حدوث اشتراك. من الواضح أن أعلى احتمال بتجميع 5 وحدات على الأقل خلال ٥ سنوات هو 0.7056. ويمكن تكوين جدول السياسة من الصورة التي في الجدول ١٨ - ١، وذلك لتحقيق أقصى احتمال باستخراج الصفوف 4، 6، من الجدول ١٨ - ٥. وأي من الجدولين يبين أنه تحت هذه السياسة المثلى الخاصة بتوضيح أن المستثمر ينتهي بـ 0، 1 أو ٥ وحدات، واحتمال الحدث الأخير هو 0.7056. ويوجد بديل آخر للسياسة المثلى يسمح للمستثمر بتجميع أكثر من ٥ وحدات، ولكن دائماً باحتمال 0.7056 لـ 5 وحدات أو أكثر.

	0	1	2	3	4	5	6	...	12	...	24
$m_4(u_4)$	0	0	0	0.6	0.6	1	1	...	1	...	1
$d_4(u_4)$	0	0	0	2	1	0	0	...	0	...	0
$m_3(u_3)$	0	0	0.36	0.6	0.84	1	1	...	1		
$d_3(u_3)$	0	0	1	0	1	0	0	...	0		
$m_2(u_2)$	0	0.216	0.504	0.648	0.84	1	1				
$d_2(u_2)$	0	1	2	1	0	0	0				
$m_1(u_1)$	0.7056							
$d_1(u_1)$	1							

١٨ - ٤ يمكن لأحد صناع سفن القضا أن يصنع مكوكين فضائيين فقط في السنة لمؤسسة ناسا ، ويحتاج لعام كامل لتصنيع مكوك واحد ، ولكن حيث إن أوامر التشغيل لم تحدد لها ناسا حتى يوليو (للتسليم في ديسمبر) ، فإن الصناع يجب أن يضع جدول الإنتاج قبل معرفة الاحتياج بالضبط . وهذا الاحتياج سيكون لمكوك واحد باحتمال 0.6 ، أو مكوكين باحتمال 0.4 . وأى مكوك يُطلب ولا يُسلم يحمل تكلفة جزائية 1.5 مليون دولار ، ويجب أن يسلم في العام التالي بأسبقية عن أى أوامر تشغيل أخرى . وتكلفة الإنتاج تكون دالة بالنسبة لعدد المكوكات المصنوعة بتكلفة المكوك الواحد 10 مليون دولار . وتكلفة المكوكين 20 مليون دولار . ويمكن تخزين الإنتاج الزائد للتسليم في المستقبل بتكلفة 1.1 مليون دولار للمكوك في السنة . وتعتمد سياسة الشركة بمد أقصى مكوك واحد . حدد جدول الإنتاج للثلاث سنوات المقبلة التي تجعل التكلفة الكلية المتوقعة حداً أدنى ، إذا كان المخزون الحالي من المكوكات صفراً .

نظر إلى هذه المسألة على أنها عملية ذات أربع مراحل ، المراحل 3 ، 2 ، 1 تمثل الثلاث سنوات المقبلة في التخطيط على التوالي ، والمرحلة الرابعة تمثل الإنتاج المتأخر لهذه المكوكات المطلوبة في السنة الثالثة ولم تسلم ، والحالات هي المخزونات الممكنة في بداية المرحلة ، وهي تتراوح من منخفض 2- (بمعنى طلب مكوكين ولم يسلم) حتى أعلى 1 . نعمل

عدد المكوكات بالمخزون $(u = -2, -1, 0, 1)$

أقل تكلفة متوقعة لاستكمال العملية ابتداءً من المرحلة i في الحالة u

$m_i(u)$ الإنتاج في المرحلة i الذي يحقق $m_i(u)$

الطلب السنوي $[P(D=1)=0.6, P(D=2)=0.4]$

$f(x)$ تكلفة إنتاج x مكوك في سنة واحدة

إذا دخلت الشركة المرحلة i ($i = 1, 2, 3$) عند $u = 0, 1$ مكوك في المخزون ، وقررت إنتاج x مكوك إضافي ($x = 0, 1, 2$) ، في هذه المرحلة ، نحدد تكلفة تخزين $1.1u$ على المخزون . وتكلفة إنتاج $f(x)$ للمكوكات الجديدة بمصروفات سنوية

$$f(x) + 1.1u$$

(١)

والمعد الكلي من المكوكات المتاحة للتسليم في نهاية السنة هو $x + n$ ، الذي يترك $x + n - D$ مكوك في المخزون للمرحلة التالية . وأقل تكلفة لاستكمال العملية من هذه النقطة هي $m_{j+1}(x + n - D)$. حيث إن $D = 1$ باحتمال 0.6 و $D = 2$ باحتمال 0.4 . وأقل تكلفة متوقعة لاستكمال ابتداءً من المرحلة $j+1$ هي

(٢)

$$0.6m_{j+1}(u + \blacksquare - 1) + 0.4m_{j+1}(u + \blacksquare - 2)$$

لذلك .. فإن أقل تكلفة متوقعة للاستكمال من المرحلة j هي أقل ما يمكن بالنسبة لـ x ، بمجموع (١) ، (٢)

$$(٣) \quad m_j(u) = 1.1u + \min_{x=0,1,2} [f(x) + 0.6m_{j+1}(u+x-1) + 0.4m_{j+1}(u+x-2)]$$

عند $u=0,1$ ، $j=1,2,3$. وهنا نوافق على أن $m_j(3)=+M$ لكل قيم j .

إذا دخلت الشركة المرحلة j بـ $u=-2$ ، أو $u=-1$ ، فإنه يحدث عجز $-u$ مكوك من المرحلة السابقة ، وتعرض لتكلفة جزائية $-1.5u$. وقرار إنتاج ■ مكوك ، حيث يجب أن تكون ■ على الأقل ■ لتغطي العجز السابق ، تنتج عنه تكلفة إنتاج $f(x)$. وتكون تكلفة الإنتاج للشركة في المرحلة j هي

$$(٤) \quad f(x) - 1.5u$$

بتكملة التحليل ، كما في حالة $u=0,1$ ، نحصل على الصيغة العكسية

$$(٥) \quad m_j(u) = -1.5u + \min_{x=-2,-1,0,1,2} [f(x) + 0.6m_{j+1}(u+x-1) + 0.4m_{j+1}(u+x-2)]$$

عند $u=-2,-1$ ، $j=1,2,3$. يمكن استبدال (٣) ، (٥) بالعلاقة الفردية

$$(٦) \quad m_j(u) = g(u) + \min_{x=-2,-1,0,1,2} [f(x) + 0.6m_{j+1}(u+x-1) + 0.4m_{j+1}(u+x-2)]$$

عند $u=-2,-1,0,1$ ، $j=1,2,3$ على أن نعرف

$$g(u) = \begin{cases} 1.1u & u \geq 0 \\ -1.5u & u < 0 \end{cases} \quad f(-1) = +M$$

وحل (٦) في خطوات حتى $j=4$ بالشرط النهائي $m_5(u)=0$ يعطى في الجدول ١٨ - ٦ . وتكون أقل تكلفة متوقعة هي 42.24 مليون دولار ، وتحقق بالسياسة المثلى المبينة في جدول ١٨ - ٧ .

جدول ١٨ - ٧

مسوى العجز

	مسوى العجز			
	-2	-1	0	1
١	2	...
2	2	2	2	0
3	2	2	1	0
4	2	1	0	0

جدول ١٨ - ٦

	u			
	-2	-1	0	1
$m_4(u)$	22	11.5	0	1.1
$d_4(u)$	2	1	0	0
$m_3(u)$	37.7	25.1	14.6	5.7
$d_3(u)$	2	2	1	0
$m_2(u)$	52.14	39.3	28.26	19.9
$d_2(u)$	2	2	2	0
$m_1(u)$	42.24	...
$d_1(u)$	2	...

١٨ - ٥ خفض أحد مرشحي الرئاسة مجال مرشحي نائب الرئيس إلى ثلاثة أشخاص ، كل مرشح من الثلاثة تم تقييمه بمقياس يتراوح بين (أصغر قيمة) حتى (أعلى قيمة) ، أخذ الشخص الأول ■ نقط ، والشخص الثاني 8 نقط ، والشخص الثالث 5 نقط . واحتمال أن الشخص i ($i = 1, 2, 3$) يقبل العرض j ($j = 1, 2, 3$) للترشيح كنائب رئيس (بافتراض أن العروض $j = 1$ الأولى للأشخاص الآخرين قد سحبت) يرمز له بالرمز p_{ij} ، حيث إن

$$\begin{array}{lll} p_{11} = 0.5 & p_{12} = 0.2 & p_{13} = 0 \\ p_{21} = 0.9 & p_{22} = 0.5 & p_{23} = 0.2 \\ p_{31} = 1 & p_{32} = 0.8 & p_{33} = 0.4 \end{array}$$

بأي ترتيب يجب تقديم الثلاثة مرشحين لنائب الرئيس ؟ إذا أراد مرشح الرئاسة تعظيم عدد النقط المتوقع ؟

من المفترض ألا يُسأل أى شخص أكثر من مرة . وفى أى مرة ينسحب الشخص يُسأل الشخص التالى . حتى يقبل أحد الأشخاص أو ينسحبوا كلهم . فيكون عندنا عملية ذات ثلاث مراحل ، حيث تمثل المرحلة j الترتيب j فى عملية السؤال . ونأخذ الحالات لتكون مجموعة الأشخاص الذين لم يسألوا بعد . لذلك تكون للمرحلة الأولى حالة واحدة

$$U_{11} = \{1, 2, 3\}$$

والمرحلة الثانية تكون لها الحالات الثلاث

$$U_{21} = \{1, 2\} \quad U_{22} = \{1, 3\} \quad U_{23} = \{2, 3\}$$

والمرحلة الثالثة تكون لها الحالات الثلاث

$$U_{31} = \{1\} \quad U_{32} = \{2\} \quad U_{33} = \{3\}$$

نتشوه

$$m_j(U_k) = \text{أعلى عدد متوقع من النقط يمكن تحقيقه ابتداءً من المرحلة } j$$

فى الحالة U_k بمعرفة أنه لم يكن هناك قبول فى المراحل السابقة .

$$d_j(U_k) = m_j(U_k) \text{ الشخص الذى سيسأل فى المرحلة } j \text{ لتحقيق } m_j(U_k)$$

$$V_i = \text{قيمة النقط للشخص } i$$

تكون الصيغة العكسية لهذه المسألة

$$(1) \quad m_j(U_k) = \max_{i \in U_k} [V_i p_{ij} + (1 - p_{ij}) m_{j+1}(U_k - \{i\})]$$

بمعنى أنه إذا سئل الشخص j فى المرحلة j وقبل ، تكون الربحية V_i . بينما إذا انسحب ، يكون أحسن استكمال من الحالة المكونة من الأشخاص الباقين الذين لم يسألوا . ونحقق الصيغة (١) لكل $j = 1, 2, 3$. إذا عرفنا $m_4(U) = 0$. ومن الواضح أن المسألة الحالية هى صيغة تصادفية للمسألة ١٤ - ٢٠ .

المرحلة ٣

$$\begin{array}{lll} m_3(U_{31}) = 10(0) = 0 & \text{عند} & d_3(U_{31}) = 1 \\ m_3(U_{32}) = 8(0.2) = 1.6 & \text{عند} & d_3(U_{32}) = 2 \\ m_3(U_{33}) = 5(0.4) = 2.0 & \text{عند} & d_3(U_{33}) = 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 m_2(U_{21}) &= \text{أعلى } \{10(0.2) + (1-0.2)m_2(U_{22}), 8(0.5) + (1-0.5)m_2(U_{23})\} \\
 &= \text{أعلى } \{2 + (0.8)(1.6), 4 + (0.5)(0)\} = 4 \quad \text{عدد} \quad d_2(U_{21}) = 1 \\
 m_2(U_{22}) &= \text{أعلى } \{10(0.2) + (1-0.2)m_2(U_{23}), 5(0.8) + (1-0.8)m_2(U_{21})\} \\
 &= \text{أعلى } \{2 + (0.8)(2.0), 4 + (0.2)(0)\} = 4 \quad \text{عدد} \quad d_2(U_{22}) = 3 \\
 m_2(U_{23}) &= \text{أعلى } \{8(0.5) + (1-0.5)m_2(U_{21}), 5(0.8) + (1-0.8)m_2(U_{22})\} \\
 &= \text{أعلى } \{4 + (0.5)(2), 4 + (0.2)(1.6)\} = 5 \quad \text{عدد} \quad d_2(U_{23}) = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_1(U_{11}) &= \text{أعلى } \{10(0.5) + (1-0.5)m_2(U_{23}), 8(0.9) + (1-0.9)m_2(U_{22}), 5(1) + (1-1)m_2(U_{21})\} \\
 &= \text{أعلى } \{5 + (0.5)(5), 7.2 + (0.1)(4), 5 + 0(4)\} \\
 &= 7.6 \quad \text{عدد} \quad d_1(U_{11}) = 2
 \end{aligned}$$

وتكون السياسة المثلى هي سؤال الشخص رقم 2 أولاً ، وإذا انسحب هذا الشخص ، نسأل الشخص 3 ، وإذا انسحب هذا الشخص نسأل الشخص 1 . ويكون العدد المتوقع للنقط من هذه السياسة هو 7.6 .

مسائل مكملية

Supplementary Problems

٩ - ١٨ حل المسألة ١٨ - ١ بإضافة شرط أن البرتقال الذي لا يباع يفسد ، وبحسابة 15 دولاراً لكل كمية .

٧ - ١٨ يمتلك أحد الأشخاص 2000 دولار للاستثمار ، وعنده فرصتان A و B وكلتاها فيهما مجازفة ، والعائد السنوي الممكن لكل منهما لكل 1000 دولار. مستثمر ، واحتمال تحقيق هذا العائد موضح بالجدول ١٨ - A

جدول ١٨ - A

	العائد بالدولار	الاحتمال
A	3000	0.4
	0	0.6
B	2000	0.2
	1000	0.8

حدد استراتيجية الاستثمار للسنوات الثلاث المقبلة التي تعظم الرصيد النهائي المتوقع إذا كان الشخص مقيداً بـ 1000 دولار استثمار ، أو صفر لكل سنة

١٧ - ٨ حل المسألة ١٨ - ٧ إذا كان الهدف هو تعظيم احتمال تجميع 5000 دولار على الأقل بعد 3 سنوات .

١٨ - ٩ عند إحدى شركات البترول 8 وحدات نقدية متاحة للاستكشاف في ثلاثة مواقع . إذا وجد البترول في أحد المواقع « فإن احتمال وجوده يكون دالة من الأموال المخصصة لاستكشافه » كما هو موضح في الجدول ١٨ - ٩

جدول ١٨ - ٩

	الوحدات المخصصة								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
الموقع 1	0	0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.9	1
الموقع 2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.7	0.8	1
الموقع 3	0	0.1	0.1	0.3	0.3	0.5	0.9	0.9	1

واحد احتمال تواجد البترول في المواقع هو 0.4 ، 0.3 ، 0.2 على التوالي . ما هو المبلغ الذي يجب أن يخصص لاستكشاف كل موقع لتعظيم احتمال اكتشاف البترول ؟

١٨ - ١٠ عند مدير إحدى الإدارات 4 أسابيع لاستكمال أحد المشروعات الذي يحتاج إلى 10 وحدات عمل . ولدى الإدارة 6 أشخاص لتعيينهم في العمل كل أسبوع . وتعتمد التكلفة والعمل الذي يتم (بالآلاف دولار) على عدد الأشخاص المعينين بالمشروع كل أسبوع كما يلي :

الأشخاص	0	1	2	3	4	5	6
وحدات العمل	0	2	4	6	7	9	10
التكلفة	0	1	2	4	8	16	32

وعند عمل التعيينات الأسبوعية « فإن نائب الرئيس للعمليات يمكنه أن ينقل الأشخاص إلى أعمال أخرى خارج الإدارة . ويحدث هذا غالباً بحيث يجب أن يعمل مدير الإدارة حساب ذلك عند تعيين الأشخاص . ورغم أن نائب الرئيس لا يسحب أحداً من المشروع إطلاقاً ، فإن هناك فرصة 20 في المئة في فقد شخص واحد عندما يعين شخصان أو ثلاثة للمشروع ، وفرصة 33 في المئة في فقد شخصين عندما يعين ثلاثة أشخاص أو أكثر في المشروع . وأي شخص ينقل من المشروع في أسبوع يعود مرة أخرى إلى الإدارة في نهاية الأسبوع . حدد السياسة المثلى لتعيين الأشخاص لهذا المشروع للأسابيع الأربعة التالية ، والتي تحمل التكلفة الكلية المتوقعة أقل ما يمكن للإدارة ، وتضمن إنهاء المشروع في الوقت المحدد .

١٨ - ١١ أصدرت إحدى شركات التصنيع أمر تشغيل لوحدة إنتاج جديدة مستشاً خلال ٣ سنوات « وحتى هذا الوقت يجب أن تستخدم الوحدة الحالية التي تحتوي على ماكينة متعبة . وفي كل عام يؤخذ قرار حول الاحتفاظ بالماكينة في الوحدة أو استبدالها بأخرى جديدة . وبيانات التكلفة لهذه الماكينات هي : (١) تتكلف الماكينة التي عمرها « سنة $(500 + 10u^2)$ دولار للتشغيل لمدة عام واحد . (٢) الماكينة الصالحة وعمرها « سنة لها قيمة بيع في نهاية الاستخدام $(200 - 30u)$ دولار ، أما غير الصالحة ،

فليس لها ثمن إعادة بيع (٣) ثمن الماكينة الجديدة بعد z سنة في المستقبل هو $(300 + 100z)$ دولار (٤) احتمال أن تتعرض الماكينة إلى عطل جسيم غير قابل للإصلاح هو 0.75 . بصرف النظر عن عمر الماكينة . ومن المفترض أن كارثة العطل يمكن أن تحدث فقط في نهاية العام .
حدد سياسة الإحلال المثلى لهذه الماكينة خلال السنوات الأربع المقبلة إذا كان عمر الماكينة الحالية سنة واحدة .

١٨ - ١٢ تستطيع إحدى شركات الحاسبات إنتاج أربع حاسبات كل أسبوع . والطلب على الحاسبات متغير . وبحكم التوزيع الاحتمالي المعطى بالجدول ١٨ - ١٠ .

جدول ١٨ - ١٠

		الاحتمال					
		0	1	2	3	4	5
الطلب	1	0	0.1	0.2	0.5	0.2	0
	2	0	0.1	0.1	0.2	0.5	0.1
	3	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1	0

وتكلفة الإنتاج دالة في عدد الحاسبات المصنعة ، وتعطى (بالآلاف دولار) كما يلي :

الوحدات المصنعة	0	1	2	3	4
التكلفة	0	18	30	42	56

يمكن تسليم الحاسبات في نهاية أسبوع الإنتاج ، أو تخزين للتسليم بعد ذلك بتكلفة تخزين 4000 دولار لكل حاسب في الأسبوع . وأوامر التشغيل التي لا تنفذ خلال الأسبوع توقع عليها تكلفة جزائية 2000 دولار لكل حاسب في الأسبوع . ويجب أن تستكمل بأسرع ما يمكن خلال الأسابيع التالية . كم حاسباً يجب أن تنتج الشركة في الأسابيع الثلاثة المقبلة لتقليل التكلفة الكلية المتوقعة ، وذلك لتغطية الطلبات إلى الحد الأدنى ، إذا كان المخزون الحالي صفراً ؟

١٨ - ١٣ يتكون أحد النظم الإلكترونية من ثلاثة عناصر على التوالي . تعمل العناصر مستقلة عن بعضها ، ولكن يجب أن يعمل كل عنصر إذا كان النظام كله يعمل . وصلاحية النظام (احتمال أن يعمل النظام) يمكن أن تتحسن بإنشاء وحدات موازية لواحد أو أكثر من العناصر : واحتمال أن تعمل أحد العناصر يعتمد على عدد الوحدات الموازية المنشأة طبقاً للجدول ١٨ - ١١

جدول ١٨ - ١١

	الوحدات على التوازي				
	1	2	3	4	5
العنصر 1	0.40	0.64	0.78	0.87	0.92
العنصر 2	0.50	0.75	0.88	0.94	0.97
العنصر 3	0.60	0.84	0.94	0.97	0.99

وتكلفة كل وحدة هي 100 دولار للعنصر 1 و 200 دولار للعنصر 2 و 300 دولار للعنصر 3 .
حدد كم من هذه الوحدات يجب أن يصمم مع النظام لتعظيم الصلاحية . إذا لم تزد تكلفة العناصر عن 1000 دولار .
(ملحوظة : هذه المسألة ثابتة ، برغم أن العائد في الحقيقة احتمالي) . اختر كدالة هدف لوغاريتم الصلاحية ، وخذ كحالة عند المرحلة ، عدد مئات الدولارات كتكلفة الوحدات الممكن صرفها كوحدة للعنصر .

١٨ - ١٤ يحتاج أحد المقاولين إلى ثلاث مكونات لاستكمال مشروع في الوقت المحدد . وهناك ثلاثة مقاولين من الباطن مستعدين لتصنيع هذه المكونات . واحتمال أن المقاول من الباطن يسلم المكونة المطلوبة في الوقت المحدد توضح في الجدول ١٨ - ١٢ .

جدول ١٨ - ١٢

	العنصر 1	العنصر 2	العنصر 3
المقاول 1 من الباطن	0.83	0.92	0.91
المقاول 2 من الباطن	0.89	0.83	0.85
المقاول 3 من الباطن	0.91	0.93	0.93

حدد سياسة التعيين المثل التي تحمل احتمال تسليم المكونات في الوقت المناسب أعلى ما يمكن ، مع العلم أن كل مقاول من الباطن لا يأخذ أكثر من مكونة واحدة . (ملحوظة : عظم لوغاريتم الاحتمال ، واستمر كما في المسألة ١٤ - ٢٠)

١٨ - ١٥ حدد الصيغة العكسية للمسألة التالية . يريد أحد الأطباء أن يرفع مستوى مناعة أحد المرضى . وحدات على الأقل خلال أيام بوصف أقراص للمريض بأخذها كل مساء . كمية المناعة التي يمتصها جسم المريض . وهي دالة في عدد الأقراص المأخوذة ، تتحدد بثلاث وحدات في اليوم كحد أقصى . ومعدل الامتصاص بالاحتمال أن يتعرض المريض لرد فعل يمنعه من العمل في اليوم التالي موضح في الجدول ١٨ - ١٣ . حدد جدول الجرعات للمريض الذي يحقق مستوى المناعة المطلوب بأقل عدد مفقود من الأيام .

جدول ١٨ - ١٣

الجرعة اليومية من الأقراص	0	1	2	3	4	5	6	7
عدد وحدات المناعة الممتصة	0	0.9	1.7	2.4	2.9	3.0	3.0	3.0
احتمال فقد العمل في اليوم التالي	0	0.05	0.15	0.30	0.50	0.70	0.95	1

١٨ - ١٦ حدد الصيغة العكسية للمسألة التالية : عند أحد المقاولين مشروعان يجب أن يتبنا خلال 5 أيام . مازال المشروع يحتاج 2 وحدة عمل ، والمشروع 2 يحتاج 23 وحدة عمل . يستخدم المقاول خمسة أطقم كل الوقت بتكلفة 1000 دولار لكل يوم للطاقم الواحد ، وفي أي وقت يمكن العمل من الباطن بأطقم من الخارج بتكلفة 1500 دولار لكل يوم للطاقم الواحد . ووحدة العمل المنفذة في كل مشروع هي دالة في عدد الأطقم المعينة للمشروع ، كما في الجدول ١٨ - ١٤ . ويوضح جدول الأطقم كل مساء

لليوم التالي ، ودائماً يشمل جدولته تشغيل الخمسة أطقم التي لدى المقاول . ومع ذلك .. فإن 11 في المئة من الوقت يكون أحد أطقم المقاول مريضاً في اليوم التالي ، وفي هذه الحالة لا يدفع المقاول لهذا الطقم . والأطقم من الباطن لا تمرض أبداً . وللمشروع 1 أسبوعية ، بحيث إذا مرض أحد الأطقم ، فيستكمل المشروع من أطقم المقاول « إلا إذا كان جدول التشغيل أصلاً » أطقم « ففي هذه الحالة » فإن المشروع 1 يأخذ 4 أطقم من المقاول . ولا يخصص أكثر من ستة أطقم لأي مشروع في أي يوم . وإذا وصل أي طاقم إلى المشروع « فإنه يبقى هناك طول اليوم . كيف يمكن للمقاول استكمال المشروعين في الوقت المحدد بأقل تكلفة متوقعة ؟

جدول ١٨ - ١٤

عدد الأطقم المعين	0	1	2	3	4	5	6
العمل المنفذ بالمشروع 1	0	1	1.9	2.7	3.5	4.2	5.0
العمل المنفذ بالمشروع 2	0	1	1.9	2.8	3.7	4.5	5.2

١٧ - ١٨ استنتج الصيغة العكسية للمسألة التالية : يحتاج أحد المرشحين لحزب كبير إلى 100 صوت ناخب ليأخذ الترشيح . وما زالت هناك 5 أماكن يمكن كسبهم للفوز . ويمتلك المرشح 10 وحدات نقدية متاحة للصرف عليهم . واحتمال كسب أصوات هؤلاء دالة في كمية النقود المنصرفة عليهم كما في الجدول ١٨ - ١٥ .

جدول ١٨ - ١٥

	وحدات النقود المنصرفة							
	0	1	2	3	4	5	6	7
الصوت 1	0.10	0.15	0.25	0.38	0.44	0.48	0.54	0.60
الصوت 2	0.15	0.21	0.27	0.40	0.45	0.51	0.56	0.61
الصوت 3	0.05	0.12	0.17	0.22	0.27	0.31	0.35	0.38
الصوت 4	0.20	0.25	0.31	0.38	0.45	0.52	0.59	0.67
الصوت 5	0.17	0.22	0.29	0.30	0.38	0.44	0.51	0.55

لايزيد احتمال كسب أحد الأماكن إذا صرف أكثر من 7 وحدات نقدية عليها . ويوجد ■ صوتاً في المكان 1 ، و 69 صوتاً في المكان 2 ، و 52 صوتاً في المكان 3 ، و ■ صوتاً في المكان 4 ، و 21 صوتاً في المكان 5 . حدد سياسة تعظيم فرصة المرشح لكسب 100 صوت على الأقل .

سلاسل ماركوف المحدودة

Finite Markov Chains

عمليات ماركوف MARKOV PROCESSES

تتكون عملية ماركوف من مجموعة من الأغراض ، ومجموعة من الحالات ، بحيث إن :

(١) عند أى وقت يجب أن يكون كل غرض فى حالة معينة (مميزة) ، والأغراض المميزة ليست فى حاجة لكى تكون فى حالة مميزة .

(٢) احتمال أن ينتقل أحد الأغراض من حالة إلى حالة أخرى (والتي قد تكون مماثلة للحالة الأولى) فى فترة زمنية واحدة يعتمد على هاتين الحالتين فقط .

الأعداد الصحيحة للفترة الزمنية التالية للحظة التى تبدأ فيها العملية تمثل مراحل العملية ، والتي قد تكون محدودة أو غير محدودة . إذا كان عدد الحالات محدوداً أو غير محدود عددياً ، فإن عملية ماركوف تسمى سلسلة ماركوف . وسلسلة ماركوف المحدودة هى سلسلة لها عدد محدود من الحالات .

نرمز لاحتمال الانتقال من حالة i إلى حالة j فى فترة زمنية واحدة بالرمز p_{ij} . وسلسلة ماركوف ذات N حالة (حيث إن N عدد صحيح موجب ثابت) المصفوفة P ذات $N \times N$ هى المصفوفة التصادفية أو الانتقالية المرتبطة بالعملية . وبالضرورة ، فإن عناصر كل صف من P مجموعها 1 . وأكثر من ذلك .

النظرية ١٩ - ١ : كل مصفوفة تصادفية تكون لها قيمة أيجن تساوى 1 (ربما متكررة) ، ولا تزيد أى من قيم أيجن عن 1 قيمة مطلقة . (انظر المسائل ١٩ - ١٤ ، ١٩ - ٣٢) . بسبب طريقة تعريف P ، فإنها تثبت أنه من المناسب فى هذا الفصل تحديد المتجهات ذات الأبعاد N كصف متجهات ، بمصفوفات تعمل عليهم من اليمين . وطبقاً للنظرية ١٩ - ١ ، فإنه يوجد متجه $X \neq 0$ بحيث إن $XP = X$ يسمى متجه الأيجن المتبقى هذا النقط الثابتة من P .

مثال ١٩ - ١ : تقسم بيانات تعداد السكان إلى سكان مستقرين اقتصادياً ، وسكان مضطربين اقتصادياً . وفى خلال فترة 10 سنوات ، فإن احتمال السكان المستقرين اقتصادياً سيكون 0.92 ، بينما احتمال المستقرين الذين سيصبحون مضطربين اقتصادياً سيكون 0.08 . واحتمال أن يصبح المضطربون مستقرين اقتصادياً هو 0.03 ، بينما احتمال أن يبقى المضطربون على حالتهم هو 0.97 .

إذا رمزنا للاستقرار الاقتصادى كحالة برقم 1 ، الاضطراب الاقتصادى كحالة برقم 2 ، فإننا يمكن أن نصور هذه العملية بسلسلة ماركوف ذات مرحلتين ، ولها المصفوفة الانتقالية .

$$P = \begin{bmatrix} 0.92 & 0.08 \\ 0.03 & 0.97 \end{bmatrix}$$

قوى المصفوفات التصادفية STOCHASTIC MATRICES

ارمز للقوة رقم n للمصفوفة P بـ $P^n = [p_{ij}^{(n)}]$. إذا كانت P تصادفية، فإن $p_{ij}^{(n)}$ تمثل احتمال أن يتحرك الغرض من الحالة i إلى الحالة j في فترات زمنية عددها n (انظر المسألة ١٩ - ١٢). ويتبع ذلك أن P^n تكون مصفوفة تصادفية. ارمز إلى الجزء من الأغراض في الحالة i في نهاية الفترة الزمنية n بـ $x_i^{(n)}$ ، وارمز

$$X^{(n)} = [x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_N^{(n)}]$$

وهو متجه التوزيع في نهاية الفترة الزمنية رقم n . وتبعاً لذلك ..

$$X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_N^{(0)}]$$

تمثل الجزء من الأغراض في كل حالة عند بداية العملية. وترتبط $X^{(n)}$ بـ $X^{(0)}$ بالمعادلة

$$X^{(n)} = X^{(0)} P^n \quad (١٩ - ١)$$

(انظر المسائل ١٩ - ٦، ١٩ - ٧). وعند كتابة (١٩ - ١) نعرف ضمناً احتمال p_{ij} بالتناسب مع الأغراض في الحالة i التي تحدث الانتقال إلى الحالة j في فترة زمنية واحدة.

المصفوفات التصادفية النهائية ABSORPTIVE MATRICES

تكون المصفوفة التصادفية P تصادفية نهائية إذا كانت نهاية P^n موجودة، بمعنى، إذا كانت كل $p_{ij}^{(n)}$ لها نهاية عندما $n \rightarrow \infty$. ونرمز لمصفوفة النهايات - بالضرورة أن تكون تصادفية - بالرمز L . وتكون عناصر $X^{(n)}$ المعرفة بالمعادلة

$$X^{(n)} = X^{(0)} L \quad (١٩ - ٢)$$

هي توزيعات الحالات المحددة، وتمثل الجزء التقريبي للأغراض في الحالات المختلفة بسلسلة ماركوف بعد عدد كبير من الفترات الزمنية. (انظر المسائل ١٩ - ٦، ١٩ - ٨، ١٩ - ٩)

النظرية ١٩ - ٢: تكون المصفوفة التصادفية تصادفية نهائية لو - فقط لو - كانت قيمة أيجن λ بقيمة ١ هو ١ في حد ذاته، وإذا كانت $\lambda = 1$ لها مضروب k ، ويوجد عدد k متجهات أيجن ومستقلة (يُسمى) مرتبطة بقيمة الأيجن هذه. (انظر المسألة ١٩ - ٥).

النظرية ١٩ - ٣: إذا أدت كل قيمة أيجن في المصفوفة P إلى متجهات أيجن خطية ومستقلة (يُسمى) بعدد يساوي مضروباتها، فإنه توجد مصفوفة M محددها لا يساوي صفراً، تبقى صفوفها متجهات يسرى أيجن في P ، بحيث إن $D \equiv M P M^{-1}$ تكون مصفوفة قطرية. وعناصر القطر في D هي أيجن P المتكررة طبقاً للمضروبات.

(انظر المسألة ١٩ - ٣٣) تنبئ العرف المتبع في وضع متجهات أيجن المناظرة لـ $\lambda = 1$ فوق كل متجهات أيجن الأخرى في M . لذلك للمصفوفة القطرية P التصادفية النهائية ذات العناصر $N \times N$ عند $\lambda = 1$ ، للمضروبات L يمكن حساب مصفوفة النهايات L كالتالي:

$$(١٩ - ٣) \quad L = M^{-1} \begin{pmatrix} \text{نهاية} \\ n \rightarrow \infty \end{pmatrix} D^n M = M^{-1} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} M$$

وتكون المصفوفة القطرية في الجهة اليمنى عدد k من الأرقام 1 ، عدد $(N - k)$ من الأصفار على القطر الرئيسى . (انظر المسألة ١٩ - ٥) .

المصفوفات العادية REGULAR MATRICES

تكون المصفوفة التصادفية عادية إذا احتوت إحدى قواها على عناصر موجبة فقط . (انظر المسائل ١٩ - ٣ ، ١٩ - ٤) .

النظرية ١٩ - ٤ : إذا كانت المصفوفة التصادفية عادية فيكون 1 هو قيمة الأيمن مضروبة في 1 وكل باقى قيم الأيمن λ_i تحقق $|\lambda_i| < 1$.

النظرية ١٩ - ٥ : المصفوفة العادية تكون تصادفية نهائية (أرجودية) .

إذا كانت P عادية ، بمصفوفة نهايات L ، فإن صفوف L تتطابق تماماً مع بعضها ، ويكون كل منها هو المتجه الأيمن الأيسر الأوحى في $\lambda = 1$ ، وله مجموع عناصر يساوى واحداً . (انظر المسألة ١٩ - ١٣) . لرمز لمتجه أيمن E_1 . ويتبع مباشرة من (١٩ - ٢) أن P تكون عادية ، لذلك ، وبصرف النظر عن التوزيع الأول $X^{(0)}$

$$(١٩ - ٤) \quad X^{(n)} = E_1$$

(انظر المسائل ١٩ - ٦ ، ١٩ - ٧ ، ١٩ - ١١) .

مسائل محلولة

Solved Problems

١٩ - ١ ضع العملية التالية في صورة سلسلة ماركوف . يتحكم صانع فرش الأسنان هاى - جلو في 60 في المئة من السوق في إحدى المدن . أظهرت بيانات السنة السابقة أن 88 في المئة من عملاء شركة هاى - جلو ظلوا متمسكين بالشركة ، بينما 12 في المئة من عملاء الشركة تحولوا إلى شركة أخرى . بالإضافة إلى 85 في المئة من عملاء المنافسين تمسكوا بشركاتهم المنافسة ، بينما 15 في المئة تحولوا إلى شركة هاى - جلو . بافتراض أن هذه الاتجاهات ستستمر ، حدد نسبة مشاركة هاى - جلو بالسوق (أ) في خمس سنوات ، (ب) في المدى البعيد .

نأخذ الحالة 1 لتمثل استهلاك شركة هاى - جلو من فرش الأسنان ، والحالة 2 لتمثل استهلاك الشركة الأخرى . ونأخذ p_{11} احتمال أن عملاء هاى - جلو يتمسكون بشركتهم $p_{12} = 0.88$ احتمال أن عملاء هاى - جلو يتحولون إلى الشركة الأخرى $p_{21} = 0.12$ احتمال أن مستهلكى الشركة الأخرى يتحولون إلى هاى - جلو $p_{22} = 0.15$ احتمال أن يتمسك مستهلكو الشركة الأخرى بشركتهم 0.85 . وتكون المصفوفة التصادفية بهذه الاحتمالات الانتقالية هي :

$$P = \begin{bmatrix} 0.88 & 0.12 \\ 0.15 & 0.85 \end{bmatrix}$$

ويكون متجه التوزيع الاحتمالي الأول هو $X^{(0)} = [0.60, 0.40]$ بينما العناصر $x_1^{(0)} = 0.60$ و $x_2^{(0)} = 0.40$ تمثل الجزء من الناس في الحالتين 1 و 2 على التوالي .

١٩ - ٢

صنع العملية التالية في صورة سلسلة ماركوف . يتكون البرنامج التدريبي لمشرف الإنتاج في إحدى شركات الإنتاج من مرحلتين . المرحلة 1 تتضمن 3 أسابيع من الدروس النظرية ، تتبعها المرحلة 2 التي تتكون من 3 أسابيع تدريب عملي تحت إشراف المشرفين العاملين . من الخبرة السابقة .. فإن الشركة تتوقع أن 40% في المئة فقط من هؤلاء المتدربين الذين سيبدأون التدريب النظري سينقلون إلى التدريب العملي ، بينما يحدف 40% في المئة تماماً من برنامج التدريب ، وذلك من بين الذين سينقلون إلى التدريب العملي . 70% في المئة فقط سيخرجون كمشرفين ، 10% في المئة قد سألوا لإعادة المرحلة الثانية ، 20% في المئة سيحذفون كلية من البرنامج . كم مشرفاً تتوقعهم الشركة من برنامج التدريب الحالي ، إذا كان لديها 45 شخصاً في مرحلة التدريب النظري و 21 شخصاً في مرحلة التدريب العملي ؟ .

تعتبر الفترة الزمنية الواحدة ثلاثة أسابيع ، ونحدد المراحل من 1 حتى 4 كشرط للحذف (الشطب) و التدريب النظري و التدريب العملي والعمل كمشرف . على التوالي . إذا افترضنا أن الأشخاص الذين يحذفون لا يدخلون التدريب مرة أخرى ، وأن المشرفين يظلون مشرفين ، فإن الاحتمالات الانتقالية تعطى بالمصفوفة التصادفية .

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هناك $66 = 45 + 21$ شخصاً حالياً في التدريب ، لذلك فإن متجه الاحتمال الأول هو

$$X^{(0)} = [0, 45/66, 21/66, 0]$$

١٩ - ٣ حل المصفوفة التصادفية

$$P = \begin{bmatrix} 0.88 & 0.12 \\ 0.15 & 0.85 \end{bmatrix}$$

عادية ؟ تصادفية نهائية (أرجودية) ؟ احسب P^n نهاية L إذا وجدت .

وحيث إن كل مدخل في القوة الأولى من P (نفسها) موجب ، P عادية ، لذلك فهي تصادفية نهائية (أرجودية) . ومن ثم توجد لها نهاية . ومتجه أجن الأيسر الناظر لـ $\lambda = 1$ يعطى بـ

$$[x_1, x_2] \begin{bmatrix} 0.88 & 0.12 \\ 0.15 & 0.85 \end{bmatrix} = [x_1, x_2] \quad \text{أو} \quad 0.12x_1 - 0.15x_2 = 0$$

وبضم الشرط $x_1 + x_2 = 1$ ، وباخل نجد أن

$$E_1 = [x_1, x_2] = [5/9, 4/9]$$

ويتبع ذلك أن

$$L = P^n = \begin{bmatrix} 5/9 & 4/9 \\ 5/9 & 4/9 \end{bmatrix}$$

١٩ - ٤ حل المصفوفة التصادفية

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

عادية ؟ تصادفية نهائية (أرجودية) ؟ احسب $L = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ ، إذا وجدت ، حيث إن كل مدخل في

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.40 & 0.60 \\ 0.24 & 0.76 \end{bmatrix}$$

يكون موجبا ، P نفسها عادية ، لذلك فهي تصادفية نهائية ، ومن ثم توجد L . وبالحل فإن

$$x_1 - 0.4x_2 = 0 \quad \text{أو} \quad [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = [x_1, x_2]$$

وبالإضافة إلى $x_1 + x_2 = 1$ نجد $E_1 = [2/7, 5/7]$ ، و

$$L = \begin{bmatrix} 2/7 & 5/7 \\ 2/7 & 5/7 \end{bmatrix}$$

■ - ١٩ هل المصفوفة التصادفية

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

عادية ؟ تصادفية نهائية (أرجودية) ؟ احسب $L = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ ، إذا وجدت .

وبدلاً من رفع P إلى القوى التالية لها لتأكيد ما إذا كانت عادية ، دعنا نحدد قيم أينج لها بحل معادلة القيمة :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & -\lambda & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.1-\lambda & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda)(0.1-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

وبذلك $\lambda_1 = 1$ (جذر مضاعف) $\lambda_2 = 0.1$ ، $\lambda_3 = 0$ من نظرية ١٩ - ٤ ، فإن P ليست عادية . ومع ذلك .. من نظرية ١٩ - ٢ ، P تكون تصادفية نهائية (أرجودية) حيث إن لها متجهين أينجين خطيين ومستقلين .

$$[1, 0, 0, 0] \quad \text{و} \quad [0, 0, 0, 1]$$

مناظرين لـ $\lambda_1 = 1$. وبالحساب السهل نجد المتجهين الأينجين الأيسرين هما

$$[-2, 0, 9, -7] \quad \text{و} \quad [4, 5, -30, 21]$$

تناظر على التوالي λ_2 ، λ_3 ،

وتقول النظرية ١٩ - ٣ إن ■ يمكن أن تكون قطرية ، وفيها

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 9 & -7 \\ 4 & 5 & -30 & 21 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8/15 & 7/15 & 10/15 & 3/15 \\ 2/9 & 7/9 & 1/9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبحساب

نحصل على (١٩ - ٣)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8/15 & 7/15 & 10/15 & 3/15 \\ 2/9 & 7/9 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 9 & -7 \\ 4 & 5 & -30 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8/15 & 0 & 0 & 7/15 \\ 2/9 & 0 & 0 & 7/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

١٩ - ٦ حل المسألة المصاغة في المسألة ١٩ - ١

$$X^{(5)} = X^{(0)}P^5 = [0.60, 0.40] \begin{bmatrix} 0.6477 & 0.3523 \\ 0.4404 & 0.5596 \end{bmatrix} = [0.5648, 0.4352] \quad (أ)$$

بعد خمس سنوات تنخفض نسبة مشاركة هاي - جلو في السوق إلى 56.48 في المئة .

(ب) ويتبع من نتائج المسألة ١٩ - ٣ أن P تصادفية نهائية (أرجودية) ، بمصفوفة نهايات L ، حيث إن

$$X^{(\infty)} = X^{(0)}L = [0.60, 0.40] \begin{bmatrix} 5/9 & 4/9 \\ 5/9 & 4/9 \end{bmatrix} = [5/9, 4/9] = E_1$$

في المدى الطويل ، ونستقر نسبة مشاركة هاي - جلو في السوق عند 5/9 ، أو 55.5 في المئة تقريباً .

١٩ - ٧ حل المسألة المصاغة في المسألة ١٩ - ١ إذا كانت هاي - جلو تتحكم في 95 في المئة من السوق

$$X^{(5)} = X^{(0)}P^5 = [0.90, 0.10] \begin{bmatrix} 0.6477 & 0.3523 \\ 0.4404 & 0.5596 \end{bmatrix} = [0.6270, 0.3730] \quad (أ)$$

بعد خمس سنوات سوف تتحكم هاي - جلو في نسبة 63 في المئة من السوق تقريباً .

(ب) وحيث إن عادية ، فإن التوزيع النهائي يحفظ متجه الأيمن الأيسر في P المرتبط بـ $\lambda = 1$ هو

$$X^{(\infty)} = E_1 = [5/9, 4/9]$$

١٩ - ٨ حل المسألة المصاغة في المسألة ١٩ - ٢

باستخدام (١٩ - ٢) ، ونتائج المسائل ١٩ - ٢ ، ١٩ - ١ نحصل على

$$X^{(\infty)} = X^{(0)}L = [0, 45/66, 21/66, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8/15 & 0 & 0 & 7/15 \\ 2/9 & 0 & 0 & 7/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0.4343, 0, 0, 0.5657]$$

لذلك .. وبالتحديد فإن 43.43 في المئة من هؤلاء المدرسين الحاليين (حوالي ٢٩ شخصاً) سيشتبون من البرنامج ، و 56.57 في المئة (حوالي ٣٧ شخصاً) سيصبحون مشرفين .

١٩ - ٩ حل المسألة المصاغة في ١٩ - ٢ إذا كان 66 شخصاً جميعهم في التدريب النظري حالياً .

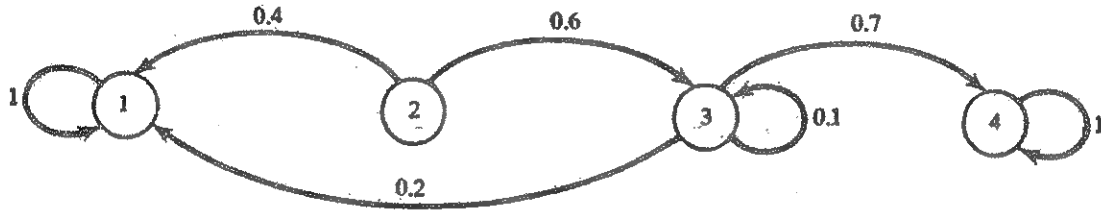
$$X^{(0)} = [0, 1, 0, 0] \quad \text{الآن}$$

$$X^{(\infty)} = X^{(0)}L = [0, 1, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8/15 & 0 & 0 & 7/15 \\ 2/9 & 0 & 0 & 7/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [8/15, 0, 0, 7/15]$$

لذلك .. 15 / ■ من الـ 66 شخصاً في التدريب (حوالى 35 شخصاً) سيشطبون بالتأكيد من البرنامج التدريسي . وبقاء 31 شخصاً سيصبحون مشرفين . بمقارنة هذه النتيجة بنتيجة المسألة ١٩ - ٨ نرى أن التوزيعات النهائية تتأثر بالتوزيعات الأولية ، وهو الوضع العادى عندما تكون المصفوفة التصادفية تصادفية نهائية (أرجودية) ، ولكن ليست عادية .

١٩ - ١٥ انشئ شكل الحالة الانتقالية لسلسلة ماركوف في المسألة ١٩ - ٢ .

شكل الحالة الانتقالية هو شبكة موجهة (انظر فصل ١٥) ، وفيها تمثل الحالات بالعقد ، وتمثل الانتقالات الممكنة بالمنحنيات ، وبترسمية الحالات ، كما في المسألة ١٩ - ٢ ، نحصل على شكل الحالة الانتقالية ، كما في شكل ١٩ - ١ . وتمثل الأرقام التي على المنحنيات احتمال الانتقال .



(شكل ١٩ - ١)

١٩ - ١١ يعمل أحد عمال الخياطة بمفرده على ماكينة في مرحلة من عملية إنتاجية لإنتاج الملابس . تتطلب هذه المرحلة نصف ساعة لكل قطعة لكى تتم . وكل 30 دقيقة يصل أحد السعاة لكان العامل لأخذ القطع المنتهية وتسليمه القطع الجديدة للخياطة . وعدد القطع التي يحملها الساعي غير مؤكدة : 30 في المئة من الوقت لا يكون مع الساعي أى قطع ؛ و 50 في المئة من الوقت يحمل الساعي قطعة واحدة يتركها للخياطة ؛ و 20 في المئة من الوقت يكون مع الساعي قطعتين يتركهما للخياطة . ومع ذلك .. فإن الساعي عنده تعليمات ألا يترك أكثر من ثلاث قطع لعامل الخياطة (القطع غير المنتهية عند عامل الخياطة والرائدة تؤخذ لعامل آخر) . حدد نسبة الوقت الذي يكون فيه العامل بدون عمل ، بافترض أن القطع التي ستبقى بدون خياطة في نهاية وردية العمل ستبقى لليوم التالي .

يمكن صياغة هذه المسألة في صورة سلسلة ماركوف ذات ثلاث مراحل ، وذلك يجعل عدد القطع غير المنتهية عند العامل قبل حضور الساعي مباشرة تمثل الحالات . وتكون إما ■ ، 2 ، 3 على التوالي ممثلة ■ ، ■ ، أو 2 قطعة غير منتهية ■ أما المراحل ، فهي فترات النصف ساعة لمعدل وصول الساعي .

إذا كان لدى العامل قطعة واحدة غير منتهية في بداية المرحلة (قبل حضور الساعي مباشرة) ، وإذا ترك الساعي قطعة واحدة (باحتمال 0.5) ، فإن قطعة واحدة ستستكمل ببداية المرحلة التالية ، تاركة العمل مرة أخرى بقطعة واحدة غير مستكملة ؛ ومن ثم $p_{22} = 0.5$. وإذا كان لدى العامل قطعتان غير مستكملتين في بداية المرحلة ، وحضر الساعي ومعه إما ■ أو 2 قطعة (باحتمال $0.5 + 0.2 = 0.7$) ، فإن الساعي سترك قطعة واحدة فقط ؛ وفي نهاية الفترة التالية سيكون لدى العامل قطعتان غير مستكملتين باقيتان ■ حيث ستستكمل واحدة خلال هذه الفترة . لذلك $p_{33} = 0.7$ ، باعتبار أن كل الاحتمالات الأخرى بنفس الطريقة ، نوجد المصفوفة التصادفية .

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ \blacksquare & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

حيث إن كل عناصر P^2 موجبة ، لذلك تكون P موجبة . ويكون متجه أينس المرتبط بـ $\lambda_1 = 1$ ، وله مجموع عناصر يساوى 1 هو

$$E_1 = \left[\frac{9}{19}, \frac{6}{19}, \frac{4}{19} \right]$$

وحيث إن P عادية ، فإن هذا المتجه هو أيضاً $X^{(0)}$. وفي المدى البعيد ، يبدأ العامل مرحلة في الحالة 1 (لا تبقى أى قطع غير مستكملة) $9/19$ من المرات . ويصل الساعي بعد ذلك ، ولا يترك أى قطع للخياطة ، وذلك باحتمال 0.3 ، لذلك فإن العامل يكون بلا عمل . لذلك يكون العامل عاطلاً . أو 14 في المئة من الوقت تقريباً .

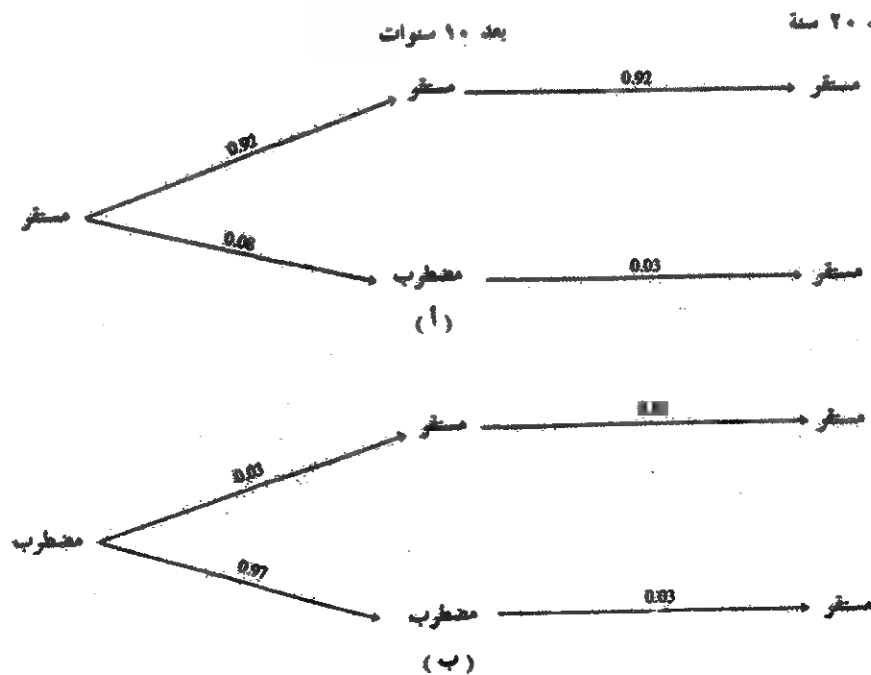
$$\frac{9}{19}(0.3) = 0.1421$$

١٩ - ١٢ تحقق من أنه في المصفوفة التصادفية في المثال ١٩ - ١ ، $p_{ij}^{(2)}$ تمثل احتمال الانتقال من الحالة j إلى الحالة i في فترتين زمنيتين .

هناك طريقان للسكان المستقرين ليظلوا مستقرين بعد 20 سنة : كما في شكل ١٩ - ٢ . (أ) : إما أن يظلوا مستقرين خلال الـ 10 سنوات الأولى ، وفي خلال الـ 10 سنوات الثانية ، أو يصبحون مضطربين بعد 10 سنوات ، ثم يعودون إلى الاستقرار بعد 10 سنوات أخرى . واحتمال أن يبقى المواطن المستقر مستقراً خلال فترة زمنية واحدة هو 0.92 ، ومن ثم ، فاحتمال أن يبقى المواطن المستقر مستقراً خلال فترتين زمنيتين هو $(0.92)(0.92)$. واحتمال أن يصبح المواطن المستقر مضطرباً في 10 سنوات هو 0.08 ، واحتمال أن يصبح المواطن المضطرب مستقراً في 10 سنوات هو 0.03 ، لذلك فإن احتمال حدوث الحدين مع بعضهما لنفس المواطن هو $(0.08)(0.03)$ ، لذلك فإن احتمال أن يبقى المواطن المستقر مستقراً بعد فترتين زمنيتين هو

$$(0.92)(0.92) + (0.08)(0.03)$$

وهو بالضبط العنصر $(1,1)$ في P^2



(شكل ١٩ - ٢)

يوضح شكل ١٩ - ٢ (ب) الطرق التي يمكن للمواطن المضطرب بواسطتها أن يصبح مستقراً خلال فترتين زمنيتين . واحتمال أن يصبح مستقراً في الفترة الزمنية الأولى ، ثم يبقى مستقراً في الفترة الزمنية التالية هو (0.92) (0.3) . واحتمال أن يبقى مضطرباً خلال الفترة الزمنية الأولى ، ثم يصبح مستقراً خلال الفترة الزمنية الثانية هو (0.97)(0.03) . لذلك .. فإن احتمال حدوث أى من هذين الموقفين هو

$$(0.03)(0.92) + (0.97)(0.03)$$

وهو بالضبط العنصر (2, 1) في P^2 . ويمكن معاملة الحالتين الأخريين بالمثل .

١٩ - ١٣ اثبت أنه إذا كانت L عادية ، فإن كل الصفوف P^n نهاية L تكون مماثلة .

بمعرفة أن $L = P^n$ نهاية L ، فإنه يكون صحيحاً أن $L = P^{n-1}$ نهاية L ، وبالتالي ،

$$L = P^n \text{ نهاية } P^n = \text{نهاية } (P^{n-1}P) = (\text{نهاية } P^{n-1})P = LP$$

والتي تتضمن أن كل صف في L هو متجه أيمن أبسر في P مناظر $\lambda = 1$

والآن عندما تكون L عادية ، فإن كل متجهات أيمن تكون مضروباً بمقاييس لتتجه مفرد . وعلى الوجه الآخر ، عندما تكون L تصادفية ، فإن كل صف منها يكون مجموعاً واحداً . ويتبع ذلك أن كل الصفوف تكون مماثلة .

١٩ - ١٤ إثبت أنه إذا كانت λ قيمة أيمن للمصفوفة التصادفية P ، فإن $|\lambda| \leq 1$.

دع $E = [e_1, e_2, \dots, e_N]^T$ ليكون متجه أيمن أيمن يتبع λ . فإن $PE = \lambda E$ وباعتبار العنصر رقم i لكلا الطرفين من المتساوية ، نستنتج أن

$$\sum_{k=1}^N p_{ik} e_k = \lambda e_i$$

دع e_i لتكون العنصر من E الذى له أكبر مقدار ، بمعنى

$$|e_i| = \max\{|e_1|, |e_2|, \dots, |e_N|\}$$

من التعريف .. فإن $E \neq 0$ ، لذلك $|e_i| > 0$ (١) . ويتبع ذلك من (١) وبوضع λ تساوى λ ومن (٢) أن

$$|\lambda| |e_i| = |\lambda e_i| = \left| \sum_{k=1}^N p_{ik} e_k \right| = \sum_{k=1}^N p_{ik} |e_k| \leq |e_i| \sum_{k=1}^N p_{ik} = |e_i|$$

وتكون النتيجة هي $|\lambda| \leq 1$ مباشرة

مسائل مكملية

Supplementary Problems

في المسائل ١٩ - ١٥ حتى ٢١ ، حدد ما إذا كانت المصفوفات المعطاة تصادفية ، وإذا كانت كذلك ، حدد ما إذا كانت عادية أو تصادفية نهائية ، أو ليست كذلك . حدد قيمتها النهائية إن وجدت .

$$19.15 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.21 & 0.79 \end{bmatrix} \quad 19.21 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.21 & 0.79 & 0 \\ 0.17 & 0.35 & 0.48 \end{bmatrix} \quad 15 - 19$$

$$19.16 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 19.19 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \quad 16 - 19$$

$$19.17 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.9 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \quad 17 - 19$$

٢٢ - ١٩ حدد النسبة من المواطنين الذين يمكن تصنيفهم في النهاية كمستقرين اقتصادياً إذا كانت البيانات في المثال ١٩ - ١ تظل محققة خلال المدى الطويل .

٢٣ - ١٩ بمراجعة كشف المشتركين في مجلة السفر ، وجد أن ■ في المئة منهم على الأقل لهم كارت ضمان لشركة طيران واحدة . وبالمقارنة بالمراجعة التي تمت منذ ■ سنوات مضت ، وجد أن 40 في المئة من الذين لم يكن لديهم كارت ضمان أصبح لديهم الآن كارت ■ بينا 10 في المئة من الذين كان عندهم كارت لم يعد لديهم كروت حالياً . بافتراض أن هذه الاتجاهات ستستمر في المستقبل ، حدد نسبة المشتركين الذين سيمتلكون كروت ضمان لشركة الطيران . (أ) في عشر سنوات ■ (ب) في المدى الطويل .

٢٤ - ١٩ لا ترغب إحدى شركات الطيران بين مدينة نيويورك وواشنطن أن تقوم رحلة الساعة ٧:١٥ صباحاً متأخرة يومين على التوالي . إذا بدأ الطيران متأخراً في أحد الأيام ، فإن الشركة تبذل مجهوداً كبيراً في اليوم التالي ليكون الطيران في موعده ■ وتنجح في ذلك ■ في المئة من المرات . وإذا لم يكن الطيران متأخراً في اليوم السابق ■ فإن الشركة لا تتخذ أي إجراءات ، ويبدأ الطيران طبقاً للجدول 60 في المئة من المرات . ما هي النسبة المئوية من المرات التي عندها يكون الطيران متأخراً ؟

٢٥ - ١٩ يصنف العنب في وادي سونوما إلى ممتاز ، وعادي ، ورديء . وعقب محصول ممتاز ، فإن احتمالات الحصول على عنب ممتاز ، وعادي ، ورديء في العام التالي هي 0.2, 0.8, 0 على التوالي . وعقب محصول عادي ، فإن احتمال الحصول على عنب ممتاز ■ وعادي ، ورديء هي 0.2, 0.6, 0.2 . وعقب محصول رديء ، فإن احتمالات الحصول على عنب ممتاز ، وعادي ، ورديء هي 0.1, 0.8, 0.1 . حدد احتمالات الحصول الممتاز لكل سنة من السنوات الخمس التالية إذا كان أقرب أخصر محصول عادياً .

٢٦ - ١٩ يقسم قسم الشيخوخة في إحدى المستشفيات مرضاه إلى علاج داخلي ، وعلاج سريع . وتدل البيانات السابقة على أنه خلال أسبوع واحد 30 في المئة من مرضى العلاج السريع يخرجون من المستشفى ■ و 40 في المئة يقعون تحت العلاج السريع ، و 30 في المئة يحتاجون إلى علاج داخلي . وفي نفس الفترة 50 في المئة من مرضى العلاج الداخلي يصبحون في العلاج السريع ■ و 20 في

المئة منهم يقون بالعلاج الداخلى « و 30 فى المئة يموتون . وحالياً لدى المستشفى 100 مريض فى قسم الشيخوخة ، و 30 منهم علاج داخلى « و 70 علاج سريع . حدد وضع هؤلاء المرضى . (أ) بعد 2 أسبوع (ب) فى المدى الطويل . (لاتغير حالة المريض الذى يخرج إذا مات هذا المريض)

١٩ - ٢٧ يعتبر أصحاب إحدى العمارات السكنية فى شيكاغو أن وكيل التشغيل الذى يدير العمارة من المديرين الممتازين ، وله سجل ممتاز بمدينة بوسطن . وبالنسبة للتقديرات جيد « ومتوسط « و ردىء للمباني التى تديرها الشركة ، فإن 50 فى المئة من المباني التى كانت جيدة لعام كامل تظل جيدة حتى نهاية العام . وينحدر الباقي إلى المستوى المتوسط . وبالنسبة للمباني التى كانت فى حالة متوسطة « و 30 فى المئة منها تبقى فى المستوى المتوسط فى نهاية السنة ، و 70 فى المئة ترتفع إلى المستوى الجيد . وبالنسبة للمباني التى كانت فى المستوى الردىء « فإن 95 فى المئة تبقى فى المستوى الردىء بعد سنة واحدة « بينما الـ 10 فى المئة الباقية ترتفع إلى المستوى الجيد . بافتراض أن هذه الشروط ستطبق على شيكاغو أيضاً ، حدد مستوى الشقق المتوقع تحت إدارة الشركة فى المدى الطويل .

١٩ - ٢٨ إحدى حالات سلسلة ماركوف هي « الامتنصاص » أى أن أى غرض يدخل أى حالة لا يمكن أن يخرج منها . أوجد كل حالات الامتنصاص لسلاسل ماركوف المعرفة بالمحددات (أ) فى المسألة ١٩ - ١٥ ، (ب) فى المسألة ١٩ - ١٨ ، (ج) فى المسألة ١٩ - ١٩ ، (د) فى المسألة ١٩ - ٢١ .

١٩ - ٢٩ اثبت أن المصفوفة التصادية لسلسلة ماركوف التى لها على الأقل حالة امتصاص لا يمكن أن تكون عادية .

١٩ - ٣٠ من تعريف مضروب المصفوفات ، تحقق من أن مضروب مصفوفتين تصادفيتين من نفس الدرجة يكون هو نفسه تصادفياً .

١٩ - ٣١ اثبت $U = [1, 1, 1, \dots, 1]$ هو متجه أيجن أيسر فى P^T وممكوس أى مصفوفة تصادفية اختيارية P .

١٩ - ٣٢ باستخدام نتيجة المسألة ١٩ - ٣١ ، إثبت أن كل مصفوفة تصادفية $\lambda = 1$ لها كقيمة أيجن .

١٩ - ٣٣ اثبت النظرية ١٩ - ٣

١٩ - ٣٤ بين بمثال أن معكوس النظرية ١٩ - ٤ غير ممكن .

الفصل العشرون

الآفاق الغير محدودة Unbounded Horizons

السياسات المثلى في ظل السكون OPTIMAL POLICIES UNDER STATIONARITY

عملية القرار التي لها أفق غير محدود هي التي لها مراحل كثيرة غير محدودة . وبالرغم من أن هذه المواقف لا تحدث كثيراً في الحياة العملية فإنها تكون نماذج مناسبة لتحليل العمليات التي ليس لها نقط نهاية واضحة . ويفترض الشرط التالي لهذه العمليات .
فرض السكون ، القرارات ، العائد ، والحالات المرتبطة بالعملية تكون متماثلة في كل حالة .
وفي الحالات التي تتطابق مع هذا الفرض فإن السياسات المثلى تعتمد فقط على الحالات وليست على المراحل . ومهما كان القرار أمثلاً للحالة ■ في المرحلة ■ فإنه يكون أمثلاً للحالة ■ في المرحلة 100 ، حيث تبقى كل الشروط الأخرى بدون تغيير . سنستعمل الرمز $d^*(u)$ ليدل على أن القرار يكون أمثلاً عندما تكون العملية في الحالة u .
وفرض السكون يكون مقيداً في أنه لا يسمح بتغيير المعدلات ، والتكلفة ، والأثمان أو أى كمية أخرى عندما تستمر العملية في المستقبل . وتبقى السياسة المثلى ، لذلك ، مثل طالما يبقى فرض السكون قائماً فقط .

الخصم : DISCOUNTING

حيث الأموال المنصرفة أو الواردة في المستقبل (المسافة) لا تساوى في القيمة مع الأموال من نفس المقام المنصرفة أو الواردة في الحاضر ، ويستخدم الخصم غالباً لتعويض الفروق الزمنية (انظر ١٤ - ٥) . نرسم للقيمة الحالية للعائد الأمثل (أو العائد الأمثل المتوقع في حالة العمليات التصادية) بالأفق غير المحدود لعملية قرار مبتدأة بالحالة ■ بـ $m(u)$. وتنسب معادلة $m(u)$ المعادلة الدالة للعملية .

العمليات الثابتة مع الخصم DETERMINISTIC PROCESSES WITH DISCOUNTING

توجد المعادلة الدالة للعمليات الثابتة بسهولة غالباً باشتقاق الصيغة العكسية للعملية ، وذلك باستخدام مدخل البرمجة الديناميكية مع الخصم على عدد محدد من المراحل ، ثم شطب كل الرموز الدالة على المراحل .

مثال ٢٠ - ١ : من (١) في المسألة ١٤ - ١٠ نحصل على

$$m(u) = \max \{I(u) - M(u) + \alpha m(u+1), I(0) - M(0) - R(u) + \alpha m(1)\}$$

كمعادلة دالة لعملية إحلال المعدات بأفق غير محدود .

تستخدم الطريقة التالية ذات الخمس خطوات لحل المعادلات الدالة لـ $m(u)$ لتحديد السياسة المثلى .

الخطوة 1 : اختر سياسة أولية وأرسم للقرار في كل حالة u بـ $d(u)$. إجعل هذه السياسة هي السياسة الحالية .

الخطوة 2 : تحت هذه السياسة الحالية ■ احسب لكل قيمة من ■ العائد الكلى من العملية التي تبدأ بالحالة ■ . إجعل القيمة المحسوبة الدالة $PV(u)$

الخطوة 3 : إستبدال الدالة m بالدالة PV في الطرف الأيمن في المعادلة الدالة ، فنحصل لذلك على $\hat{m}(u)$ الطرف الأيسر للمعادلة الجديدة ، $d(u)$ القرار المؤدى إلى $\hat{m}(u)$.

الخطوة 4 : إذا كانت $d(u) = \hat{d}(u)$ لكل حالة u ، فتكون السياسة الحالية مثلى ، بمعنى $d^*(u) = \hat{d}(u)$ ، وإذا لم تكن كذلك ، إذهب إلى الخطوة 2 .

الخطوة 5 : إجعل $\hat{d}(u) = d(u)$ لكل حالة u ، لذلك إنشئ سياسة جديدة معدلة ، ثم عُد إلى الخطوة 2 .
(انظر المسألة ٢٠ - ٢٠)

سلاسل ماركوف مع الخصم MARKOV CHAINS WITH DISCOUNTING

يمكن التعبير عن بعض عمليات القرارات في صورة سلاسل ماركوف بمجرد أن توضع السياسة . في هذه الحالات ، تعتمد الاحتمالات الانتقالية عموماً على كلا من الحالات والسياسة . (انظر المسائل ٢٠ - ٢٠ و ٢٠ - ٢٠) . إجعل

$$\begin{aligned} d_i &= \text{القرار الممكن عندما تكون العملية في الحالة } i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \\ C(i, d_i) &= \text{التكلفة أو العائد (المتوقع) من تنفيذ القرار } d_i \text{ ، والعملية تكون في الحالة } i \\ p_{ij}(d_i) &= \text{الاحتمال الانتقالي للنقل من الحالة } i \text{ إلى الحالة } j \text{ إذا تُخذ القرار } d_i \text{ في الحالة } i \end{aligned}$$

تحدث التكلفة $C(i, d_i)$ في كل مرة تكون فيها العملية عند الحالة i وينفذ القرار d_i . ولكل i ، تكون هذه التكلفة ، أو لا تكون متغير عشوائي . فإذا كانت كذلك ، نفهم أن $C(i, d_i)$ ترمز إلى القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي .

وتكون المعادلة الدالة لسلسلة ماركوف ذات N مرحلة بمعامل خصم α هي

$$m(i) = \text{optimum}_{d_i} \left\{ C(i, d_i) + \alpha \sum_{j=1}^N p_{ij}(d_i) m(j) \right\} \quad (٢٠ - ١)$$

وتكون الأمثلة لكل القرارات d_i الممكنة عندما تكون العملية في الحالة i . ويمكن حل المعادلة (٢٠ - ١) في $m(i)$ بنفس الطريقة المعطاة للعمليات الثابتة (المؤكد) مع الخصم ، بتعديل واحد . والقيم الحالية (المتوقعة) $PV(i)$ في الخطوة 2 لا يمكن أن تحسب مستقلة لكل حالة i ، ولكن نحصل عليها لحل مجموعة المعادلات الآتية .

$$PV(i) = C(i, d_i) + \alpha \sum_{j=1}^N p_{ij}(d_i) PV(j) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (٢٠ - ٢)$$

وهنا فإن d_i هي القرار المرتبط بالحالة i تحت السياسة الحالية . وتكون الصيغة (٢٠ - ٢) بالطبع هي الأساس للصيغة (٢٠ - ١) . ويجب أن يذكر إن القيم الحالية للعمليات المؤكدة أيضاً يمكن أن تحسب من المعادلات المماثلة لـ (٢٠ - ٢) . ويمكن الحصول على هذه المعادلات بكتابة $PV(u)$ بدلاً من $m(u)$ في المعادلة الدالة ، ثم أمثلة القيمة المفردة $d_i = \hat{d}_i$ (انظر المسألة ٢٠ - ٤) .

العائد المتوقع لكل فترة EXPECTED RETURN PER PERIOD

في الحالات التي يكون معروفاً فيها إن فرض السكون ينطبق للفترة الزمنية القصيرة ، ولكن الغير مؤكدة . أو حيث يكون معامل الخصم قريباً من 1 ، لذلك ينتج عنه قيم حالة كبيرة للأفق غير المحدودة ، يمكن أن يكون العائد المتوقع (سواء ربح أو تكلفة) للفترة (المرحلة) مقبلاً أكثر علامة عن القيمة الحالية لتحديد السياسة المثلى .

نفترض أن المسألة تحت هذا التساؤل يمكن أن تصور في صورة سلسلة ماركوف عندما توضع السياسة ، ويكون التوزيع النهائي للحالات

$$X^{(\infty)} = [x_1^{(\infty)}, x_2^{(\infty)}, \dots, x_N^{(\infty)}]$$

مستقلاً عن التوزيع الأولي للحالات $X^{(0)}$. وهذا الشرط الأخير يتحقق ليس فقط إذا كانت المصفوفة الانتقالية P عادية ، ولكن لطيفة كبيرة من المصفوفات الغير عادية التصادفية النهائية ، والتي فيها يكون صفوف $L = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ مشابهة لبعضها البعض .
تعريف : العائد المتوقع للفترة هو

$$R = C(1, d_1)x_1^{(\infty)} + C(2, d_2)x_2^{(\infty)} + \dots + C(N, d_N)x_N^{(\infty)}$$

حيث $C(i, d_i)$ هي التكلفة المتوقعة أو الربح المتوقع من تنفيذ القرار d_i بينما تكون العملية في الحالة i ($i = 1, 2, \dots, N$).
يعتمد العائد المتوقع للفترة على السياسة المتبعة ، وتكون السياسة مثل إذا نتج عنها قيمة مثل في R . (انظر المسألة ٢٠ - ٧) .

وحيث أن R تحتوي على عناصر $X^{(\infty)}$ ، فإنها تمثل متوسط عائد الفترة عندما تكون العملية في حالتها المستقرة . وأكثر من ذلك ، حيث أن $X^{(\infty)}$ من المفروض أنها لا تعتمد على $X^{(0)}$ ، فإن R أيضاً ، تكون مستقلة عن الحالة الأولية للعملية ، ومع ذلك فإن الحالة الأولية تؤثر على المراحل الأولى للعملية . أرمرز للعائد المتوقع (بدون خصم) للعملية خلال n - فترة ابتداء بالحالة i بـ $w_n(i)$. فإن $w_1 = w_n(i) - nR$ تمثل التداخل خلال n فترة بين العائد الكلي المتوقع على أساس ان العملية بدأت بالحالة i ، وأن العائد الكلي المتوقع قد وصل إلى ظروف الحالة المستقرة التي وصلت إليها قبل ذلك . وحيث أن ظروف الحالة المستقرة ستصبح مؤثرة تباعاً ، بصرف النظر عن الحالة الأولية ، فإن w_1 يجب أن تتحول إلى عدد ثابت بزيادة n . (انظر المسألة ٢٠ - ١٠) . وتبعاً لذلك فإن w_1 تكون ثابتة لقيم n الكبيرة .

ويمكن استخدام قيم w_1 لكل حالة i ، وقيم n الكبيرة لإيجاد طريقة الخطوات الست لتحديد السياسات المثلى .

الخطوة 1 : اختيار سياسة أولية ، وارمرز للقرار لكل حالة i بالرمز d_i . لجعل هذه السياسة هي الحالية .

الخطوة 2 : حدد المصفوفة الانتقالية $P = [p_{ij}(d_i)]$ المناظرة للسياسة الحالية ، والعائد $C(i, d_i)$ المرتبط بالقرارات .

الخطوة 3 : حل مجموعة المعادلات التالية في R ، w_1 ($i = 2, 3, \dots, N$) ، عند w_1 تؤخذ صفر

$$w_i + R = C(i, d_i) + \sum_{j=1}^N p_{ij}(d_i)w_j \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (٢٠ - ٣)$$

الخطوة 4 : لكل حالة i ($i = 1, 2, \dots, N$) ، حدد القرار \bar{d}_i الذي يؤدي الى

$$\left\{ C(i, d_i) + \sum_{j=1}^N p_{ij}(d_i)w_j \right\}_{d_i} \text{ أمثلية} \quad (٢٠ - ٤)$$

حيث تؤخذ الأمثلية لكل القرارات d_i في هذه الحالة .

الخطوة 5 : إذا كانت $\bar{d}_i = d_i$ لكل قيم i ، فإن السياسة الحالية تكون مثل ، عند $R = R^*$ كما في الخطوة ١ . إذا لم تكن كذلك ، إذهب إلى الخطوة ١

الخطوة 6 : إجعل $d_i = \bar{d}_i$ لكل قيم i ، لذلك إنشئ سياسة حالية معدلة ، وعُد إلى الخطوة 2 .

(انظر المسائل ٢٠ - ٨ حتى ٢٠ - ١٢)

مسائل محلولة

Solved Problems

٢٠ - ١ حدد $PV(u)$ لكل حالة ■ بأفق غير محدود لعملية إحلال المعدات للمسألة ١٤ - ٨ تحت السياسة التالية

الحالة "u"	1	2	3	4	5	6
القرار $d(u)$	اشترى	اشترى	اشترى	اشترى	اشترى	اشترى

خذ معدل العائد الفعال ليكون 10 في المئة سنوياً وتكلفة إحلال الماكينة ذات عمر ■ سنوات لتكون $10000 = (6)$ ■ دولار .
تترواح الحالة "u" عند أي مرحلة من ■ حتى ■ . حيث أنه ، عند الأفق الغير محدود ، من الممكن الدخول في مرحلة بماكينة عمرها 6 سنوات (التي يجب أن تستبدل فوراً) . معامل الخصم هو :

$$\alpha = \frac{1}{1+0.10} = 0.909091$$

لحساب $PV(1)$ ، لاحظ أنه ، عندما تبدأ العملية بماكينة عمرها عام واحد ، تتطلب السياسة الحالية أن تستبدل الماكينة بتكلفة 3500 دولار (انظر الجدول ١٤ - ١٢) . وتركب ماكينة جديدة تعطى دخلاً 10000 دولار بتكلفة صيانة 100 دولار . ويكون العائد الصافي في السنة هو :

$$10\,000 - 100 - 3500 = 6400$$

وندخل السنة الثانية للعملية بماكينة عمرها سنة واحدة ■ طبقاً للسياسة الحالية فإنها يجب أن تستبدل . ويكون العائد الصافي للسنة الثانية أيضاً هو 6400 دولار . وحيث أنه نحقق متأخراً سنة واحدة ، فإنه يجب أن نخصم بمعدل خصم α . ويستمر العائد الصافي السنوي بعد ذلك ليكون 6400 دولار ، ولكن كل قيمة يجب أن نخصم بشكل مناسب لإيجاد قيمتها الحالية . ونتيجة لذلك ■ فإن القيمة الحالية للعائد الكلي من العملية ابتداءً بماكينة عمرها سنة واحدة هي

$$PV(1) = 6400 + 6400\alpha + 6400\alpha^2 + 6400\alpha^3 + \dots = \frac{6400}{1-\alpha} = \$70\,400$$

لحساب $PV(2)$ القيمة الحالية للعائد الكلي ابتداءً بماكينة عمرها سنتين ، لاحظ أن السياسة الحالية تتطلب استبدال الماكينة ذات عمر السنتين مباشرة بماكينة جديدة . تكون تكلفة الاستبدال 4200 دولار ، وبمجرد تركيب الماكينة الجديدة تعطى دخلاً 10000 دولار وتكلفة صيانة 100 دولار . ويكون العائد الصافي للسنة الأولى هو

$$10\,000 - 100 - 4200 = \$5700 \quad \text{دولار}$$

وإبتداءً من السنة الثانية تكون الظروف المالية مماثلة للظروف التي حسبت بها $PV(1)$ لذلك فإن

$$PV(2) = 5700 + 6400\alpha + 6400\alpha^2 + 6400\alpha^3 + \dots = 5700 + \frac{6400\alpha}{1-\alpha} = \$69\,700 \quad \text{دولار}$$

$$PV(3) = (10\,000 - 100 - 4900) + 6400\alpha + 6400\alpha^2 + 6400\alpha^3 + \dots = 5000 + \frac{6400\alpha}{1-\alpha} = \$69\,000 \text{ دولار}$$

$$PV(4) = (10\,000 - 100 - 5800) + 6400\alpha + 6400\alpha^2 + 6400\alpha^3 + \dots = 4100 + \frac{6400\alpha}{1-\alpha} = \$68\,100 \text{ دولار}$$

$$PV(5) = (10\,000 - 100 - 5900) + 6400\alpha + 6400\alpha^2 + 6400\alpha^3 + \dots = 4000 + \frac{6400\alpha}{1-\alpha} = \$68\,000 \text{ دولار}$$

$$PV(6) = (10\,000 - 100 - 7000) + 6400\alpha + 6400\alpha^2 + 6400\alpha^3 + \dots = 2900 + \frac{6400\alpha}{1-\alpha} = \$66\,900 \text{ دولار}$$

٢ - ٢. أعد حل المسألة ٢٠ - ١ إذا كانت السياسة الحالية هي

الحالة u	1	2	3	4	5	6
الفوار $d(u)$	احتفظ	احتفظ	اشترى	اشترى	اشترى	اشترى

لحساب $PV(1)$ ، فإن العائد الكلي مع الخصم ابتداءً بالماكينة ذات عمر سنة واحدة، مع ملاحظة أن السياسة الحالية تتطلب الاحتفاظ بالماكينة ذات عمر سنة واحدة. من الجدول ١٤ - ١٢، فإن هذه الماكينة ستعطي عائد سنوي 9900 دولار وتكلفة صيانة 400 دولار، بعائد صافي 9100 دولار. وتصبح الماكينة عمرها ستين في بداية المرحلة الثانية، ومرة أخرى تتطلب السياسة الحالية الاحتفاظ بالماكينة. وتعطي الماكينة ذات عمر الستين عائداً صافياً

$$9200 - 800 = \$8400 \text{ دولار}$$

وحيث أن هذا يحدث في المرحلة الثانية من العملية فإن هذه الكمية يجب أن تُخصم بمعدل خصم α . وتدخّل الشركة بعد ذلك المرحلة الثالثة بماكينة عمرها ثلاث سنوات والتي يجب أن تستبدل، طبقاً للسياسة الحالية، بتكلفة الاستبدال 4900 دولار. تعطي الماكينة الجديدة دخلاً قدرة 10000 دولار وبمجرد تركيب وتكلفة صيانة 100 دولار، لذلك فإن العائد الصافي في المرحلة الثالثة يكون

$$10\,000 - 100 - 4900 = \$5000 \text{ دولار}$$

ويجب أن يُخصم بمعدل خصم α^2 . وتدخّل الشركة المرحلة الرابعة بماكينة عمرها سنة واحدة، حيث يجب الاحتفاظ بها طبقاً للسياسة الحالية. لذلك،

$$PV(1) = 9100 + 8400\alpha + 5000\alpha^2 + 9100\alpha^3 + 8400\alpha^4 + 5000\alpha^5 + \dots$$

$$= (9100 + 8400\alpha + 5000\alpha^2)(1 + \alpha^3 + \alpha^6 + \dots) = \frac{9100 + 8400\alpha + 5000\alpha^2}{1-\alpha^3} = \$83\,916 \text{ دولار}$$

لحساب $PV(2)$ ، العائد الكلي مع الخصم ابتداءً العملية بماكينة عمرها ستين، مع ملاحظة الاحتفاظ بالماكينة ذات عمر ستين طبقاً للسياسة الحالية. ستعطي هذه الماكينة عائداً صافياً هو

$$9200 - 800 = \$8400 \text{ دولار}$$

وتدخّل الماكينة المرحلة 2 من العملية وعمرها ثلاث سنوات، وتتطلب السياسة الحالية استبدال الماكينة. تكلفة الاستبدال هي 4900 دولار، وبربطها مع تكلفة الصيانة والدخل الناتج منها يؤدي إلى عائد سنوي صافي.

$$10\,000 - 100 - 4900 = \$5000 \text{ دولار}$$

وحيث أن هذه الكمية ستسلم في المرحلة الثانية من العملية ، لذا يجب أن تُخصم بمعدل خصم α . وتدخّل الشركة المرحلة الثالثة بماكينة عمرها سنة واحدة ويكون الموقف الآن مشابهاً للموقف الناتج عن $PV(1)$ ، ولكنه حدث متأخراً مرحلتين . وبالتالي

$$PV(2) = 8400 + 5000\alpha + \alpha^2 PV(1) = \$82\,298 \quad \text{دولار}$$

وبالمثل

$$PV(3) = (10\,000 - 100 - 4900) + \alpha PV(1) = \$81\,287 \quad \text{دولار}$$

$$PV(4) = (10\,000 - 100 - 5800) + \alpha PV(1) = \$80\,387 \quad \text{دولار}$$

$$PV(5) = (10\,000 - 100 - 5900) + \alpha PV(1) = \$80\,287 \quad \text{دولار}$$

$$PV(6) = (10\,000 - 100 - 7000) + \alpha PV(1) = \$79\,187 \quad \text{دولار}$$

٢٠ - ٣ : حل المسألة ١٤ - ١٠ بأفق غير محدود .
المعادلة الدالة لهذه العملية تحدت في المثال ٢٠ - ١ لتكون

$$m(u) = \max \{I(u) - M(u) + \alpha m(u+1), I(0) - M(0) - R(u) + \alpha m(1)\}$$

لضمان بيع الماكينات التي عمرها 6 سنوات تحت السياسة المثلى ، إجعل $I(6) = 0$ ، $M(6) = 10^9$ ، $PV(7) = 0$. باستخدام البيانات للمسألة ١٤ - ٨ ، ٢٠ - ١ ، حل (١) بطريقة الخمس خطوات

الخطوة ١ : نختار كسياسة أولية

u	1	2	3	4	5	6
$d(u)$	اشترى	اشترى	اشترى	اشترى	اشترى	اشترى

الخطوة 2 : باستخدام نتائج المسألة ٢٠ - ١ ، نحصل على نتائج هذه السياسة

$$\begin{array}{lll} PV(1) = \$70\,400 \quad \text{دولار} & PV(2) = \$69\,700 \quad \text{دولار} & PV(3) = \$69\,000 \quad \text{دولار} \\ PV(4) = \$68\,300 \quad \text{دولار} & PV(5) = \$67\,600 \quad \text{دولار} & PV(6) = \$66\,900 \quad \text{دولار} \end{array}$$

الخطوة 3 : باستبدال $m(u)$ بـ $PV(u)$ في الطرف الأيمن من (١) نحصل على .

$$\begin{aligned} \hat{m}(1) &= \max \{I(1) - M(1) + \alpha PV(2), I(0) - M(0) - R(1) + \alpha PV(1)\} \\ &= \max \{9500 - 400 + (0.909091)(69\,700), 10\,000 - 100 - 3500 + (0.909091)(70\,400)\} \\ &= \max \{72\,464, 70\,400\} = \$72\,464 \quad \text{احفظ } d(1) = \text{عند} \\ \hat{m}(2) &= \max \{I(2) - M(2) + \alpha PV(3), I(0) - M(0) - R(2) + \alpha PV(1)\} \\ &= \max \{9200 - 800 + (0.909091)(69\,000), 10\,000 - 100 - 4200 + (0.909091)(70\,400)\} \\ &= \max \{71\,127, 69\,700\} = \$71\,127 \quad \text{احفظ } d(2) = \text{عند} \end{aligned}$$

$$\hat{m}(3) = \max \{68\,409, 69\,000\} = \$69\,000 \quad \text{عند } d(3) = \text{اشترى}$$

$$\hat{m}(4) = \max \{66\,318, 68\,100\} = \$68\,100 \quad \text{عند } d(4) = \text{اشترى}$$

$$\hat{m}(5) = \max \{63\,618, 68\,000\} = \$68\,000 \quad \text{عند } d(5) = \text{اشترى}$$

$$\hat{m}(6) = \max \{-10^9, 66\,900\} = \$66\,900 \quad \text{عند } d(6) = \text{اشترى}$$

بتجميع هذه النتائج في جدول نحصل على

u	1	2	3	4	5	6
d(u)	احتفظ	احتفظ	اشترى	اشترى	اشترى	اشترى

الخطوة 4, 5 : حيث أن هذه السياسة الجديدة تختلف عن الحالية ، لذا نأخذ السياسة الجديدة كسياسة حالية معدلة ونعود للخطوة 2 .

الخطوة 2 : باستخدام نتائج المسألة ٢٠ - ٢ نحصل للسياسة الحالية المعدلة على

$$\begin{aligned} PV(1) &= \$83\,916 \text{ دولار} & PV(2) &= \$82\,298 \text{ دولار} & PV(3) &= \$81\,287 \text{ دولار} \\ PV(4) &= \$80\,387 \text{ دولار} & PV(5) &= \$80\,287 \text{ دولار} & PV(6) &= \$79\,187 \text{ دولار} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m(1) &= \{I(1) - M(1) + \alpha PV(2), I(0) - M(0) - R(1) + \alpha PV(1)\} \text{ : الخطوة 3} \\ &= \{83\,916, 82\,687\} = \$83\,916 \text{ احتفظ } d(1) = \text{عد} \\ m(2) &= \{82\,297, 81\,987\} = \$82\,297 \text{ احتفظ } d(2) = \text{عد} \\ m(3) &= \{79\,579, 81\,287\} = \$81\,287 \text{ اشترى } d(3) = \text{عد} \\ m(4) &= \{77\,488, 80\,387\} = \$80\,387 \text{ اشترى } d(4) = \text{عد} \\ m(5) &= \{74\,788, 80\,287\} = \$80\,287 \text{ اشترى } d(5) = \text{عد} \\ m(6) &= \{-10^9, 79\,187\} = \$79\,187 \text{ اشترى } d(6) = \text{عد} \end{aligned}$$

بتجميع هذه النتائج في جدول نحصل على

u	1	2	3	4	5	6
d(u)	احتفظ	احتفظ	اشترى	اشترى	اشترى	اشترى

الخطوة 4 : حيث أن هذه السياسة الجديدة مماثلة للسياسة الحالية ، فإنها تكون المثل . ويجب الاحتفاظ بالماكينات ذات العمر سنة وستين . ويجب استبدال الماكينات الأقدم بماكينات جديدة . وحيث أن العملية تبدأ بماكينة عمرها ستين فيكون المائد الكلي للشركة مع الخصم تحت السياسة المثل هو

$$m(2) = PV(2) = \$82\,297 \text{ دولار}$$

٢٠ - ٤ : استخدم مدخل المعادلة الدالة لإعادة حساب القيم الحالية الناتجة في المسألة ٢٠ - ٢ .

طريقة الحل هي استبدال $m(u)$ بـ $PV(u)$ في كلا الطرفين من المعادلة الدالة ، ثم بعد ذلك إيجاد الأمثلية للقرارات الناتجة من السياسة الحالية لكل حالة . وتُعطي المعادلة الدالة لهذا النموذج في المثال ٢٠ - ١ مثل :

$$(١) \quad m(u) = \max \{I(u) - M(u) + \alpha m(u+1), I(0) - M(0) - R(u) + \alpha m(1)\}$$

وتكون السياسة تحت الاعتبار هي

u	1	2	3	4	5	6
d(u)	احتفظ	احتفظ	اشترى	اشترى	اشترى	اشترى

والتعظيم في حالة قرارات الاحتفاظ يعني اختيار الحد الأول من (١) ؛ والتعظيم في حالة قرارات الشراء يعني اختيار الحد الثاني من (١) . لذلك تؤدي السياسة الحالية إلى مجموعة المعادلات :

$$\begin{aligned}
 (٢) \quad & PV(1) = I(1) - M(1) + \alpha PV(2) \\
 & PV(2) = I(2) - M(2) + \alpha PV(3) \\
 & PV(3) = I(0) - M(0) - R(3) + \alpha PV(1) \\
 & PV(4) = I(0) - M(0) - R(4) + \alpha PV(1) \\
 & PV(5) = I(0) - M(0) - R(5) + \alpha PV(1) \\
 & PV(6) = I(0) - M(0) - R(6) + \alpha PV(1)
 \end{aligned}$$

الأربع معادلات الأخيرة في (٢) مماثلة للمعادلات المستخدمة في تحديد $PV(3), \dots, PV(6)$ في المسألة ٢٠ - ٢ .
يربط المعادلتين الثانية والثالثة في (٢) نحصل على :

$$(٣) \quad PV(2) = I(2) - M(2) + \alpha[I(0) - M(0) - R(3)] + \alpha^2 PV(1)$$

التي تشابه المعادلة في $PV(2)$ في المسألة ٢٠ - ٢ . وأخيراً ، بضم المعادلة الأولى في (٢) مع (٣) نحصل على

$$PV(1) = \frac{I(1) - M(1) + \alpha[I(2) - M(2)] + \alpha^2[I(0) - M(0) - R(3)]}{1 - \alpha^3}$$

وهو التعبير عن $PV(1)$ الناتج من المسألة ٢٠ - ٢ بالضغط .

٢٠ - ■ حل المسألة ١٨ - ٤ مع الخصم والأفق غير المحدود إذا كان معدل الفائدة الفعلي في المئة سنوياً .

بمعرفة سياسة الإنتاج ، يمكن تصوير هذه المسألة في سلسلة ماركوف ، وكما نحدد في المسألة ١٨ - ■ . فإن الحالات لكل مرحلة هي المخزون الممكن في بداية كل سنة — وبالتحديد ، -2 ، -1 ، 0 أو مكوك فضاء ويمثل المخزون السالب أوامر التشغيل الغير منفذة من السنة السابقة . والقرارات الممكنة هي مستويات الإنتاج للمكوكات الجديدة ، ونحدد هذه المستويات في 2 للحالة -2 ، 1 أو 2 للحالة -1 ، 0 ، 1 أو 2 للحالة 0 ، 1 أو للحالة 1 . وتبين الاحتمالات الانتقالية والتكلفة (بالمليون دولار) المرتبطة بكل حالة وكل قرار في الجدول ٢٠ - ١ . فمثلاً ، لتحديد السطر من الجدول ، وهو الخط المناظر لمخزون 1- مكوك وقرار إنتاج مكوكين خلال العام الحالي ، مع ملاحظة أنه بمجرد أن تنفذ أحد الطلبات السابقة بمكوك واحد فسيبقى مكوك آخر مطلوب للوفاء بالاحتياج الجديد . إذا كان هذا الاحتياج هو واحد (الذي سيحدث باحتمال 0.6) فإن الحالة عند بداية الفترة التالية تكون 0 ومن ثم $p_{-1,0}(2) = 0.6$ وإذا كان الاحتياج الجديد للمكوكات هو مكوكين (الذي سيحدث باحتمال 0.4) فإن الحالة عند بداية الفترة التالية ستكون -1 ؛ ومن ثم $p_{-1,-1}(2) = 0.4$. وحيث أنه لا يمكن الوصول إلى حالات أخرى من الحالة 1- بقرار إنتاج مكوكين ، فإن كل الاحتمالات الانتقالية الأخرى ستكون صفراً . وتسمى الحالة الأولية 1- أن مكوكاً واحداً لم يسلم طبقاً لاحتياج العام الماضي ، ولذلك توقع غرامة 1.5 مليون دولار . وبضم هذه التكلفة مع تكلفة الإنتاج وهي 19 مليون دولار لتصنيع المكوكين الجدد ، ينتج عنها تكلفة سنوية 20.5 مليون دولار . لاحظ أن التكلفة السنوية محددة بالحالة والقرار ولا تعتمد على الاحتياج العشوائي .

عند $i = 0.08$ يكون معامل الخصم هو

$$\alpha = \frac{1}{1 + 0.08} = 0.92592593$$

والمعادلة الدالة هي (٢٠ - ١) وتكون الأمثلة هي تصغير، وحيث تكون | ، j تتراوح فيما بين 1،...،-2،
(ليس بين 4،...،1). نحل المسألة لاجتاد السياسة المثلى بطريقة الخمس خطوات .

جدول ۲۰ - ۱

	الحالة i	القرار d_i	الاحتمالات الانشائية $P_{ij}(d_i)$				التكلفة الخزائية	تكلفة الاتاج	تكلفة التخزين	التكلفة $C(i, d_i)$
			$j = -2$	$j = -1$	$j = 0$	$j = 1$				
1	-2	2	0.4	0.6	0	0	3.0	19	0	22
2	-1	1	0.4	0.6	0	0	1.5	10	0	11.5
3	-1	2	0	0.4	0.6	0	1.5	19	0	20.5
4	0	0	0.4	0.6	0	0	0	0	0	0
5	0	1	0	0.4	0.6	0	0	10	0	10
6	0	2	0	0	0.4	0.6	0	19	0	19
7	1	0	0	0.4	0.6	0	0	0	1.1	1.1
8	1	1	0	0	0.4	0.6	0	10	1.1	11.1

الخطوة 1 : نختار السياسة الأولى

i	-2	-1	0	1
d_i	2	2	2	0

الخطوة 2: للبيانات التي في السطور 1,3,6,7 من الجدول ٢٠ - ١ ، وهي البيانات المتعلقة بالسياسة الحالية ، تعطى (٢٠ - ٢)

$$PV(-2) = 22 + (0.92592593)[(0.4)PV(-2) + (0.6)PV(-1) + (0)PV(0) + (0)PV(1)]$$

$$PV(-1) = 20.5 + (0.92592593)[(0)PV(-2) + (0.4)PV(-1) + (0.6)PV(0) + (0)PV(1)]$$

$$PV(0) = \blacksquare + (0.92592593)[(0)PV(-2) + (0)PV(-1) + (0.4)PV(0) + (0.6)PV(1)]$$

$$PV(1) = 1.1 + (0.92592593)[(0)PV(-2) + (0.4)PV(-1) + (0.6)PV(0) + (0)PV(1)]$$

والتي تكافئ النموذج

$$(0.62962963)PV(-2) - (0.55555556)PV(-1) = 22$$

$$(0.62962963)PV(-1) - (0.55555556)PV(0) = 20.5$$

$$(0.62962963)PV(0) - (0.55555556)PV(1) = 14$$

$$-(0.37037037)PV(-1) - (0.55555556)PV(0) + PV(1) = 1.1$$

بالحل فان

$$PV(-2) = 210.57768 \quad PV(-1) = 199.05471 \quad PV(0) = 188.69533 \quad PV(1) = 179.65471$$

الخطوة 3 : باستخدام هذه القيم الحالية والبيانات من الجدول ٢٠ - ١ ، نجرى الحسابات المعروضة في جدول ٢٠ - ٢ لكل حالة i فإن أصغر قيمة محسوبة هي $m(i)$. لذلك تكون السياسة الجديدة هي

i	-2	-1	0	1
d_i	2	2	1	0

الخطوة 4, 5 : حيث أن هذه السياسة تختلف عن السابقة ، فإننا نأخذ هذه السياسة الجديدة كسياسة حالية ونعود إلى الخطوة 2 .

الخطوة 2 : للبيانات في الأسطر 1,3,5,7 في الجدول ٢٠ - ١ ، تعطى البيانات المناظرة لآخر سياسة (٢٠ - ٢)

جدول ٢٠ - ٢

الحالة i	القرار d_i	التكلفة المتوقعة مع الخصم $C(i, d_i) + \alpha \sum_{j=-2}^1 p_{ij}(d_i)PV(j)$
-2	2	$22 + (0.92592593)[(0.4)(210.57768) + (0.6)(199.05471) + (0)(188.69533) + (0)(179.65471)] = 210.578$
-1	1	$11.5 + (0.92592593)[(0.4)(210.57768) + (0.6)(199.05471) + (0)(188.69533) + (0)(179.65471)] = 200.078$
-1	2	$20.5 + (0.92592593)[(0)(210.57768) + (0.4)(199.05471) + (0.6)(188.69533) + (0)(179.65471)] = 199.055$
0	0	$0 + (0.92592593)[(0.4)(210.57768) + (0.6)(199.05471) + (0)(188.69533) + (0)(179.65471)] = 188.578$
0	1	$10 + (0.92592593)[(0)(210.57768) + (0.4)(199.05471) + (0.6)(188.69533) + (0)(179.65471)] = 188.555$
0	2	$19 + (0.92592593)[(0)(210.57768) + (0)(199.05471) + (0.4)(188.69533) + (0.6)(179.65471)] = 188.695$
1	0	$1.1 + (0.92592593)[(0)(210.57768) + (0.4)(199.05471) + (0.6)(188.69533) + (0)(179.65471)] = 179.655$
1	1	$11.1 + (0.92592593)[(0)(210.57768) + (0)(199.05471) + (0.4)(188.69533) + (0.6)(179.65471)] = 180.795$

$$PV(-2) = 22 + (0.92592593)[(0.4)PV(-2) + (0.6)PV(-1) + (0)PV(0) + (0)PV(1)]$$

$$PV(-1) = 20.5 + (0.92592593)[(0)PV(-2) + (0.4)PV(-1) + (0.6)PV(0) + (0)PV(1)]$$

$$PV(0) = 10 + (0.92592593)[(0)PV(-2) + (0.4)PV(-1) + (0.6)PV(0) + (0)PV(1)]$$

$$PV(1) = 1.1 + (0.92592593)[(0)PV(-2) + (0.4)PV(-1) + (0.6)PV(0) + (0)PV(1)]$$

والتي تكافئ النموذج

$$(0.62962963)PV(-2) - (0.55555556)PV(-1) = 22$$

$$(0.62962963)PV(-1) - (0.55555556)PV(0) = 20.5$$

$$-(0.37037037)PV(-1) + (0.44444444)PV(0) = 10$$

$$-(0.37037037)PV(-1) - (0.55555556)PV(0) + PV(1) = 1.1$$

بالحل نجد أن

$$PV(-2) = 209.64706$$

$$PV(-1) = 188.6$$

$$PV(0) = 187.5$$

$$PV(1) = 178.6$$

جدول ٢٠ - ٣

الحالة i	القرار d_i	التكلفة المتوقعة مع الخصم $C(i, d_i) + \alpha \sum_{j=-2}^1 p_j(d_i)PV(j)$
-2	2	$22 + (0.92592593)[(0.4)(209.64706) + (0.6)(198) + (0)(187.5) + (0)(178.6)] = 209.647$
-1	1	$11.5 + (0.92592593)[(0.4)(209.64706) + (0.6)(198) + (0)(187.5) + (0)(178.6)] = 199.147$
-1	2	$20.5 + (0.92592593)[(0)(209.64706) + (0.4)(198) + (0.6)(187.5) + (0)(178.6)] = 198.000$
0	0	$0 + (0.92592593)[(0.4)(209.64706) + (0.6)(198) + (0)(187.5) + (0)(178.6)] = 187.647$
0	1	$10 + (0.92592593)[(0)(209.64706) + (0.4)(198) + (0.6)(187.5) + (0)(178.6)] = 187.500$
0	2	$19 + (0.92592593)[(0)(209.64706) + (0)(198) + (0.4)(187.5) + (0.6)(178.6)] = 187.667$
1	0	$1.1 + (0.92592593)[(0)(209.64706) + (0.4)(198) + (0.6)(187.5) + (0)(178.6)] = 178.600$
1	1	$11.1 + (0.92592593)[(0)(209.64706) + (0)(198) + (0.4)(187.5) + (0.6)(178.6)] = 179.767$

الخطوة 3 : باستخدام هذه القيم الحالية ، والبيانات في الجدول ٢٠ - ١ نجرى الحسابات المبينة في الجدول ٢٠ - ٣ ويتضح أن السياسة الجديدة تكون

i	-2	-1	0	1
d_i	2	2	1	0

الخطوة 4 : حيث أن هذه السياسة مماثلة للسياسة الحالية ، فتكون مثل . ونحت هذه السياسة واجتداءً من مخزون صفر ، تكون التكلفة المتوقعة لصانعي المكوّنات هي

$$m(0) = PV(0) = 187.5 \text{ مليون دولار}$$

٢٠ - ٦ : يقوم أحد المزارعين بزرع ذرة لبيعها في السوق وتغطية احتياجات مزرعته . يختلف محصول الذرة من سنة إلى أخرى طبقاً للتوزيع الاحتمالي التالي

وحدات المحصول	■	11	12	13	14
الاحتمال	0.10	0.20	0.30	0.25	0.15

يحتاج المزارع 10 وحدات من الذرة لتغطية احتياجات المزرعة شتاءً ويستطيع تخزين حتى 12 وحدة . وأي كمية تخزن ولا تستعمل كغذاء خلال الشتاء يمكن أن تباع في الخريف التالي .

وإذا أراد أحد موزعي الأغذية أن يدفع مقدّم ثمن نظير الذرة للمزارع فإنه يدفع طبقاً للجدول التالي إذا ضمن المزارع تسليمه الذرة بعد محصول الخريف .

وحدات الذرة التعاقد عليها	■	■	2	3	4
الثمن الكلي بالدولار	■	■	900	1400	2000

إذا تعاقد المزارع على معظم المحصول لموزع الأغذية مع ترك أقل من ■ وحدات لاحتياجاته الخاصة ، فإن النقص يعرض بشراء ذرة من السوق مباشرة بسعر 700 دولار للوحدة . وأى كميات زيادة عن طاقة التخزين تباع بالسوق بسعر 300 دولار للوحدة . ويترك المزارع ما يتم بالسوق للضرورة فقط . ما هى كمية الذرة التى يتعاقد عليها المزارع لموزع الأغذية كل عام إذا أراد المزارع تعظيم الربح المتوقع مع الخصم فى المستقبل القريب بمعدل فائدة 7 فى المئة ؟

نأخذ بداية المرحلة لتكون فترة الحصاد بعد أى تعاقدات سابقة وأى عمليات تمت بالسوق مباشرة استعداداً للشتاء القادم . فى هذا الوقت فإن المزارع يكون لديه إما 11,10 أو 12 وحدة من الذرة فى المخزن ، لذلك نطلق على هذه المستويات ■ الحالات 3,2,1 على التوالى . ويكون القرار بالنسبة للمزارع هو عدد الوحدات من الذرة التى يتعاقد عليها من محصول العام القادم مع موزع الأغذية . وبين جدول ٢٠ - ٤ الاحتمالات الانتقالية والعائد السنوى المتوقع المرتبط بكل حالة وكل قرار . وعلى سبيل المثال ، لحساب السطر 4 من الجدول ٢٠ - ٤ المناظر لمستوى المخزون الحالى بمستوى 10 وحدات والقرار بالتعاقد على ■ وحدات من محصول العام التالى ، لاحظ أن هناك أربع طرق للبقاء فى الحالة 1 بعد سنة واحدة : بعد استهلاك 10 وحدات مخزنة خلال الشتاء ، يمكن : (١) حصاد 10 ويشتري 3 ، (٢) حصاد 11 ويشتري ■ ، (٣) حصاد 12 ويشتري 1 ، (٤) حصاد 13 . لذلك

$$p_{11} = 0.10 + 0.20 + 0.30 + 0.25 = 0.85$$

والطريقة الوحيدة للمزارع لبدء مرحلة بعشر وحدات والمرحلة التالية بـ 11 وحدة ، علماً بأن 10 وحدات تستهلك فى الحياة الخاصة ، ■ وحدات يجب أن تُسلم إلى موزع الغذاء ، هى أن يعطى المحصول ١٤ وحدة ■ لذلك $p_{12} = 0.15$ ولا توجد طريقة (بدون تعامل مع السوق مباشرة) للانتقال من مخزون 10 وحدات إلى مخزون 12 وحدة $p_{13} = 0$

وبسبب أن أى من الخمس احتمالات الممكنة لا تترك أى ذرة للبيع فى السوق مباشرة . فيكون العائد من التعامل المباشر مع السوق هو صفر . وحيث أن عدد 1,2,3 وحدة تشتري من السوق مباشرة طبقاً للمحصول 12,11,10 وحدة فتكون تكلفة السوق المباشرة المتوقعة هى

$$(0.10)(2100) + (0.20)(1400) + (0.30)(700) = \$700$$

لاحظ أنه ، على التقيض من المسألة ٢٠ - ٥ فإن العائد الصافى للمرحلة لا يحدد بالتفيد بالمرحلة والقرار ؛ وبدلاً من ذلك فإنه يعتمد على العائد العشوائى ويكون معامل الخصم هو

$$\beta = \frac{1}{1 + 0.07} = 0.934579$$

من الوجهة الفنية ، حيث أن كل التكلفة والعائد تحدث فى نهاية الفترة ، لذلك يجب أن نخصم بسعر خصم α قبل أن نستخدم . إذا افترضنا أن هذا قد تم - على سبيل المثال ، تكلفة السوق المباشر الحقيقية 749 دولار فإنها بعد الخصم تصبح 700 دولار - فإن الدولارات الموضحة فى الجدول ٢٠ - ٣ تكون محسومة أوتوماتيكياً بشكل مناسب .

جدول ٢٠ - ٤

الحالة i	القرار d_i	الاحتمالات الامتطالية $p_{ij}(d_i)$			الدخل من الصناد CI	الدخل من السوق المباشرة SI	تكلفة السوق المباشرة SC	الدخل المتوقع $CI + SI - SC$ $= C(i, d_i)$
		$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$				
1	1	0	0.10	0.20	0	165	0	165
2	1	1	0.30	0.30	400	45	70	375
3	1	2	0.60	0.25	900	0	280	620
4	1	3	0.85	0.15	1400	0	700	700
5	1	4	1	0	2000	0	1295	705
6	2	0	0	0.10	0	375	0	375
7	2	1	0.10	0.20	400	165	0	565
8	2	2	0.30	0.30	900	45	70	875
9	2	3	0.60	0.25	1400	0	280	1120
10	2	4	0.85	0.15	2000	0	700	1300
11	3	0	0	0	0	645	0	645
12	3	1	0	0.10	400	375	0	775
13	3	2	0.10	0.20	900	165	0	1065
14	3	3	0.30	0.30	1400	45	70	1375
15	3	4	0.60	0.25	2000	0	280	1720

الخطوة 1 : نختار السياسة الاولى

i	1	2	3
d_i	3	4	4

الخطوة 2 : بالنسبة للبيانات في السطر 15,10,4 للجدول ٢٠ - ٤ تعطى البيانات المناظرة للسياسة الحالية (٢٠ - ٢) :

$$\begin{aligned}
 PV(1) &= 700 + (0.934579)[(0.85)PV(1) + (0.15)PV(2) + (0)PV(3)] \\
 PV(2) &= 1300 + (0.934579)[(0.85)PV(1) + (0.15)PV(2) + (0)PV(3)] \\
 PV(3) &= 1720 + (0.934579)[(0.60)PV(1) + (0.25)PV(2) + (0.15)PV(3)]
 \end{aligned}$$

والتي تكاليف النموذج

$$\begin{aligned}
 (0.205607)PV(1) - (0.140187)PV(2) &= 700 \\
 -(0.794393)PV(1) + (0.859813)PV(2) &= 1300 \\
 -(0.560748)PV(1) - (0.233645)PV(2) + (0.859813)PV(3) &= 1720
 \end{aligned}$$

وحل هذه المجموعة من المعادلات هو

$$PV(1) = 11986 \text{ دولار} \quad PV(2) = 12586 \text{ دولار} \quad PV(3) = 13238 \text{ دولار}$$

جدول ٢٠ - ■

الحالة i	القرار d_i	الربح المتوقع مع الخصم $C(i, d_i) + \alpha \sum_{j=1}^3 p_j(d_i)PV(j)$
1	0	$165 + (0.934579)[(0.10)(11\ 986) + (0.20)(12\ 586) + (0.70)(13\ 238)] = 12\ 298$
1	1	$375 + (0.934579)[(0.30)(11\ 986) + (0.30)(12\ 586) + (0.40)(13\ 238)] = 12\ 213$
1	2	$620 + (0.934579)[(0.60)(11\ 986) + (0.25)(12\ 586) + (0.15)(13\ 238)] = 12\ 188$
1	3	$700 + (0.934579)[(0.85)(11\ 986) + (0.15)(12\ 586) + (0)(13\ 238)] = 11\ 980$
1	4	$705 + (0.934579)[(1)(11\ 986) + (0)(12\ 586) + (0)(13\ 238)] = 11\ 907$
2	0	$375 + (0.934579)[(0)(11\ 986) + (0.10)(12\ 586) + (0.90)(13\ 238)] = 12\ 288$
2	1	$565 + (0.934579)[(0.10)(11\ 986) + (0.20)(12\ 586) + (0.70)(13\ 238)] = 12\ 208$
2	2	$875 + (0.934579)[(0.30)(11\ 986) + (0.30)(12\ 586) + (0.40)(13\ 238)] = 12\ 713$
2	3	$1120 + (0.934579)[(0.60)(11\ 986) + (0.25)(12\ 586) + (0.15)(13\ 238)] = 12\ 888$
2	4	$1300 + (0.934579)[(0.85)(11\ 986) + (0.15)(12\ 586) + (0)(13\ 238)] = 12\ 586$
3	0	$645 + (0.934579)[(0)(11\ 986) + (0)(12\ 586) + (1)(13\ 238)] = 13\ 017$
3	1	$775 + (0.934579)[(0)(11\ 986) + (0.10)(12\ 586) + (0.90)(13\ 238)] = 13\ 086$
3	2	$1065 + (0.934579)[(0.10)(11\ 986) + (0.20)(12\ 586) + (0.70)(13\ 238)] = 13\ 153$
3	3	$1375 + (0.934579)[(0.30)(11\ 986) + (0.30)(12\ 586) + (0.40)(13\ 238)] = 13\ 213$
3	4	$1720 + (0.934579)[(0.60)(11\ 986) + (0.25)(12\ 586) + (0.15)(13\ 238)] = 13\ 238$

جدول ٢٠ - ٦

الحالة i	القرار d_i	الربح المتوقع مع الخصم $C(i, d_i) + \alpha \sum_{j=1}^3 p_j(d_i)PV(j)$
1	0	$165 + (0.934579)[(0.10)(14\ 253) + (0.20)(14\ 714) + (0.70)(15\ 294)] = 14\ 253$
1	1	$375 + (0.934579)[(0.30)(14\ 253) + (0.30)(14\ 714) + (0.40)(15\ 294)] = 14\ 214$
1	2	$620 + (0.934579)[(0.60)(14\ 253) + (0.25)(14\ 714) + (0.15)(15\ 294)] = 14\ 194$
1	3	$700 + (0.934579)[(0.85)(14\ 253) + (0.15)(14\ 714) + (0)(15\ 294)] = 14\ 085$
1	4	$705 + (0.934579)[(1)(14\ 253) + (0)(14\ 714) + (0)(15\ 294)] = 14\ 026$
2	0	$375 + (0.934579)[(0)(14\ 253) + (0.10)(14\ 714) + (0.90)(15\ 294)] = 14\ 614$
2	1	$565 + (0.934579)[(0.10)(14\ 253) + (0.20)(14\ 714) + (0.70)(15\ 294)] = 14\ 653$
2	2	$875 + (0.934579)[(0.30)(14\ 253) + (0.30)(14\ 714) + (0.40)(15\ 294)] = 14\ 714$
2	3	$1120 + (0.934579)[(0.60)(14\ 253) + (0.25)(14\ 714) + (0.15)(15\ 294)] = 14\ 694$
2	4	$1300 + (0.934579)[(0.85)(14\ 253) + (0.15)(14\ 714) + (0)(15\ 294)] = 14\ 614$
3	0	$645 + (0.934579)[(0)(14\ 253) + (0)(14\ 714) + (1)(15\ 294)] = 14\ 714$
3	1	$775 + (0.934579)[(0)(14\ 253) + (0.10)(14\ 714) + (0.90)(15\ 294)] = 15\ 014$
3	2	$1065 + (0.934579)[(0.10)(14\ 253) + (0.20)(14\ 714) + (0.70)(15\ 294)] = 15\ 153$
3	3	$1375 + (0.934579)[(0.30)(14\ 253) + (0.30)(14\ 714) + (0.40)(15\ 294)] = 15\ 214$
3	4	$1720 + (0.934579)[(0.60)(14\ 253) + (0.25)(14\ 714) + (0.15)(15\ 294)] = 15\ 294$

الخطوة 3: باستخدام هذه القيم الحالية والبيانات من الجدول ٢٠ - ■ ، نحسب الحسابات الموضحة في الجدول ٢٠ - ٥ لكل حالة i ، أكبر قيمة محسوبة هي $h(i)$ لذلك تكون السياسة الجديدة هي

i	1	2	3
d_i	0	2	4

الخطوة 4, 5: حيث أن هذه السياسة الجديدة تختلف عن السابقة فنطلق عليها ، السياسة الحالية ، ونعود إلى الخطوة 1.

الخطوة 2: للبيانات في الأسطر 8, 15 من الجدول 20 - 4 تعطى البيانات المناظرة لآخر سياسة (20 - 2):

$$PV(1) = 165 + (0.934579)[(0.10)PV(1) + (0.20)PV(2) + (0.70)PV(3)]$$

$$PV(2) = 875 + (0.934579)[(0.30)PV(1) + (0.30)PV(2) + (0.40)PV(3)]$$

$$PV(3) = 1720 + (0.934579)[(0.60)PV(1) + (0.25)PV(2) + (0.15)PV(3)]$$

حيث تكافئ النموذج

$$(0.906542)PV(1) - (0.186916)PV(2) - (0.654206)PV(3) = 165$$

$$-(0.280374)PV(1) + (0.719626)PV(2) - (0.373832)PV(3) = 875$$

$$-(0.560748)PV(1) - (0.233645)PV(2) + (0.859813)PV(3) = 1720$$

ويكون حل هذه المعادلات هو

$$PV(1) = \$14,253 \text{ دولار} \quad PV(2) = \$14,714 \text{ دولار} \quad PV(3) = \$15,294 \text{ دولار}$$

الخطوة 3: باستخدام هذه القيم الحالية والبيانات في جدول 20 - 4 نحسب الحسابات الموضحة في الجدول 20 - 6. ويتضح أن السياسة الجديدة هي

i	1	2	3
d _i	0	2	4

الخطوة 4: حيث أن هذه السياسة الأخيرة تماثل السياسة الحالية ، فإنها تكون مثلى ، وإذا دخل المزارع مرحلة بمخزون 10 وحدات من الذرة فلا يجب توقيع عقد ؛ وإذا كان المخزون 11 وحدة ؛ فإنه يوقع عقداً لوحدتين ؛ وإذا كان المخزون 12 وحدة يجب توقيع عقداً لـ 4 وحدات .

20 - 7: نحدد إحدى المتاجر الكبيرة الربح الأسبوعي من كل فرع إما عالى أو منخفض . عندما يكون الربح من أحد الأفرع عالياً في أى أسبوع فإن مدير الفرع يكون له الاختيار في الاستمرار في نفس السياسة أو إدخال سياسة جديدة . إذا استمرت السياسة الحالية فإن الربح للأسبوع التالى سيصل إلى 8000 دولار باحتمال 0.5 ، وربح منخفض 4000 باحتمال 0.5 ، بالسياسة الجديدة يصل الربح عالياً إلى 7000 دولار باحتمال 0.8 ومنخفضاً إلى 4000 دولار باحتمال 0.2 . وعندما تكون الأرباح لأى أسبوع منخفضة فإن مدير الفرع يجب أن يدخل سياسة جديدة ينتج عنها ربح عالى في الأسبوع التالى 6000 دولار باحتمال 0.4 ، وربح منخفض 3000 دولار باحتمال 0.6 . حدد السياسة الملائمة للفرع التى تعظم الربح الأسبوعي المتوقع .

نأخذ بداية المرحلة لتكون نهاية أسبوع عمل ، وذلك بعد تحديد كل الأرباح . ولكن قبل اتخاذ أى قرار حول السياسة التى ستبذل في الأسبوع التالى . وتكون الحالات الممكنة لكل مرحلة هي الأرباح العالية والمنخفضة والتي نطلق عليها الحالة 2,1 على التوالى وتكون القرارات الممكنة هي : إما الاستمرار في السياسة الحالية أو إدخال سياسة جديدة ؛ ونطلق على هذه القرارات 2,1 على التوالى . وكلا القرارين ممكنان للحالة 1 ، ولكن القرار 2 فقط هو المسموح به للحالة 2 . تعتمد الاحتمالات الانتقالية والأرباح المتوقعة على كل من الحالة والقرار ؛ وتوضح في الجدول 20 - 7

جدول ٢٠ - ٧

الحالة i	القرار d_i	الاحتمالات الانتقالية $P_{ij}(d_i)$		ربح مرتفع Π_1	ربح منخفض Π_2	الربح الاسبوعي المتوقع $C(i, d_i) = \sum_{j=1}^2 p_j \Pi_j$
		$j=1$	$j=2$			
1	1	0.5	0.5	8000	4000	$(0.5)(8000) + (0.5)(4000) = 6000$
2	1	0.8	0.2	7000	4000	$(0.8)(7000) + (0.2)(4000) = 6400$
3	2	0.4	0.6	6000	3000	$(0.4)(6000) + (0.6)(3000) = 4200$

هناك سياستين ممكنتين لهذه العملية :

i	1	2
$d_{(1)}$	1	2

i	1	2
$d_{(2)}$	2	2

نحصل على المصفوفة الانتقالية للسياسة الأولى من الأسطر 3,1 من الجدول ٢٠ - ٧ مثل

$$P_{(1)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة النهائية في $P_{(1)}$ هي

$$L_{(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{(1)}^n = \begin{bmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{bmatrix}$$

وبالتالي $X_{(1)}^* = [4/9, 5/9]$ بصرف النظر عن الحالة الأولية للعملية ويكون العائد المتوقع كل أسبوع في الحالة المستقرة هو

$$R_{(1)} = C(1, 1)x_{(1)}^* + C(2, 2)x_{(1)}^* = (6000)(\frac{4}{9}) + (4200)(\frac{5}{9}) = \$5000 \quad \text{دولار}$$

ونحصل على المصفوفة الانتقالية للسياسة الثانية من الأسطر 3,2 من الجدول ٢٠ - ٧ مثل

$$P_{(2)} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة النهائية لهذه المصفوفة الانتقالية هي

$$L_{(2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{(2)}^n = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

ومن ثم $X_{(2)}^* = [2/3, 1/3]$ ويكون الربح المتوقع لكل أسبوع في الحالة المستقرة هو

$$R_{(2)} = C(1, 2)x_{(2)}^* + C(2, 2)x_{(2)}^* = (6400)(\frac{2}{3}) + (4200)(\frac{1}{3}) = \$5666.67 \quad \text{دولار}$$

الربح الأسبوعي المتوقع للسياسة 2 أحسن من السياسة 1 ؛ لذلك فإن السياسة 2 تكون هي الأمثل . ويجب أن يدخل مدير الفرع سياسة جديدة كل أسبوع .

٢٠ - ٨ حل المسألة ٢٠ - ٧ بطريقة الست خطوات .

- الخطوة 1 : مثل السياسة الأولية $\{d_i\}$ ، أختار السياسة $\{d_{(i)}\}$ للمسألة ٢٠ - ٧ .
الخطوة 2 : نحصل على المصفوفة الانتقالية والمائد الأسبوعي المتوقع المرتبط بهذه السياسة من الأسطر 3,1 للجدول ٢٠ - ٧ مثل

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \quad C(1, 1) = 6000 \quad C(2, 2) = 4200$$

الخطوة 3 : بهذه البيانات يصبح النموذج (٢٠ - ٣)

$$w_1 + R = 6000 + (0.5)w_1 + (0.5)w_2$$

$$w_2 + R = 4200 + (0.4)w_1 + (0.6)w_2$$

بوضع $w_1 = 0$ والحل ، نحصل على $w_2 = -2000$ ، $R = 5000$ ■

جدول ٢٠ - ٨

الحالة i	القرار d_i	$C(i, d_i) + \sum_{j=1}^2 p_{ij}(d_i)w_j$
1	1	6000 + (0.5)(0) + (0.5)(-2000) = 5000
1	2	6400 + (0.8)(0) + (0.2)(-2000) = 6000
2	2	4200 + (0.4)(0) + (0.6)(-2000) = 3000

- الخطوة 4 : باستخدام هذه القيم لـ w_1 و w_2 مع البيانات من الجدول ٢٠ - ٧ نحوى عملية التعظيم الموضحة في (٢٠ - ٤) . انظر الجدول ٢٠ - ٨ الذى يبين السياسة الجديدة لتكون

i	1	2
d_i	2	2

- الخطوة 5, 6 : حيث أن هذه السياسة الأخيرة تختلف عن الحالية ، لذلك نجعل هذه السياسة هي السياسة الحالية المعدلة ونعود للخطوة 2 .

- الخطوة 2 : نحصل على المصفوفة الانتقالية والربح المتوقع لهذه السياسة الجديدة من الأسطر 3,2 للجدول ٢٠ - ٧ مثل

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \quad C(1, 2) = 6400 \quad C(2, 2) = 4200$$

الخطوة 3 : بهذه البيانات تصبح (٢٠ - ٣)

$$w_1 + R = 6400 + (0.8)w_1 + (0.2)w_2$$

$$w_2 + R = 4200 + (0.4)w_1 + (0.6)w_2$$

بوضع $w_1 = 0$ والحل ، نحصل على $w_2 = -3666.67$ ، $R = 5666.67$ ■

جدول ٢٠ - ٩

الحالة i	القرار d_i	$C(i, d_i) + \sum_{j=1}^2 p_j(d_i)w_j$
1	1	$6000 + (0.5)(0) + (0.5)(-3666.67) = 4166.67$
1	2	$6400 + (0.8)(0) + (0.2)(-3666.67) = 5666.67$
2	2	$4200 + (0.4)(0) + (0.6)(-3666.67) = 2000.00$

الخطوة 4 : باستخدام هذه القيم لـ w_1 ، w_2 مع البيانات من الجدول ٢٠ - ٧ نجد الجدول ٢٠ - ٩ .
وتكون السياسة الجديدة هي :

i	1	2
d_i	2	2

الخطوة 5 : حيث أن هذه السياسة الأخيرة تماثل السياسة الحالية فتكون هي المثلى . ويكون الربح الأسبوعي المتوقع في الحالة المستقرة لهذه السياسة هو $\pi = \$5666.67$ ويعطى من المحاولة الأخيرة للخطوة ١ .

٢٠ - ٩ حل المسألة ٢٠ - ٦ إذا كان الهدف هو تعظيم الربح المتوقع في السنة (في الحالة المستقرة) .
الخطوة 1 : نختار السياسة الأولية

i	1	2	3
d_i	0	2	4

الخطوة 2 : باستخدام البيانات في الأسطر 1, 8, 15 من الجدول ٢٠ - ٤ ، وهي البيانات المتعلقة بالسياسة الحالية نجد أن

$$P = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.20 & 0.70 \\ 0.30 & 0.30 & 0.40 \\ 0.60 & 0.25 & 0.15 \end{bmatrix} \quad C(1, 0) = 165 \quad C(2, 2) = 875 \quad C(3, 4) = 1720$$

الخطوة 3 : بهذه البيانات تصبح (٢٠ - ٣)

$$\begin{aligned} w_1 + \pi &= 165 + (0.10)w_1 + (0.20)w_2 + (0.70)w_3 \\ w_2 + R &= 875 + (0.30)w_1 + (0.30)w_2 + (0.40)w_3 \\ w_3 + \pi &= 1720 + (0.60)w_1 + (0.25)w_2 + (0.15)w_3 \end{aligned}$$

بوضع $w_1 = 0$ والحل بالنسبة للمتغيرات الأخرى نجد أن $\pi = 967.340$ ، $w_2 = 449.645$ ، $w_3 = 1017.73$

الخطوة ١٠ : باستخدام هذه القيم للمتغيرات w_1, w_2 مع البيانات في الجدول ٢٠ - ٤ نوجد الجدول ٢٠ - ١٠ وتكون السياسة .

i	1	2	3
\bar{d}_i	0	2	4

جدول ٢٠ - ١٠

الحالة i	القرار d_i	$C(i, d_i) + \sum_{j=1}^3 p_j(d_i)w_j$
1	0	$165 + (0.10)(0) + (0.20)(449.645) + (0.70)(1017.73) = 967.34$
1	1	$375 + (0.30)(0) + (0.30)(449.645) + (0.40)(1017.73) = 916.99$
1	2	$620 + (0.60)(0) + (0.25)(449.645) + (0.15)(1017.73) = 885.07$
1	3	$700 + (0.85)(0) + (0.15)(449.645) + (0)(1017.73) = 767.45$
1	4	$705 + (1)(0) + (0)(449.645) + (0)(1017.73) = 705.00$
2	0	$375 + (0)(0) + (0.10)(449.645) + (0.90)(1017.73) = 1335.92$
2	1	$565 + (0.10)(0) + (0.20)(449.645) + (0.70)(1017.73) = 1367.34$
2	2	$875 + (0.30)(0) + (0.30)(449.645) + (0.40)(1017.73) = 1416.99$
2	3	$1120 + (0.60)(0) + (0.25)(449.645) + (0.15)(1017.73) = 1385.07$
2	4	$1300 + (0.85)(0) + (0.15)(449.645) + (0)(1017.73) = 1367.45$
3	0	$645 + (0)(0) + (0)(449.645) + (1)(1017.73) = 1662.73$
3	1	$775 + (0)(0) + (0.10)(449.645) + (0.90)(1017.73) = 1735.92$
3	2	$1065 + (0.10)(0) + (0.20)(449.645) + (0.70)(1017.73) = 1867.34$
3	3	$1375 + (0.30)(0) + (0.30)(449.645) + (0.40)(1017.73) = 1916.99$
3	4	$1720 + (0.60)(0) + (0.25)(449.645) + (0.15)(1017.73) = 1985.07$

الخطوة 5 : حيث أن هذه السياسة تماثل السياسة الحالية ، فتكون السياسة المثل ، بربع سنوي متوقع معطى في الخطوة 3 دولار $\$967.34 =$ وبالتطابق ، فإن هذه السياسة المثل تماثل السياسة التي حصلنا عليها في المسألة ٢٠ - ٦ ، حيث يكون الربح المتوقع أكبر ما يمكن . وعموماً ، فإن الأهداف المختلفة ينتج عنها سياسات مثل مختلفة .

٢٠ - ١٠ باستخدام بيانات المسألة ٢٠ - ٧ ، حدد w_1 للأسابيع الأولى ($n = 1, 2, 3, \dots$) تحت السياسة

كما هو واضح في المسألة ٢٠ - ٧ فإن المصفوفة الانتقالية للسياسة المعطاة

$$P = P_{(1)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

وتكون القوى المتتالية في P هي

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.55 \\ 0.44 & 0.56 \end{bmatrix} \quad P^3 = \begin{bmatrix} 0.445 & 0.555 \\ 0.444 & 0.556 \end{bmatrix} \quad P^4 = \begin{bmatrix} 0.4445 & 0.5555 \\ 0.4444 & 0.5556 \end{bmatrix}$$

$$P^5 = \begin{bmatrix} 0.44445 & 0.55555 \\ 0.44444 & 0.55556 \end{bmatrix} \quad \dots$$

والتي تقترب من

$$L = \begin{bmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{bmatrix}$$

ويكون الربح المتوقع في الأسبوع في الحالة المستقرة

$$\pi = (6000)(\frac{1}{5}) + (4200)(\frac{4}{5}) = \$5000$$

وإذا بدأت العملية بالحالة 1 ، فإن $X^{(0)} = [1, 0]$ ، يتبع ذلك من (١٩ - ١) أن

$$X^{(n)} = X^{(0)}P^n = [1, 0] \begin{bmatrix} p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} \\ p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} \end{bmatrix} = [p_{11}^{(n)}, p_{12}^{(n)}]$$

عند $n = 0, 1, 2, \dots$ حيث نعرف $p_{11}^{(0)} = 1, p_{12}^{(0)} = 0$. ويكون العائد المتوقع للأسبوع رقم $(n = 1, 2, 3, \dots)$

$$C(1, 1)x_1^{(n-1)} + C(2, 2)x_2^{(n-1)} = 6000p_{11}^{(n-1)} + 4200p_{12}^{(n-1)} \quad \text{هو}$$

وحيث أن العائد المتوقع للأسابيع الأولى ، هو العائد المتوقع للأسابيع $n-1$ مضافاً إليه العائد المتوقع للأسبوع رقم n عند $n = 1, 2, 3, \dots$ ، فنحصل على

$$(1) \quad w_n(1) = w_{n-1}(1) + 6000p_{11}^{(n-1)} + 4200p_{12}^{(n-1)}$$

حيث $w_0(1) = 0$. من (١) نوجد الجدول ٢٠ - ١١ . وبين العمود الأخير من الجدول أن w_1 تقرب من 1111.11 . بدقة عشرين عشريين = 1111.11 لكل رقم n الأكبر من 5 .

جدول ٢٠ - ١١

n	$p_{11}^{(n-1)}$	$p_{12}^{(n-1)}$	$6000p_{11}^{(n-1)} + 4200p_{12}^{(n-1)}$	$w_{n-1}(1)$	$w_n(1)$	nR	$w_1 = w_n(1) - nR$
1	1	0	6000	0	6000	5000	1000
2	0.5	0.5	5100	6000	11100	10000	1100
3	0.45	0.55	5010	11100	16110	15000	1110
4	0.445	0.555	5001	16110	21111	20000	1111
5	0.4445	0.5555	5000.1	21111	26111.1	25000	1111.1
6	0.44445	0.55555	5000.01	26111.1	31111.11	30000	1111.11
7	0.444445	0.555555	5000.001	31111.11	36111.111	35000	1111.111
8	0.4444445	0.5555555	5000.0001	36111.111	41111.1111	40000	1111.1111

٢٠ - ١١ اشتق (٢٠ - ٣)

دع $P = [p_{ij}(d_i)]$ لتكون المصفوفة الانتقالية لعنبة قرار ماركوف بأفق غير محدود ، في ظل السياسة $\{d_i\}$. والعائد المتوقع بدون خصم للعملية خلال فترات n ، إذا بدأت العملية بالحالة i هو العائد المتوقع من الفترة الأولى $C(i, d_i)$ ، مضافاً إليه العائد المتوقع من الفترات $n-1$ الباقية :

$$(1) \quad w_n(i) = C(i, d_i) + \sum_{j=1}^N p_{ij}(d_i) w_{n-1}(j)$$

بطرح

$$nR = R + \sum_{j=1}^N (n-1)R p_{ij}(d_i)$$

$$w_n(i) - nR = C(i, d_i) + \sum_{j=1}^N p_{ij}(d_i) w_{n-1}(j) - R - \sum_{j=1}^N (n-1)R p_{ij}(d_i) \quad \text{من (١) نحصل على}$$

$$(٢) \quad [w_n(i) - nR] + R = C(i, d_i) + \sum_{j=1}^n p_{ij}(d_i)[w_{n-1}(j) - (n-1)R] \quad \text{أو}$$

وحيث أن $w_1 = w_n(i) - nR$ وحيث أن :

$$w_j = w_n(j) - nR \approx w_{n-1}(j) - (n-1)R$$

إذا كانت n كبيرة (أنظر المسألة ٢٠ - ١٠) ، فتكون (٢) مكافئة لـ (٢ - ٢٠) لكل قيم $i (i = 1, 2, \dots, N)$.

٢٠ - ١٢ بين أنه إذا كانت $R^*, w_1^*, w_2^*, \dots, w_N^*$ هي حل النموذج (٢ - ٢٠) ويكون كذلك أيضاً $w_1^* + k, w_2^* + k, \dots, w_N^* + k, R^*$ ، لأي ثابت k .

$$\begin{aligned} [(w_1^* + k) + R^*] - \left[C(i, d_i) + \sum_{j=1}^N p_{ij}(d_i)(w_j^* + k) \right] &= [(w_1^* + k) + R^*] - \left[C(i, d_i) + \sum_{j=1}^N p_{ij}(d_i)w_j^* + k \right] \\ &= [w_1^* + R^*] - \left[C(i, d_i) + \sum_{j=1}^N p_{ij}(d_i)w_j^* \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

اختيار $k = -w_1^*$ يحقق جعل w_1 مساوية للصفر في الخطوة 3 في طريقة الست خطوات . وحقيقة أن w_1 ومن ثم $w_n(i)$ تحدد فقط إلى حد ثابت يضاف k ليس له معنى إقتصادى بالنسبة للهدف . كونه يكافئ تماماً عائد ثابت إضافي k دولار بالنسبة لمتخذ القرار قبل أن تبدأ العملية . وهذا يمكن ألا يكون له أى تأثير على السياسة المثلى [لاحظ أن الأمثلة في (٢٠ - ٤) ليست متأثرة بإحلال $w_j = w_j + k$ أو أى تأثير على العائد الأمثل للفترة في الحالة المستقرة (حيث توزع k دولار على فترات لانهائية) .

مسائل مكملية

Supplementary Problems

٢٠ - ١٣ يعطى العائد p (بالدولار) الذى يتسلمه مزارع دواجن من كل دجاجة ترسل إلى السوق هو

$$P = 1 - (0.9)^{N^2}$$

حيث تمثل N عمر الدجاجة بالأسبوع . وترسل الدواجن إلى السوق مرة واحدة في نهاية كل الأسبوع . ويحل محلها كفايت مولودة حديثاً من التفريخ . وليس هناك سوق للكفايت التي عمرها أقل من أسبوع واحد . بين أنه ليس من الربح ، أن يحتفظ المزارع بالدجاج لأكثر من خمسة أسابيع ، ثم حدد أحسن عمر لتسويقه ، إذا كان هدف المزارع هو تعظيم الربح الكلى مع الخصم بمعدل فائدة فعل \square في المئة كل سنة .

٢٠ - ١٤ تحدد إحدى المؤسسات الكبرى \square وحدة من التفرود كل سنة لتمويل أعمال الخير ، توزع بواسطة مدير المؤسسة في صورة معونات (بالوحدة) على المنظمات . وحيث أن المعونات الكبيرة تحقق أعمال خير أكثر للمؤسسة من المعونات الصغيرة فإن رئيس المؤسسة لا يحتاج إلى توزيع المعونات سنوياً ، بل يحتفظ بالوحدات النقدية لسنة واحدة أو أكثر لتجميع الأموال اللازمة للمعونات الكبيرة . ومع ذلك لا تسمح سياسة المؤسسة أن تزيد ميزانية أعمال الخير عن خمس وحدات نقدية \square حيث إنه عند هذا المستوى فإن هذه الأموال تحتاج إلى مصروفات أخرى من داخل قطاعات المؤسسة . حدد سياسة المعونات التي تعظم قيمة أعمال الخير مع الخصم بمعدل فائدة \square في المئة سنوياً ، إذا كان العائد من كل معونة كالتالى .

قيمة المعونة بالوحدة	0	1	2	3	4	5
قيمة اعمال الخير بالوحدة	0	1	2.1	3.3	4.5	5.6

٢٠ - ١٥ : تكلف إحدى الماكينات 7000 دولار وهي جديدة . وطبقاً لسياسة الشركة فلا يحتفظ بها لأكثر من سنتين . في بداية كل سنة يجب أن يتخذ قرار ما إذا كان الاحتفاظ بالماكينة الحالية (إذا لم تكن قديمة جداً) أو شراء ماكينة أخرى ، أو تأجير ماكينة جديدة . ويكون التأجير لمدة سنتين ، ومع ذلك يمكن إنهاؤه بعد سنة واحدة بدفع 700 دولار غرامة . وتعتمد مصروفات التشغيل ، وثمان إعادة البيع ، ومصروفات التأجير للماكينة على عمرها ، كما في الجدول ٢٠ - ١٢ .

جدول ٢٠ - ١٢

	العمر		
	0	1	2
مصروفات التشغيل	\$500	1000	...
اعادة البيع	...	4500	4000
مصروفات التأجير	1700	1600	...

الماكينات المؤجرة ليس لها ثمن إعادة بيع حيث أن شركة التأجير تمتلكها . حدد سياسة إحلال للماكينات التي تجعل التكلفة الكلية مع الخصم أقل ما يمكن بأفق غير محدود ، بمعدل فائدة 7.5 في المئة سنوياً .

٢٠ - ١٦ : إثبت أن النموذج (٢٠ - ٢) هو فقط الذي يحدد $PV(1), PV(2), \dots, PV(N)$

٢٠ - ١٧ : حدد $PV(i)$ لكل حالة i من العملية الغير محدودة الموضحة في المسألة ٢٠ - ٦ في ظل السياسة

i	1	2	3
d_i	0	1	2

٢٠ - ١٨ : طبق محاولة واحدة من الطريقة ذات الخمس خطوات على المسألة ٢٠ - ٦ باستخدام السياسة الأولية المعطاة في المسألة ٢٠ - ١٧ . ما هي السياسة المعدلة الناتجة ؟

٢٠ - ١٩ : تقدر إحدى ماكينات زجاجات اللبن البلاستيك في نهاية كل ووردية بأنها كانت في ظروف تشغيل جيدة (الحالة ١) في ظروف تشغيل مقبولة (الحالة ٢) ، في ظروف تشغيل رديئة (الحالة ٣) ، ونحسب الأجرة بناءً على نسبة الزجاجات الغير مستعملة التي صنعت أثناء الوردية . يمكن إعادة ضبط الماكينة بين الورديات بتكلفة 50 دولار ، حيث تبدأ الوردية التالية بالحالة ١ . واحتمال أن تظل الماكينة على الحالة ١ من بداية الوردية حتى نهايتها تعطى بالجدول التالي :

i	1	2	3
p_{ii}	0.8	0.5	1

وإذا لم تبقى الماكينة في حالة محددة « فإنها تسوء إلى الحالة التالية . والتكلفة المتوقعة للزجاجات الغير مستعملة للوردية الكاملة تكون دالة في حالة الماكينة في بداية المرحلة .

الحالة	1	2	3
التكلفة المتوقعة	\$10	\$40	\$100

حدد سياسة مثلى لضبط الماكينة تجعل تكلفة الضبط المتوقعة أقل ما يمكن بأفق غير محدود ، علماً بأن $\alpha = 0.95$

٢٠ - ٢٠ يطلب أحد محلات قطع غيار السيارات شكامانات سيارات كل أسبوع ويتسلمها مساء كل يوم سبت للبيع في الأسبوع التالي . وعند طلب الشكامانات تكون تكلفة النقل 30 دولاراً ، بصرف النظر عن العدد ، وإذا لم تطلب شكامانات فإنه لا تكون هناك تكلفة تسليم . وتحدد المساحة المتاحة لطاقة المحل بتخزين أربعة شكامانات فقط . وتقدر تكلفة التخزين لكل شكامان لم يُباع بـ 9 دولارات في الأسبوع ، والاحتياج من الشكامانات عشوائياً بالتوزيع الاحتمالي التالي

الاحتياج الاسبوعي	0	1	2	3
الاحتمال	0.3	0.4	0.2	0.1

ويخسر المخزن 23 دولار إذا طلب أحد العملاء شكاماناً ولم يكن موجوداً في المخزن . حدد سياسة الطلب المثلى للمخزن التي تجعل التكلفة المتوقعة مع الخصم أقل ما يمكن بالأفق الغير محدود ، إذا كانت $\alpha = 0.98$

٢٠ - ٢١ طبق محاولة واحدة لطريقة الست خطوات لتعظيم العائد المتوقع في السنة للعملية المغطاة بالمسألة ٢٠ - ٦ باستخدام السياسة الأولية المغطاة في المسألة ٢٠ - ١٧ . ما هي السياسة المعدلة ؟

٢٠ - ٢٢ حل المسألة ٢٠ - ٢٠ إذا كان الهدف هو تصغير التكلفة الأسبوعية المتوقعة إلى أقل ما يمكن .

٢٠ - ٢٣ ينشر تقييم أحد برامج التليفزيون أسبوعياً ويستخدم هذا التقييم في وضع رسوم الاعلانات للأسبوع التالي طبقاً للجدول التالي :

التقييم بالنقط	15	16	17	18	19
رسوم الاعلان بالوحدة	10	11	12	14	16

وأى برنامج يُقَم بأقل من 15 نقطة يمحذف من شبكة البرامج ويستبدل ببرنامج جديد « حيث يتوقع أن تحقق مبدئياً 17 نقطة . ولم يحقق أى برنامج أكثر من 19 نقطة . وفي كل أسبوع قد لا تفعل الإدارة أى شيء للبرنامج (بدون تكلفة) أو تعطية درجة إضافية (بتكلفة 0.7 نقطة) . ويعطى جدول ٢٠ - ١٣ و ٢٠ - ١٤ التوزيع الاحتمالي لرسوم الأسابيع التالية المناظر للنقطتين على التوالي .

جدول ٢٠ - ١٣

آخر رسوم	15	16	17	18	19
احتمال ابقاء الرسوم	0.4	0.5	0.6	0.8	0.9
احتمال فقد نقطة	0.6	0.4	0.2	0.2	0.1
احتمال فقد نقطتين	0	0.1	0.2	0	0

جدول ٢٠ - ١٤

آخر رسوم	15	16	17	18	19
احتمال كسب نقطة	0.1	0.3	0.2	0.1	0
احتمال ابقاء الرسوم	0.6	0.6	0.7	0.8	0.9
احتمال فقد نقطة	0.3	0.1	0.1	0.1	0.1

حدد سياسة اتخاذ قرار للإدارة تعظم العائد المتوقع لكل أسبوع من عروض التلفزيون التي تقدمها .

الفصل الواحد والعشرون

عمليات الميلاذ والموت لماركوف Markovian Birth-Death Processes

عمليات نمو المجتمع POPULATION GROWTH PROCESSES

« المجتمع » هو مجموعة من المواد أو الأجسام لها خاصية مشتركة . ومن أمثلة ذلك الأفراد المتأثرين بحدث معين ، والعربات المنتظرة أمام المحلات الكبيرة ، والمخزونات في متجر كبير . ويتعلق عدد كبير من عمليات القرارات بالتحليل والتحكم في نمو المجتمع .

يعرف عدد الأعضاء في مجتمع معين في الوقت t ، بـ $N(t)$ ، وحالات « عملية النمو هي القيم المختلفة التي تأخذها $N(t)$ ؛ ودائماً ما تكون قيمة لاسية صحيحة . واحتمال أن $N(t)$ تساوى عدداً صحيحاً لاسياً هو $p_n(t)$.

ويحدث « الميلاذ » عندما ينضم عضو جديد للمجتمع ؛ ويحدث « الموت » عندما يترك أحد الأعضاء المجتمع . « عملية الميلاذ المطلقة » هي العملية التي تتعامل مع الميلاذ فقط وبدون موت ؛ « عملية الموت المطلقة » هي العملية التي تتعامل مع الموت فقط بدون ميلاذ .

مثال ٢١ - ١ تعلن إحدى الكليات عن وظيفة ما بالكلية بموعد محدد لقفل باب تسليم طلبات الوظيفة المعلنة « وإذا لم يكن هناك أى إجراءات حتى انتهاء موعد قبول الطلبات ، ولا تسحب الطلبات المقدمة من المتقدمين » فإن عملية استلام الطلبات تكون عمليات ميلاذ مطلقة حتى تاريخ قفل باب التقديم . وإذا لم تقبل أى طلبات بعد قفل باب التقديم ، فإن عملية تخفيض العدد المتقدم بعد التقييم والحذف هي عملية موت مطلقة ، وإذا تمت إجراءات على الطلبات المقدمة في نفس فترة التقديم « فإن العملية تكون عملية ميلاذ وموت . وفي جميع الحالات يكون المجتمع هو مجموعة الطلبات تحت الاعتبار .

تعريف : الدالة $f(t)$ هي $o(\Delta t)$ ونقرأ « الصغيرة من Δt إذا كانت

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

وتؤول هذه الدالة إلى الصفر بمعدل أسرع من القوة الأولى لها . إذا كانت $f(t)$ ، $g(t)$ كل منهما $o(\Delta t)$ فتكون كذلك

$$f(t)g(t) \text{ و } f(t) + g(t)$$

مثال ٢١ - ٢ الدالة $f(t) = t^3$ هي $o(\Delta t)$ حيث إن

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta t)^3}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta t)^2 = 0$$

ولكن $\sin t \neq o(\Delta t)$ ، لأن

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta t)}{\Delta t} = 1 \neq 0$$

GENERALIZED MARKOVIAN BIRTH-DEATH PROCESSES

عمليات الميلاذ والموت العامة لماركوف

تكون عملية نمو المجتمع هي عملية ماركوف (انظر الفصل ١٩) إذا كانت الاحتمالات الانتقالية للانتقال من حالة إلى أخرى تعتمد على الحالة الحالية فقط ، وليس على أى خبرة سابقة للعملية أدت إلى الوصول إلى هذه الحالة الحالية . وأكثر تحديداً .. فإن عمليات الميلاذ والموت العامة لماركوف تحقق التالى :

التوزيعات الاحتمالية التى تحكم عدد الميلاذ والموت فى فترة زمنية معينة تعتمد على طول هذه الفترة « وليس على نقطة بدايتها .
احتمال ميلاد واحد بالضبط فى فترة زمنية محددة طولها Δt بمعرفة مجتمع له عدد أعضاء n فى بداية الفترة هو $\lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$ ، حيث إن λ_n يكون ثابتاً ، وربما يختلف باختلاف قيم n .
واحتمال موت واحد بالضبط فى فترة زمنية محددة طولها Δt بمعرفة مجتمع له عدد أعضاء n فى بداية الفترة هو $\mu_n \Delta t + o(\Delta t)$ ، حيث إن μ_n يكون ثابتاً ، ربما يختلف باختلاف قيم n .
واحتمال أكثر من ميلاد وأكثر من موت فى فترة زمنية طولها Δt هو فى كلتا الحالتين $o(\Delta t)$.
وهذه الخاصية تتضمن ، فى النهاية عندما تقترب Δt من الصفر « معادلات كولموجوروف للاحتمالات الحالات :

$$\begin{aligned} \frac{dp_n(t)}{dt} &= -(\lambda_n + \mu_n)p_n(t) + \mu_{n+1}p_{n+1}(t) + \lambda_{n-1}p_{n-1}(t) \quad (n = 1, 2, \dots) \\ (١ - ٢١) \quad \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \end{aligned}$$

انظر المسألة (٦ - ٢١)

LINEAR MARKOVIAN BIRTH PROCESSES عمليات الميلاذ الخطية لماركوف

عملية الميلاذ الخطية لماركوف هي عملية ميلاد مطلقه لماركوف يكون فيها احتمال الميلاذ فى فترة زمنية صغيرة متناسباً مع عدد أعضاء المجتمع الحاليين ومع طول الفترة الزمنية . بمعنى ، لكل n ، $\mu_n = 0$ ، $\lambda_n = n\lambda$ ، يكون ثابت النسبة والتناسب λ هو معدل الميلاذ « أو « معدل الوصول ، ويكون حل (١ - ٢١) للمجتمع الأولى ذا عضو واحد هو

$$p_n(t) = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda t})^{n-1} e^{-\lambda t} & (n = 1, 2, \dots) \\ 0 & (n = 0) \end{cases}$$

ويكون الحجم المتوقع للمجتمع عند الزمن t هو $E[N(t)] = e^{\lambda t}$. وإذا بدأ المجتمع بعدد أعضاء $N(0)$ ، فيكون حجمه المتوقع عند الزمن t هو

$$E[N(t)] = N(0)e^{\lambda t} \quad (٣ - ٢١)$$

(انظر المسألة ٢١ - ١)

عمليات الموت الخطية لماركوف LINEAR MARKOVIAN DEATH PROCESSES

عملية الموت الخطية لماركوف هي عملية موت مطلقة لماركوف يكون فيها احتمال الموت في فترة زمنية صغيرة متناسباً مع عدد أعضاء المجتمع الحاليين ، ومع طول الفترة الزمنية ، بمعنى لكل $\lambda_n = 0$ ، $\mu_n = n\mu$ يكون ثابت النسبة والتناسب μ هو معدل الموت . ويكون حل (٢١ - ١) للمجتمع الأول ذا $N(0)$ هو

$$(٢١ - ٤) \quad p_n(t) = \begin{cases} \binom{N(0)}{n} e^{-n\mu t} (1 - e^{-\mu t})^{N(0)-n} & [n \leq N(0)] \\ 0 & [n > N(0)] \end{cases}$$

ويكون الحجم المتوقع للمجتمع عند الزمن t هو

$$(٢١ - ٥) \quad E[N(t)] = N(0)e^{-\mu t}$$

(انظر المسألة ٢١ - ٣)

عمليات الميلاذ والموت الخطية لماركوف LINEAR MARKOVIAN BIRTH-DEATH PROCESSES

عملية الميلاذ والموت الخطية لماركوف هي عملية ميلاد وموت لماركوف يكون فيها لكل n ، $\lambda_n = n\lambda$ ، $\mu_n = n\mu$. ويكون حل (٢١ - ١) لمجتمع مبدئي له عضو واحد هو

$$(٢١ - ٦) \quad p_n(t) = \begin{cases} [1 - r(t)][1 - s(t)][s(t)]^{n-1} & (n = 1, 2, \dots) \\ r(t) & (n = 0) \end{cases}$$

حيث إن

$$r(t) = \frac{\mu [e^{(\lambda-\mu)t} - 1]}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu} \quad \text{و} \quad s(t) = \frac{\lambda [e^{(\lambda-\mu)t} - 1]}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu}$$

ويكون حجم المجتمع المتوقع في الزمن t هو $E[N(t)] = e^{(\lambda-\mu)t}$ وإذا بدأ المجتمع بعدد أعضاء $N(0)$ فإن حجمه المتوقع عند الزمن t هو

$$(٢١ - ٧) \quad E[N(t)] = N(0)e^{(\lambda-\mu)t}$$

(انظر المسألة ٢١ - ٨)

من الواضح أن عملية الميلاذ والموت الخطية تتضمن عملية الميلاذ الخطية وعملية الموت الخطية في الحالات الخاصة $\lambda = 0$ ، $\mu = 0$ على التوالي ، وخاصة هامة أخرى مقترحة في (٢١ - ٧) موضحة في الملاحظة التالية [انظر المسألة ٢١ - ٩ (ب)] .

ملاحظة : أي عملية ميلاد وموت خطية لماركوف لها البارامترات λ ، μ ومجتمع مبدئي $N(0)$ ، تكافئ مجموع عمليات تحدث في نفس الوقت ، ولكنها مستقلة عددها $N(0)$ لكل منها بارامترات λ ، μ ومجتمع مبدئي له عدد 1 .

مثال ٢١ - ٣ أوجد احتمالات الحالات $p_n^{(2)}(t)$ لعملية الميلاد والموت الخطية لماركوف ، مبتدئاً بمجتمع ■ .

لكل من العمليتين الفرعيتين المستقلتين الاحتمالات الانتقالية المعطاة في (٢١ - ٢) . وتكون العملية بالكامل في الحالة ■ إذا كانت العملية الفرعية في الحالة 0 ، والعملية الفرعية الثانية في الحالة ■ ، أو إذا كانت الأولى في الحالة ■ ، والثانية في الحالة $n-1$. أو ... لذلك فإن

$$p_n^{(2)}(t) = p_0(t)p_n(t) + p_1(t)p_{n-1}(t) + \dots + p_n(t)p_0(t) \quad (٨ - ٢١)$$

باستخدام (٢١ - ٢) في (٨ - ٢١) نجد أن

$$p_n^{(2)}(t) = \begin{cases} (n-1)(1-e^{-\lambda t})^{n-2}e^{-2\lambda t} & (n=2,3,\dots) \\ 0 & (n=0,1) \end{cases}$$

عمليات الميلاد لبواسون POISSON BIRTH PROCESSES

عملية الميلاد لبواسون هي عملية ميلاد مطلقة لماركوف يكون فيها احتمال الميلاد في أى فترة زمنية صغيرة مستقل عن حجم المجتمع ، بمعنى ■ لكل قيم ■ ، $\lambda_n = \lambda$ ، $\mu_n = 0$. وفي هذه العملية نجد أن الأعضاء الجدد للمجتمع لا يتواجدون بواسطة الأعضاء الحاليين ؛ وفضلاً عن ذلك .. فإنهم يدخلون إلى المجتمع من الخارج ، كما فعل المتقدمون بطلبات في المثال ٢١ - ١ . ويمكن للأعضاء الجدد دخول المجتمع حتى عندما تكون الحالة الحالية 0 ، وهذا هو اختلاف ملحوظ عن حالة الميلاد الخطية لماركوف .

حل (٢١ - ١) للمجتمع المبدئي 0 هو

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (٩ - ٢١)$$

وإذا بدأ المجتمع بأعضاء $N(0)$ ، فإن حل (٢١ - ١) يكون

$$p_n(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{n-N(0)} e^{-\lambda t}}{[n-N(0)]!} & [n \geq N(0)] \\ 0 & [n < N(0)] \end{cases} \quad (١٠ - ٢١)$$

ويكون حجم المجتمع المتوقع عند الزمن ■ هو

$$E[N(t)] = N(0) + \lambda t \quad (١١ - ٢١)$$

(انظر المسألة ٢١ - ٢)

تعريف : يكون للمتغير العشوائى المنفصل N توزيع بواسون ، ببارامتر $\alpha \geq 0$ ، إذا كان

$$P(N=n) = \frac{\alpha^n}{n!} e^{-\alpha} \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (١٢ - ٢١)$$

وتكون القيمة المتوقعة لـ N هي $E(N) = \alpha$

تعريف : يكون للمتغير العشوائي المتصل T توزيع أسى ببارامتر $\beta \geq 0$ إذا كان

(٢١ - ١٣)

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-\beta t} \quad (t \geq 0)$$

القيمة المتوقعة لـ T هي $E(T) = 1/\beta$

يمكن تلخيص (٢١ - ٩) ، (٢١ - ١٠) بالقول أنه في عملية الميلاد ذات التوزيع بواسون بمعدل ميلاد λ ، فإن $N(t) - N(0)$ يكون لها توزيع بواسون ببارامتر λt ، وبالإضافة إلى ذلك .. فإنه في هذه العملية يكون الزمن بين الوصول وهو الزمن بين كل ميلادين متتاليين ، يكون له توزيع أس بقيمة متوقعة $1/\lambda$ (انظر المسألة ٢١ - ٨) وبالعكس :

النظرية ٢١ - ١ : إذا كان الزمن بين الوصول له توزيع أسى بقيمة متوقعة $1/\beta$ ، فإن عدد مرات الوصول تكون عملية ميلاد ذات توزيع بواسون بمعدل ميلاد $\lambda = \beta$

عمليات الموت لبواسون POISSON DEATH PROCESSES

عملية الموت لبواسون هي عملية موت مطلقة لماركوف يكون فيها احتمال الموت في فترة زمنية صغيرة « مستقلاً عن حجم المجتمع » بمعنى « لكل قيم n » $\lambda_n = 0$ ، $\mu_n = \mu$. ويكون حل (٢١ - ١) للمجتمع المبدئي $N(0)$ هو :

$$p_n(t) = \begin{cases} 0 & [n > N(0)] \\ \frac{(\mu t)^{N(0)-n} e^{-\mu t}}{[N(0)-n]!} & [1 \leq n \leq N(0)] \\ 1 - \sum_{n=1}^{N(0)} p_n(t) & (n = 0) \end{cases}$$

(٢١ - ١٤)

انظر المسألة (٢١ - ٤)

عمليات الميلاد والموت لبواسون POISSON BIRTH-DEATH PROCESSES

عملية الميلاد والموت لبواسون هي عملية ميلاد وموت لماركوف ، يكون فيها احتمال كلاً من الميلاد والموت في أي فترة زمنية قصيرة مستقلاً عن حجم المجتمع « بمعنى « لكل قيم n » $\lambda_n = \lambda$ ، $\mu_n = \mu$. وتكون هذه العمليات أساس نظرية الصفوف التي ستشرح في الفصل ٢٣ .

مسائل محلولة

Solved Problems

٢١ - ٩ بدأت عملية ميلاد خطية لماركوف عند أحد الأعضاء الذي لاقى متوسط معدل ميلاد كل ساعة $\lambda = 2$. حدد احتمال أن يكون المجتمع أكبر من 3 بعد ساعة واحدة ، وحجم المجتمع عند ذلك الوقت .

عند $\lambda = 2$ ميلاد جديد للعضو في الساعة وعند ساعة $t = 1$ ، فإن (٢١ - ٢) تعطى

$$\begin{aligned} p_0(1) &= 0 & p_2(1) &= (1 - e^{-2})^1 e^{-2} = 0.117 \\ p_1(1) &= (1 - e^{-2})^0 e^{-2} = 0.135 & p_3(1) &= (1 - e^{-2})^2 e^{-2} = 0.101 \end{aligned}$$

لذلك احتمال أن يكون هناك أكثر من ثلاثة أعضاء بالمجتمع هو

$$1 - (0 + 0.135 + 0.117 + 0.101) = 0.647$$

ويعطى حجم المجتمع المتوقع عند هذا الزمن بـ (٢١ - ٣) كما يلي

$$E[N(1)] = 1e^{2.0} = 7.389 \text{ عضواً}$$

٢١ - ٢ حل المسألة ١ - ٢١ إذا كانت العملية هي عملية ميلاد بتوزيع بواسون .

عند $N(0) = 1$ ، ساعة $t = 1 \text{ h}$ ، $\lambda = 2$ ميلاد في الساعة ، (١٠ - ٢١) تعطى

$$\begin{aligned} p_0(1) &= 0 & p_2(1) &= \frac{2^1}{1!} e^{-2} = 0.271 \\ p_1(1) &= \frac{2^0}{0!} e^{-2} = 0.135 & p_3(1) &= \frac{2^2}{2!} e^{-2} = 0.271 \end{aligned}$$

لذلك يكون احتمال أن يكون هناك أكثر من ثلاثة أعضاء بالمجتمع هو

$$1 - (0 + 0.135 + 0.271 + 0.271) = 0.323$$

الحجم المتوقع عند هذا الزمن يُعطى بالمعادلة (٢١ - ١١) كما يلي

$$E[N(1)] = 1 + 2(1) = 3 \text{ عضواً}$$

٢١ - ٣ بدأت عملية موت خطية لماركوف عند عدد ١٠ أعضاء بمعدل موت أسبوعي $\mu = 0.6$. حدد احتمال أن يكون في المجتمع ثمانية أعضاء على الأقل بعد ثلاثة أيام ، وكذلك حجم المجتمع المتوقع عند هذا الزمن .

عند $N(0) = 10$ ، أسبوع $t = (3/7)$ ، $\mu = 0.6$ موت للعضو في الأسبوع ، فإن (٢١ - ٤) تُعطى

$$\begin{aligned} p_8(3/7) &= \binom{10}{8} e^{-8(0.6)(3/7)} (1 - e^{-0.6(3/7)})^{10-8} = 45(0.1278)(1 - 0.7733)^2 = 0.296 \\ p_9(3/7) &= \binom{10}{9} e^{-9(0.6)(3/7)} (1 - e^{-0.6(3/7)})^{10-9} = 10(0.0988)(1 - 0.7733)^1 = 0.224 \\ p_{10}(3/7) &= \binom{10}{10} e^{-10(0.6)(3/7)} (1 - e^{-0.6(3/7)})^{10-10} = 1(0.0764)(1 - 0.7733)^0 = 0.076 \end{aligned}$$

لذلك يكون احتمال أن يكون بالمجتمع ثمانية أعضاء أو أكثر هو

$$0.296 + 0.224 + 0.076 = 0.596$$

والحجم المتوقع للمجتمع عند هذا الوقت يُعطى بالمعادلة (٢١ - ٥) كما يلي :

$$E[N(3/7)] = 10e^{-0.6(3/7)} = 7.73 \text{ عضواً}$$

٢١ - ٤ حل المسألة ٢١ - ٣ إذا كانت العملية هي عملية موت لبواسون .

عند $N(0) = 10$ ، أسبوع $t = (3/7)$ ، $\mu = 0.6$ موت كل أسبوع فإن (٢١ - ١٤) تعطى

$$p_{10}(3/7) = \frac{[(0.6)(3/7)]^{10-10}}{(10-10)!} e^{-(0.6)(3/7)} = 0.7733$$

$$p_9(3/7) = \frac{[(0.6)(3/7)]^{10-9}}{(10-9)!} e^{-(0.6)(3/7)} = 0.1988$$

$$p_8(3/7) = \frac{[(0.6)(3/7)]^{10-8}}{(10-8)!} e^{-(0.6)(3/7)} = 0.0256$$

احتمال أن يكون بالمجتمع ثمانية أعضاء أو أكثر بعد ثلاثة أيام هو

$$0.0256 + 0.1988 + 0.7733 = 0.9977$$

لحساب القيمة المتوقعة لـ $N(3/7)$ ، تكون الاحتمالات الباقية للحالات عند $t = 3/7$ مطلوبة . تعطى المعادلة (٢١ - ١٤) هذه الاحتمالات لأربعة أرقام عشرية

$$p_7(3/7) = 0.0022 \quad p_6(3/7) = 0.0001 \quad p_5(3/7) = p_4(3/7) = \dots = p_0(3/7) = 0$$

لذلك

$$E[N(3/7)] = 10(0.7733) + 9(0.1988) + 8(0.0256) + 7(0.0022) + 6(0.0001) + 5(0) + \dots + 0(0) \\ = 9.74 \text{ عضواً}$$

٢١ - ■ يلاحظ أحد البيولوجيين نمو البكتريا في مزرعة ، ووجد أن كلاً من احتمال الميلاد واحتمال الموت للبكتريا تتناسب مع عدد البكتريا في المزرعة والوقت المستغرق . وفي المتوسط ، كل بكتريا تنتج بكتريا جديدة كل سبع ساعات ، وتموت كل 30 ساعة . كم بكتريا تتوقع أن توجد في المزرعة بعد أسبوع ، إذا بدأ المجتمع (المزرعة) ببكتريا واحدة ؟

باعتبار اليوم الواحد هو وحدة الزمن ، نجد أن $N(0) = 1$

$$\lambda = \frac{1}{7}(24) = 3.428571429 \quad \text{ميلاد للعضو في اليوم}$$

$$\mu = \frac{1}{30}(24) = 0.8 \quad \text{موت للعضو في اليوم ،}$$

ينتج من (٢١ - ٧) أن الحجم المتوقع للمجتمع بعد 7 أيام هو

$$E[N(7)] = 1e^{(3.428571429-0.8)(7)} = 97\,953\,164 \quad \text{بكتريا}$$

٢١ - ٦ استنتج معادلات كولوجوروف (٢١ - ١) .

يتوقف حجم المجتمع عند الزمن $t + \Delta t$ ، $N(t + \Delta t)$ بالحجم عند الزمن t ، $N(t)$ معاً مع أى تغيير (ميلاد أو / وموت) يحدث في الفترة $[t, t + \Delta t]$. لذلك عند $n \geq 1$

$$P\{N(t + \Delta t) = n\} = P\{N(t) = n\}$$

ويكون هناك ■ ميلاد ، ■ موت في الفترة $(t, t + \Delta t]$

$$P\{N(t) = n\} +$$

ويكون هناك 1 ميلاد ، 1 موت في الفترة $(t, t + \Delta t]$

$$P\{N(t) = n - 1\} +$$

ويكون هناك 1 ميلاد ، ■ موت في الفترة $(t, t + \Delta t]$

$$P\{N(t) = n + 1\} +$$

ويكون هناك 0 ميلاد ، 1 موت في الفترة $(t, t + \Delta t]$

+

تكون من أحداث تتضمن أكثر من 1 ميلاد أو أكثر من $P\{$ موت في الفترة $(t, t + \Delta t]$

أو

(١)

$$p_n(t + \Delta t) = a + b + c + d + e$$

باستخدام الاحتمالات المشروطة (انظر المسألة ١٧ - ٥) نحصل على ■ ميلاد ، ■ موت $\square = P\{N(t) = n\} \times P\{$ الفترة $\Delta t | N(t) = n\}$

بالتفرضات الأساسية : فإن احتمال ميلاد صفر في فترة زمنية Δt هو : لأقرب 1 ، $o(\Delta t)$ ، ناقص احتمال ميلاد واحد بالضبط ؟ بمعرفة الحالة ■ عند بداية الفترة ، وهذا الاحتمال الأخير يساوي $\lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$ ، لذلك فإن احتمال صفر ميلاد هو

$$1 - \lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$$

وتحت نفس الظروف يكون احتمال صفر موت هو

$$1 - \mu_n \Delta t + o(\Delta t)$$

وأكثر من ذلك يحدث الميلاد مستقلاً عن الموت . لذلك

$$\begin{aligned} \square &= p_n(t) \times [1 - \lambda_n \Delta t + o(\Delta t)][1 - \mu_n \Delta t + o(\Delta t)] \\ &= p_n(t) [1 - (\lambda_n + \mu_n) \Delta t + o(\Delta t)] \end{aligned}$$

وبالتفسير بنفس الطريقة

$$\square = o(\Delta t)$$

$$\square = p_{n-1}(t) (\lambda_{n-1} \Delta t) + o(\Delta t)$$

$$\square = p_{n+1}(t) (\mu_{n+1} \Delta t) + o(\Delta t)$$

$$\square = o(\Delta t)$$

ويصبح (١)

(٢)

$$p_n(t + \Delta t) = p_n(t) + [-(\lambda_n + \mu_n)p_n(t) + \lambda_{n-1}p_{n-1}(t) + \mu_{n+1}p_{n+1}(t)] \Delta t + o(\Delta t)$$

وبعكس $p_n(t)$ للطرف الأيسر في (٢) وبالقسمة على Δt ، وبوضع $\Delta t \rightarrow 0$ نحصل على معادلات كولموجوروف عند

نحتاج الحالة $n = 0$ اعتباراً منفصلاً ، حيث إنه ليس هناك موت ممكن عند الحالة صفر . وتنفيذ التحليل كما في أعلى نحصل على معادلة كولموجوروف الباقية .

٧ - ٢١ (أ) اشتق (٦ - ٢١) ، (ب) وعممها إلى حالة مجتمع ابتدائي اختياري

(أ) عند $\gamma u = \gamma$ ، $\mu_n = n\mu$ ، تصبح معادلات كولموجوروف (١ - ٢١)

$$(1) \quad \frac{dp_n(t)}{dt} = -n(\lambda + \mu)p_n(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t) + (n-1)\lambda p_{n-1}(t)$$

$n = 1, 2, \dots$ عند

$$(2) \quad \frac{dp_0(t)}{dt} = \mu p_1(t)$$

وأحدى الطرق لحل هذه المعادلات تكون باستبدالها بمعادلة تفاضلية جزئية واحدة لدالة إنباد الاحتمال

$$(3) \quad F(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n$$

وتكون الطريقة كالتالي . اضرب (1) في z^n ، واجمع لكل قيم n حيث إن $(n = 1, 2, \dots)$. أضف النتيجة إلى (2) حيث تعطى بعد الترتيب

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dp_n(t)}{dt} z^n = -(\lambda + \mu) \sum_{n=1}^{\infty} n p_n(t) z^n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p_{n+1}(t) z^n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) p_{n-1}(t) z^n$$

وبتفاضل (3)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dp_n(t)}{dt} z^n &= \frac{\partial F(z, t)}{\partial t} \\ \sum_{n=1}^{\infty} n p_n(t) z^n &= z \frac{\partial F(z, t)}{\partial z} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p_{n+1}(t) z^n &= \frac{\partial F(z, t)}{\partial z} \\ \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) p_{n-1}(t) z^n &= z^2 \frac{\partial F(z, t)}{\partial z} \end{aligned}$$

حيث تصبح (4)

$$(5) \quad \frac{\partial F(z, t)}{\partial t} = [-(\lambda + \mu)z + \mu + \lambda z^2] \frac{\partial F(z, t)}{\partial z}$$

وبحل هذه المعادلة التفاضلية الجزئية بفصل المتغيرات ، نجد أن أحد الحلول هو

$$e^{\mu \left(\frac{z-1}{z-\delta} \right)^{1/(\lambda-\mu)}} \quad \text{حيث إن} \quad \delta = \mu/\lambda$$

ويكون الحل العام لـ (5) هو

$$(6) \quad F(z, t) = g \left[e^{\mu \left(\frac{z-1}{z-\delta} \right)^{1/(\lambda-\mu)}} \right]$$

حيث إن g هي دالة اختيارية في متغير واحد . لإيجاد g ، نلاحظ أنه للمجتمع الابتدائي ذي المضمون الواحد $p_0(0) = 1$ ، $p_1(0) = 0$ حيث إن $(n \neq 1)$ ، لذلك

$$(7) \quad F(z, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(0) z^n = 1$$

بتطبيق هذا الشرط على (6) نحصل على

$$(8) \quad 1 = g \left[\left(\frac{z-1}{z-\delta} \right)^{1/(\lambda-\mu)} \right]$$

وضع

$$y = \left(\frac{z-1}{z-\delta} \right)^{1/(\lambda-\mu)}$$

نحصل عكسياً على

$$(9) \quad z = \frac{\delta y^{\lambda-\mu} - 1}{y^{\lambda-\mu} - 1}$$

حيث تكتب (8) كالتالي :

$$(10) \quad g(y) = \frac{\delta y^{\lambda-\mu} - 1}{y^{\lambda-\mu} - 1}$$

ونصبح (6)

$$F(z, t) = \frac{\delta \left[e^{\left(\frac{z-1}{z-\delta} \right)^{1/(\lambda-\mu)}} - 1 \right]^{\lambda-\mu} - 1}{\left[e^{\left(\frac{z-1}{z-\delta} \right)^{1/(\lambda-\mu)}} - 1 \right]^{\lambda-\mu} - 1}$$

ويمكن أن تبسط إلى

$$(11) \quad F(z, t) = \frac{\mu [e^{t(\lambda-\mu)} - 1] + z [-\mu e^{t(\lambda-\mu)} + \lambda]}{[\lambda e^{t(\lambda-\mu)} - \mu] - z \lambda [e^{t(\lambda-\mu)} - 1]}$$

وأخيراً يجب أن نمد $F(z, t)$ إلى قوى z^n ، ونحصل على معاملات z^n . ضع

$$r(t) = \frac{\mu [e^{t(\lambda-\mu)} - 1]}{\lambda e^{t(\lambda-\mu)} - \mu} \quad s(t) = \frac{\lambda [e^{t(\lambda-\mu)} - 1]}{\lambda e^{t(\lambda-\mu)} - \mu} \quad m(t) = \frac{\lambda - \mu e^{t(\lambda-\mu)}}{\lambda e^{t(\lambda-\mu)} - \mu}$$

لذلك

$$(12) \quad F(z, t) = \frac{r(t) + z m(t)}{1 - z s(t)} = [r(t) + z m(t)] \left[\frac{1}{1 - z s(t)} \right]$$

وبالنظر إلى المتتالية الهندسية

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1)$$

تعطى (12)

$$F(z, t) = r(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [r(t)s(t) + m(t)][s(t)]^{n-1} z^n$$

ويمكن بسهولة التحقق جبرياً من أن

$$r(t)s(t) + m(t) = [1 - r(t)][1 - s(t)]$$

لذلك

$$(13) \quad F(z, t) = r(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \{[1 - r(t)][1 - s(t)][s(t)]^{n-1}\} z^n$$

وتعطى المعاملات في (13) المعادلة (21 - 6)

(ب) يمكن التحقق من أن أى قوى لحل (5) هو في حد ذاته حل ، وعلى الأخص

$$\Phi(z, t) = [F(z, t)]^{N(0)}$$

حيث تعطى $F(z, t)$ بواسطة (11) ، أو (13) ، وتكون حلاً ؟ ويحقق هذا الحل الشرط المبني

$$\Phi(z, 0) = [F(z, 0)]^{N(0)} = z^{N(0)}$$

[انظر (٧)] . لذلك $\Phi(z, t)$ تكون دالة إيجاد احتمالات الحالات للمجتمع المنشأ عند $N(0)$ عضو . وتتضمن حقيقة أن Φ تساوى $F^{N(0)}$ أن المتغير العشوائى المناظر لـ Φ [أى المجتمع ذا حجم مبدئى $N(0)$] هو المعبر عنه كمجموع $N(0)$ متغير عشوائى مستقل . يناظر كل منهم F [بمعنى أن $N(0)$ مجتمع بمجموع مبدئى 1] . وهذه هى خاصية الإضافة الملاحظة سابقاً فى هذا الفصل .

٢١ - ٨ بين أن الزمن بين الوصول فى عملية الميلاد لبواسون بمعدل ميلاد λ هى ذات توزيع أسى ببارامتر λ . أرمز إلى زمن أول ميلاد بالرمز T ، كمتغير عشوائى ، يظل المجتمع بالحجم المبدئى $N(0)$ عند الزمن t إذا كانت فقط $T > t$. لذلك من (٢١ - ١٠)

$$P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - P[N(t) = N(0)] \\ = 1 - p_{N(0)}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

بمعنى ، T يكون لها التوزيع الأسى ببارامتر λ . والآن فإن التوزيع الاحتمالى الذى يحدد الميلاد فى أى فترة زمنية يكون مستقلاً عن نقطة البداية للفترة (وهو الفرض الأول لعملية الميلاد والموت العامة لماركوف) . ويكون أيضاً مستقلاً عن حالة العملية (افتراض بواسون الأساسى) . وبالتالي ، تقيس T الزمن من الآن وحتى الميلاد التالى ، وعلى الأخص إذا كان الآن هو هذا الميلاد ، فإن T تقيس زمن بين الوصول .

٢١ - ٩ تبدأ عملية ميلاد خطية لماركوف ذات معدل ميلاد λ بمجتمع $N(0) = 1$ (أ) أوجد الزمن المتوقع حتى يساوى حجم المجتمع $(n = 2, 3, \dots)$ ■ (ب) هل الزمن المحسوب فى (أ) هو نفسه الزمن الذى عنده يصبح حجم المجتمع مساوياً لـ n ؟ (أ) يصل المجتمع إلى ■ أولاً فى الفترة الزمنية المتناهية فى الصغر $[t, t+dt]$ فقط إذا كانت الحالة $n-1$ عند الزمن t ؟ [باحتمال $p_{n-1}(t)$] ، ويوجد ميلاد واحد بالضبط فى $[t, t+dt]$ باحتمال $[(n-1)\lambda dt + o(dt)]$. لذلك فإن القيمة المتوقعة المطلوبة تكون

$$\int_0^\infty p_{n-1}(t)(n-1)\lambda dt = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}$$

(تتأثر الحسابات بسهولة بضرب معادلة كولموجوروف فى dp_n/dt فى ■ ، وبالتكامل جزئياً ، باستخدام (٢١ - ٢) بالتعويض $z = 1 - e^{-\lambda t}$ لتحديد قيمة العدد الصحيح لـ $p_n(t)$ وحل معادلة الفروق الناتجة) . وهذه النتيجة لها دلالة بسيطة . وهى : أن الزمن المتوقع للميلاد الأول هو $1/\lambda$ ، والآن فإن حجم المجتمع هو 2 بمعدل ميلاد فعال 2λ ، لذلك .. فإن الزمن الإضافى المتوقع للميلاد التالى هو $1/2\lambda$. وهكذا . (ب) طبقاً لـ (٢١ - ٣) ، فإن الزمن المحسوب فى (أ) يساوى الحجم المتوقع للمجتمع ■ عندما تكون

$$e^{\lambda t} = n \quad \text{أو} \quad t = \frac{1}{\lambda} \ln n$$

وهو ليس نفس الزمن المتوقع فى (أ) عند ■ كبيرة

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \approx \ln n + \gamma$$

حيث إن $\gamma = 0.5772157 \dots$ تكون ثابت أولير . لذلك .. فإن النسبة المتوقعة للفرق بين الزمنيين تصبح صغيرة جداً .

مسائل مكملة

Supplementary Problems

٢١ - ١٠ تبدأ عملية ميلاد خطية لماركوف عند عضو واحد ، بمعدل ميلاد يومي $\lambda = 0.3$. حدد احتمال وجود مجتمع أكثر من خمسة أعضاء بعد أسبوع واحد . وما هو حجم المجتمع عند هذا الزمن ؟ وما هو حجم المجتمع المتوقع بعد أسبوع واحد إذا بدأ المجتمع بعدد 10 أعضاء .

٢١ - ١١ حل المسألة ٢١ - ١٠ إذا كانت $\lambda = 0.6$

٢١ - ١٢ حل المسألة ٢١ - ١٠ إذا كانت العملية عملية ميلاد لبواسون .

٢١ - ١٣ تبدأ عملية ميلاد خطية لماركوف بـ 15 عضواً ، بمعدل ميلاد كل ساعة $\lambda = 0.1$. ما هو الحجم المتوقع للمجتمع بعد 3 ساعات ؟

٢١ - ١٤ تقدر إحدى شركات السيارات أنه في مدى 40000 إلى 300 000 سيارة ، فإن البيع يتبع عملية ميلاد خطية لماركوف . وإذا كان في المتوسط كل 50 سيارة جديدة على الطريق يوجد مشتري جديد كل يوم ، فكم سيارة تتوقع أن تباعها الشركة في مدة 60 يوماً بعد أن تباع السيارة رقم 40000 ؟

٢١ - ١٥ توضع دعاية في الصحف لأحد المتاجر . وبناءً على الخبرة السابقة ، فإن المتجر يتوقع الوصول إلى معدل طلبين اثنين يومياً بتوزيع بواسون طول مدة بقاء الإعلان بالصحف . كم يوماً يجب أن يبقى الإعلان بالصحف إذا أراد المتجر ضمان الحصول على ستة طلبات بنسبة تأكد ■ في المئة ؟

٢١ - ١٦ في صباح كل يوم اثنين يتكون صف من العملاء عند باب أحد البنوك 15 دقيقة قبل افتتاح البنك . ويتبع نمط الوصول إلى البنك توزيع بواسون عند $\lambda = 40$ عميل في الساعة . حدد احتمال أن يكون في الصف عدد أقل من خمسة أعضاء عند افتتاح البنك ، بافترض أنه ما من أحد يترك الصف إذا وصل إليه .

٢١ - ١٧ تبدأ عملية موت خطية لماركوف بخمسة أعضاء بمعدل موت يومي $\mu = 0.1$. حدد احتمال وجود أقل من ثلاثة أعضاء في المجتمع بعد أسبوع . ما هو الزمن المتوقع للمجتمع عند هذا الوقت ؟

٢١ - ١٨ حل المسألة ٢١ - ١٧ إذا كانت $\mu = 0.2$

٢١ - ١٩ حل المسألة ٢١ - ١٧ إذا كانت العملية عملية موت لبواسون

٢١ - ٢٠ من المتبع في يوم الانتخابات السماح لأي منتخب بالتصويت إذا كان واقفاً في طابور الانتظار في الوقت الذي يقترب فيه الموعد من الانتهاء . وفي مكان انتخاب عدد ، فإن الوقت الذي يأخذه أى ناخب للتصويت يتبع توزيعاً أسياً بقيمة متوقعة 1.5 دقيقة . ما هو احتمال أخذ 12 دقيقة لاستيعاب المنتظرين للتصويت قبل موعد انتهاء العمل ، إذا كان في صف الانتظار ثمانية أشخاص ؟ (ملحوظة : تمتد النظرية ٢١ - ١ لتشمل عملية الموت لبواسون) .

٢١ - ٢١ تبدأ عملية الميلاد والموت لبواسون بعضو واحد ، بمعدل ميلاد يومي $\lambda = 0.05$ ، ومعدل موت يومي $\mu = 0.03$. حدد احتمال أن يكون المجتمع ساكناً بعد أربعة أيام .

٢١ - ٢٢ حل المسألة ٢١ - ٢١ إذا تضاعفت λ ، μ

٢١ - ٢٣ تبين أن معدل النمو لإحدى العائلات المعرضة للأخطار يتبع عملية ميلاد وموت خطية لماركوف . وفي المتوسط فإن عضوين من العائلة تنتج عضواً واحداً كل سنتين بعد الربيع . ومتوسط العمر لأي عضو من العائلة $1/2$ سنوات . ما هو الحجم المتوقع للمجتمع في 20 سنة ، إذا كان حجم المجتمع الحالي 100 عضو .

٢١ - ٢٤ استنتج (٢١ - ٩) بحل معادلات كولوجوروف أولاً في $P_0(t)$. وبعد ذلك في $P_1(t)$ ، $P_2(t)$ ، ...

٢١ - ٢٥ حل المسألة ٢١ - ٩ كعملية ميلاد لبواسون . افرض العدد الأولى للمجتمع صفراً .

٢١ - ٢٦ نمجى عمليتا ميلاد مستقلتان لبواسون . بين أن النتيجة تكون عملية ميلاد لبواسون بمعدل ميلاد هو مجموع معدل الميلاد للعمليتين .

الفصل الثاني والعشرون

نظم الصفوف Queueing Systems

مقدمة : INTRODUCTION

تتكون عملية الصفوف من عملاء يصلون إلى مكان خدمة ، و ينتظرون في صف إذا كان كل من يقدمون الخدمة مشغولين ، ثم يحصلون في النهاية على الخدمة « وأخيراً يغادرون مكان الخدمة . ونظام الصفوف هو مجموعة العملاء ، ومجموعة من مقدمي الخدمة ونظام لوصول العملاء وتقديم الخدمة لهم . يبين شكل ٢٢ - ١ نظاماً متعددة للصفوف .

ونظام الصفوف هو عملية ميلاد وموت مجتمع يتكون من عملاء ، سواء منتظري الخدمة أم الحاصلين عليها فعلاً . ويحدث الميلاد عندما يصل أحد العملاء إلى مكان الخدمة . ويحدث الموت عندما يخرج أحد العملاء من مكان الخدمة . وحالة النظام هي عدد العملاء في مكان الخدمة .

خصائص الصف : QUEUE CHARACTERISTICS

يتميز نظام الصفوف بخمسة مكونات « وهي : نمط الوصول للعملاء ، ونمط الخدمة ، وعدد من يقدمون الخدمة « وطاقة مكان الخدمة للعملاء ، والترتيب الذي يُخدم به العملاء .

أنماط الوصول : ARRIVAL PATTERNS

تُحدّد أنماط الوصول للعملاء عادة بالزمن بين الوصول ، وهو الزمن المستغرق بين وصول عميلين لمكان الخدمة . وقد يكون ثابتاً (معروفاً بالضبط) أو متغيراً عشوائياً بتوزيع احتمالي معروف . وقد يعتمد على عدد العملاء في النظام ، وقد يكون حالة مستقلة .

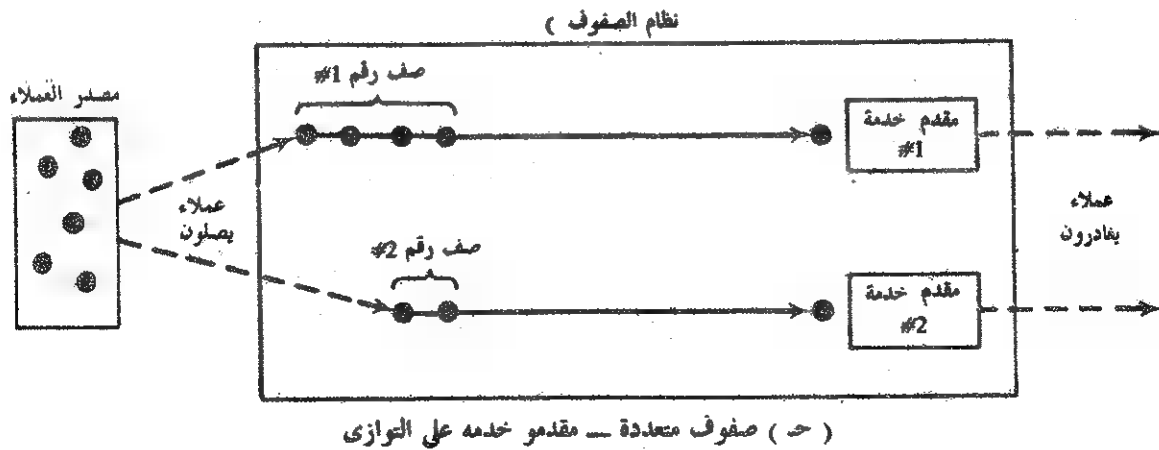
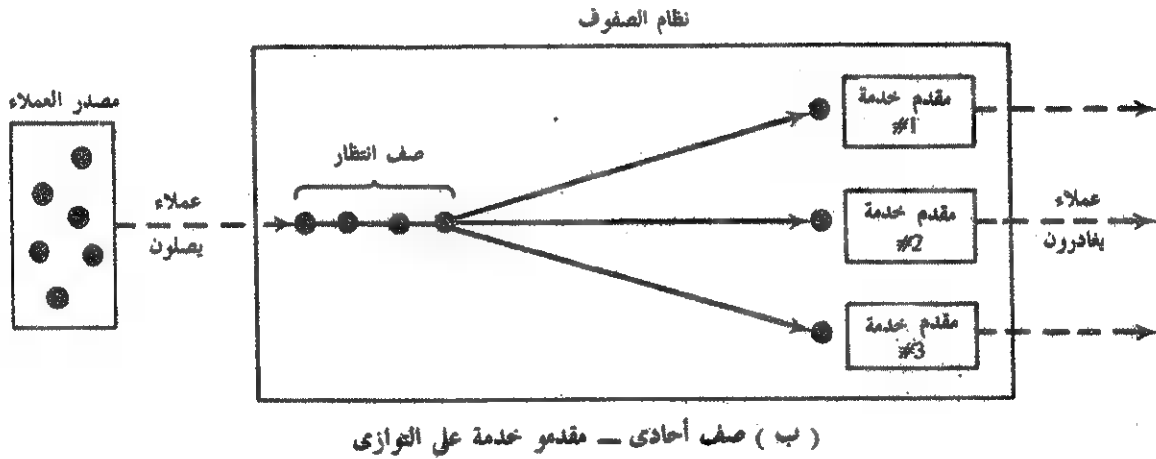
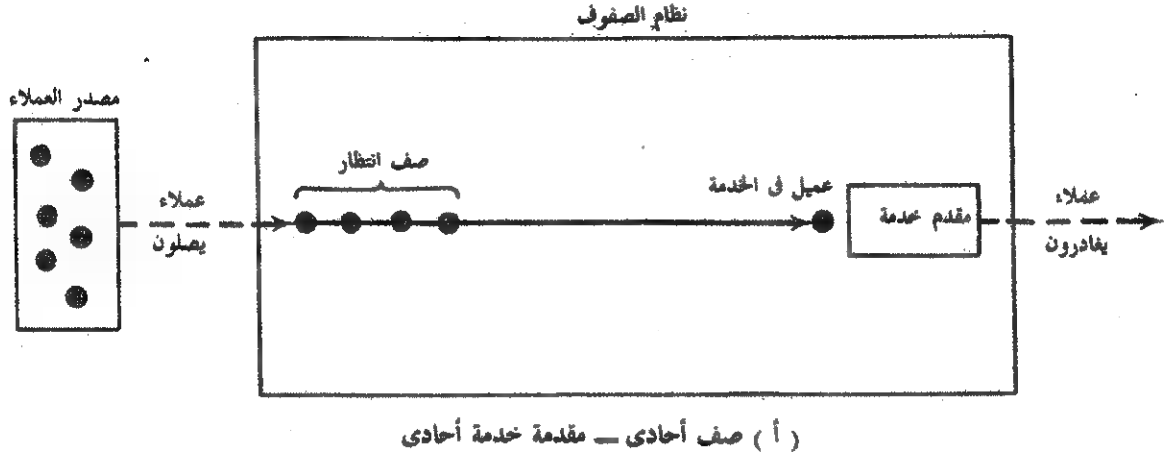
وأيضاً قد يكون وصول العملاء منفردين « أو في مجموعات ، وكذلك قد يكونوا متزاحمين ، أو يسمح لهم بتخطي بعضهم . ويحدث التزاحم عندما يرفض العميل الذي يصل الدخول إلى مكان الخدمة بسبب طول صف الانتظار . ويحدث « التخطي » عندما يترك أحد العملاء الموجودين مسبقاً بالصف مكانه بسبب طول صف الانتظار . وطالما لم ينص على العكس ، فإنه من المفترض أن يصل العملاء منفردين ، ولا يحدث تزاحم أو تخط .

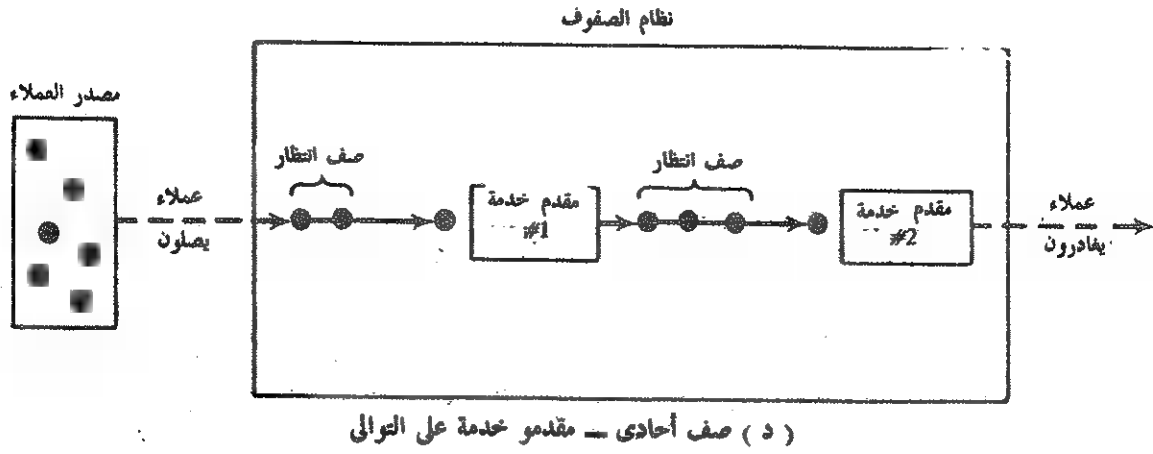
أنماط الخدمة : SERVICE PATTERNS

يُحدّد نمط الخدمة عادة بزمن الخدمة « وهو الزمن اللازم لأحد مقدمي الخدمة لتقديم الخدمة لأحد العملاء . قد يكون زمن الخدمة ثابتاً ، أو متغيراً عشوائياً ذا توزيع احتمالي معروف . وقد يعتمد على عدد العملاء الموجودين مسبقاً بمكان الخدمة ، أو قد يكون حالة مستقلة . ومن المهم تحديد ما إذا كان العميل يُخدم بواسطة مقدم خدمة واحد ، أو ، كما في شكل ٢٢ - ١ (د) ، يحتاج العميل سلسلة من مقدمي الخدمة . وإذا لم ينص على غير ذلك ، فإنه من المفترض أن مقدمي الخدمة يقدم الخدمة لعميل واحد .

طاقة النظام : SYSTEM CAPACITY

طاقة النظام هي أكبر عدد من العملاء ، سواء أكانوا في مرحلة الخدمة ، أم الانتظار ، والمسموح لهم التواجد بمكان الخدمة في نفس الوقت . عندما يصل أحد العملاء إلى مكان خدمة ممتلئ ، فلا يدخل هذا العميل إلى نظام الخدمة . ولا يسمح لهذا العميل بالانتظار خارج مكان الخدمة (حيث إن هذا يزيد فعليا من طاقة النظام) ويضطر إلى مغادرة المكان بدون تلقي الخدمة . والنظام الذي ليس له حدود لعدد العملاء المسموح بهم داخل نظام الخدمة تكون له « طاقة غير محدودة » . والنظام الذي له عدد محدود تكون له « طاقة محدودة » .





شكل ٢٢ - ١

نظم الصفوف QUEUE DISCIPLINES

نظم الصفوف هي الترتيب الذي يُخدم به العملاء . وقد تكون على أساس من يحضر أولاً يُخدم أولاً FIFO (بمعنى خدمة بترتيب الوصول) ، وقد تكون على أساس من يحضر أخيراً يُخدم أولاً LIFO (بمعنى أن العميل الذي يصل أخيراً يُخدم أولاً) . وقد تكون على أساس عشوائي ، أو على أساس أسبقيات .

رموز كندال : KENDALL'S NOTATION

تُستخدم رموز كندال لتحديد خصائص الصفوف $v/w/x/y/z$ ، حيث تمثل v نمط الوصول ، و w نمط الخدمة ، و z تحدد عدد مقدمي الخدمة ، و y طاقة النظام ، و x نظم الصفوف . وبين جدول ٢٢ - ١ رموزاً متفرعة تستخدم لثلاثة عناصر . وإذا لم تحدد أو z ، فتؤخذ ∞ أو FIFO على التوالي .

مثال ٢٢ - ١ في نظام صفوف $M/D/2/5/LIFO$. له زمن بين الوصول ذو توزيع أسي ، وزمن خدمة ثابت ، واثنين من مقدمي الخدمة ، ويحدد بعدد خمسة عملاء مسموح لهم بمكان الخدمة في الوقت الواحد ، على أساس أن آخر عميل يصل إلى مكان الخدمة هو الذي يُخدم تالياً . ونظام $D/D/1$ له كل من : زمن بين الوصول ثابت ، وزمن خدمة ثابت ، ومقدم خدمة واحد . وحيث إن طاقة النظام ونظم الصفوف غير محددين ، فيفترض أنهما غير محددين (∞) و FIFO على التوالي .

جدول ٢٢ - ١

المعنى	الرمز	خصائص الصف
ثابت توزيع أسي توزيع إلابنج $k - (k = 1, 2, \dots)$	D M E _k G	زمن بين الوصول أو زمن الخدمة
من يحضر أولاً يُخدم أولاً من يحضر أخيراً يُخدم أولاً الخدمة عشوائية نظام أسبقيات أى ترتيب آخر	FIFO LIFO SIRO PRI GD	نظام الصفوف

مسائل محلولة

Solved Problems

٢٢ - ١ حدد العملاء ، ومقدمي الخدمة ، وخصائص الصفوف الواضحة في صف واحد لعربات بمحطة غسيل عربات أوتوماتيكية .

العملاء هم العربات الداخلة للمحطة للغسيل « ومقدم الخدمة هي ماكينة الغسيل ، والصف الواحد يبين مقدم خدمة واحد أو أكثر على التوالي . وبوجه عام .. تعمل ماكينة الغسيل على أساس من يحضر أولاً يُخدم أولاً ، لذلك يكون نظام الصف من النوع FIFO . وطاقة النظام هي عدد العربات الممكن تواجدتها على أرض محطة الغسيل . إذا سُمح بانتظار العربات في الشوارع المحيطة بالمحطة للدخول إلى المحطة بعد ذلك ، فإن طاقة النظام تكون غير محدودة .

٢٢ - ٢ حدد العملاء ، ومقدمي الخدمة ، وخصائص الصف الواضحة في قسم الفواتير في متجر كبير .

العملاء هم الأثمان المقدرة بواسطة موظفي المتجر ، وتذهب هذه الأثمان بعد ذلك إلى قسم الفواتير ، ومقدمو الخدمة هم أفراد قسم الفواتير الذين ينفون إجراءات هذه الفواتير .

غالباً ما تتبع نظم الفواتير نظام LIFO، بمعنى أن آخر ثمن يصل إلى قسم الفواتير يوضع أعلى المجموعة ، وبالتالي يكون هو أول فاتورة تنتهي إجراءاتها . وبوجه عام .. فلا توجد حدود لعدد الأثمان التي تصل إلى قسم الفواتير ، وبالتالي تكون طاقة النظام غير محدودة .

٢٢ - ٣ تقوم إحدى شركات التلفزيون بالتفتيش على الجودة كل ثلاث دقائق بواسطة مهندس جودة على أساس من يحضر أولاً يُخدم أولاً ، يوجد مهندس واحد بالخدمة ، وتستغرق الخدمة أربع دقائق لكل جهاز . حدد متوسط عدد الأجهزة المنتظرة للتفتيش في أول نصف ساعة من وردية العمل ، إذا لم تكن هناك أي أجهزة منتظرة للتفتيش في بداية الوردية .

هذا النظام هو D/D/1 ، على أساس أن العملاء هم أجهزة التلفزيون ، وأن المهندس هو مقدم الخدمة الوحيد . الزمن بين الوصول هو ثلاث دقائق تماماً ، بينما زمن الخدمة هو أربع دقائق تماماً .

جدول ٢٢ - ٢

صف الانتظار	عدد العملاء في الخدمة	محاكاة الزمن بالدقيقة
...	...	0
...	#1	3
#2	#1	6
...	#2	7
#3	#2	9
...	#3	11
#4	#3	12
#5	#4	15
#5, #6	#4	18
#6	#5	19
#6, #7	#5	21
#7	#6	23
#7, #8	#6	24
#8, #9	#7	27
#8, #9, #10	#7	30

يُبين جدول ٢٢ - ٢ تاريخ النظام خلال النصف ساعة الأولى للعملية . ويحدد الجدول التوقيتات التي يحدث فيها تغيير لحالة النظام (من خلال وصول عميل أو انتهاء خدمة) . لاحظ أنه لا يوجد عملاء في الصف من الزمن 0 حتى 6 ، 7 حتى 9 ، ومن 11 إلى 12 ، بزمن إجمالي ١١ دقائق . ويوجد عميل واحد في الصف من الزمن 6 إلى 7 ، ومن ١١ إلى 12 ، ومن 18 إلى 19 ، ومن 21 إلى 23 ، ومن 24 إلى 30 بزمن إجمالي 12 دقيقة . وبالمثل يوجد عميلان في الصف في الزمن من 18 إلى 19 ، ومن ١٢ إلى 23 ، ومن 24 إلى 30 بزمن إجمالي 9 دقائق . ويوجد ثلاثة عملاء في الصف في الزمن من 30 إلى 30 بزمن إجمالي 0 دقيقة . متوسط طول الصف وهو متوسط عدد الأجهزة المنتظرة للتفتيش خلال النصف ساعة الأولى هو

$$\text{جهاز} = \frac{0(9) + 1(12) + 2(9) + 3(0)}{30}$$

٢٢ - ٤ تصل أوتوبيسات لمكان التنظيف في مجموعات من خمسة أوتوبيسات خلال كل ساعة . تُخدم الأتوبيسات بترتيب عشوائي واحد في كل مرة يحتاج كل أوتوبيس إلى 11 دقيقة لإنهاء الخدمة ، ويترك مكان الخدمة بمجرد الانتهاء من الخدمة . حدد (أ) متوسط عدد الأتوبيسات في مكان الخدمة . (ب) متوسط عدد الأتوبيسات المنتظرة للتنظيف . (ج) متوسط الزمن الذي يقضيه الأتوبيس في مكان الخدمة .

هذا النظام هو نظام ثابت ، وفيه الأتوبيسات تمثل العملاء ، وطاقتم التنظيف هو مقدم الخدمة الأحادي . يحدث الوصول مرة واحدة في الساعة ، ولكن بمجموعات ، وزمن الخدمة هو 11 دقيقة . يكون الأوتوبيس في الخدمة عندما يكون جاري تنظيفه .

يُبين جدول ٢٢ - ٣ تاريخ النظام في خلال ساعة واحدة في توقيتات الوصول والمغادرة . وحيث تُقدّم الخدمة بترتيب عشوائي ، فإن التسلسل الموضح بالجدول هو أحد التسلسلات الممكنة لتقديم الخدمة للأتوبيسات . ومع ذلك .. فإن الإحصائيات المطلوبة تكون غير معتمدة على التسلسل . وأكثر من ذلك .. وحيث إن النظام يُحدد نفسه كل ساعة ، فإن الإحصائيات التي تُحدد النظام في الساعة الأولى تتحقق في الأمد الطويل .

جدول ٢٢ - ٣

صف الانتظار	عدد العملاء في الخدمة	محاكاة الزمن بالدقيقة
#3, #1, #2, #5	#4	0
#3, #2, #5	#1	11
#3, #2	#5	١١
#2	#3	33
...	#2	44
...	...	55

(أ) يوجد خمسة عملاء في النظام في الزمن من ١١ حتى ١١ ، وأربعة عملاء من 11 حتى 22 ، وثلاثة عملاء من 22 حتى 33 ، وبعيلان من 33 حتى 44 ، وبعيل واحد من 44 حتى 55 ، حيث كل فترة 11 دقيقة . بالإضافة إلى ذلك .. لا يوجد عملاء بمكان الخدمة في الزمن من 55 حتى 60 ، أو لمدة خمس دقائق . لذلك يكون متوسط عدد العملاء بمكان الخدمة هو

$$\text{أوتوبيس} = \frac{5(11) + 4(11) + 3(11) + 2(11) + 1(11) + 0(5)}{60} = 1.75$$

(ب) متوسط عدد العملاء في صف الانتظار ، وهو عدد الأوتوبيسات المنتظرة للخدمة ، ولكن لم تبدأ الخدمة بعد هو

$$\text{أوتوبيس} = \frac{4(11) + 3(11) + 2(11) + 1(11) + 0(16)}{60} = 1.83$$

(جـ) أتوبيس واحد ، وهو رقم 4 في جدول ٢٢ - ٣ يكون في نظام الخدمة لمدة 11 دقيقة ، حيث إنه يُخدم بمجرد وصوله إلى مكان الخدمة . وأتوبيس آخر « وهو رقم 1 في الجدول ٢٢ - ٣ ينتظر 11 دقيقة قبل أن يُخدم ، حيث إنه يظل داخل النظام لمدة 22 دقيقة . وبالمثل فإن الأتوبيسات الثلاثة الأخرى تقضي 33 ، 44 ، 55 دقيقة على التوالي في النظام « لذلك يكون متوسط الزمن الذي يقضيه الأتوبيس في النظام هو

$$\frac{11 + 22 + 33 + 44 + 55}{5} = 33 \text{ دقيقة}$$

٢٢ - ٥ حاكى نظام خدمة M/D/2/3 لمدة تشغيل 45 دقيقة إذا كان متوسط الزمن بين الوصول 3 دقائق ، وإذا أخذ مقدمو الخدمة رقم 1 ، II على التوالي 5 و 7 دقيقة لتقديم الخدمة للعميل ، مع افتراض أنه لا يوجد عملاء في النظام عند البداية .

إذا كان التغير العشوائى ذو التوزيع الأسى له قيمة متوسطة 3 (قيمة متوقعة) ، فإن دالة التوزيع (٢١ - ١٣) يكون لها $1/3$ كبراميتير . باستخدام مولدات الأرقام العشوائية لإيجاد قيم (بالدقيقة والثانية) تتبع هذا التوزيع ، نحصل على . 11 : 2 ، 3 : 54 ، 1 : 26 ، 1 : 25 ، 0.05 ، 5 : 24 ، 6 : 09 ، 0 : 57 ، 5 : 57 ، 1 : 19 ، 1 : 14 ، 2 : 39 ، 0 : 52 ، 8 : 54 ، 2 : 49 ، نأخذ الأرقام المتتالية لتكون أزمنة الوصول للعملاء المتتاليين ، لذلك العميل رقم 1 يدخل النظام عند الزمن 3 دقائق ، و 54 ثانية بعد بدء العملية . والعميل رقم 2 يدخل النظام عند الزمن 2 دقيقة ، و 11 ثانية بعد العميل رقم 1 . وهكذا .

يبين جدول ٢٢ - ٤ عملية الصفوف لمدة الـ 45 دقيقة الأولى للعملية بأزمنة الوصول والمغادرة فقط . لاحظ أنه عند الزمن 9:01 يكون العميلان رقما 2 و 3 في الخدمة ، والعميل رقم ٥ في صف الانتظار ، ويصل العميل رقم 5 . وحيث إن طاقة النظام هي 3 ، فإن العميل رقم 5 لا يُسمح له بالانتظار ، ولا تُقدّم له خدمة . ونفس الموقف يحدث عند الزمن 32 : 33 .

جدول ٢٢ - ٤

زمن المحاكاة	عدد العملاء بالخدمة		صف الانتظار
	مقدم الخدمة I	مقدم الخدمة II	
00:00
3:54	#1
6:05	#1	#2	...
7:31	#1	#2	#3
8:54	#3	#2	...
8:56	#3	#2	#4
9:01	#3	#2	#4 ← #5
13:05	#3	#4	...
13:54	...	#4	...
14:25	#6	#4	...
19:25	...	#4	...
20:05
20:34	#7
21:31	#7	#8	...
22:45	#7	#8	#9
25:34	#9	#8	...
28:31	#9
28:42	#9	#10	...
30:01	#9	#10	#11
30:34	#11	#10	...
32:40	#11	#10	#12
33:32	#11	#10	#12 ← #13
35:34	#12	#10	...
35:42	#12
40:34
42:26	#14
45:00	#14

مسائل مكملية

Supplementary Problems

حدد (أ) العملاء ، (ب) مقدمو الخدمة ، (ج) خصائص صف الانتظار الواضحة في النظم الموصوفة في المسائل ٢٢ - ٦ حتى ٢٢ - ١٣ .

- ٢٢ - ٦ كافيتريا ذات شبك واحد
- ٢٢ - ٧ محل تصفيف شعر به أربعة كراسي للانتظار ، ومكان تجفيف للشعر ، بحيث يكون أكبر عدد من العملاء داخل المحل هو سبعة عملاء .
- ٢٢ - ٨ محطة تموين بنزين ذات ثلاث طلبات
- ٢٢ - ٩ طائرات تطلب التصريح بالهبوط في مطار صغير .
- ٢٢ - ١٠ عربات في جراج انتظار بالرسوم .
- ٢٢ - ١١ عمل مقدم لمجموعة كاتبي آلة كتابة .
- ٢٢ - ١٢ مجموعة مقاتلة تنتظر الانتقال إلى مكان الراحة والترفية .
- ٢٢ - ١٣ قاضي مدني يستمع إلى حالة بالمحكمة .
- ٢٢ - ١٤ يُنظم المرضى بإحدى العيادات للفحص بمعدل مريض كل خمس دقائق ، ابتداءً من الساعة 9.00 صباحاً . يأخذ الفحص 8 دقائق للاستكمال ، ويتم بواسطة طبيب واحد يُعين لهذا العمل . وعندما يكون هناك ثلاثة مرضى أو أكثر في حجرة الانتظار يعين طبيب آخر للعمل ، ويستمر كذلك حتى ينتهي صف الانتظار . عند هذه النقطة ، فإن الطبيب الثاني يعود إلى عمله السابق إلى أن يُطلب مرة أخرى .
- (أ) عند أي وقت يبدأ الطبيب الثاني عمله ، وفي أي وقت ينهي عمله لأول مرة ؟
- (ب) ما هو متوسط عدد المرضى المنتظرين بمحجرة الانتظار من الساعة التاسعة صباحاً حتى العاشرة صباحاً ؟
- (ج) ما هو عدد المرضى بالعيادة من الساعة التاسعة إلى العاشرة صباحاً ؟
- ٢٢ - ١٥ تصل بعض الأشغال إلى مكان عمل بمعدل ثلاثة أشغال في كل مرة كل 15 دقيقة . ويصمم بمكان العمل موظف واحد يأخذ 6 دقائق بالضبط لاستكمال الشغلة . والأشغال التي لا تتم بواسطة الموظف تُخزن بمكان العمل ، وتؤخذ بطريقة عشوائية ، مع افتراض أن الأشغال تصل إلى مكان العمل بمجرد أن يبدأ الموظف عمله ، وأنه لا توجد أشغال منتظرة سابقاً بمكان العمل .
- (أ) ما هو متوسط عدد الأشغال الموجودة بمكان العمل خلال الساعتين الأوليين من عمل الموظف ؟
- (ب) ما هو طول الصف بعد ١١ ساعات من الوردية ؟
- ٢٢ - ١٦ ينظم أحد أطباء تقويم الأسنان المرضى للفحص الدوري بمعدل مريض كل 15 دقيقة ، ويحدد عدد المرضى بعشرة مرضى كل يوم . ويأخذ 12 دقيقة لفحص المريض الأول . وبسبب أن المريض يتعب بسرعة ، فإن كل مريض تال يأخذ دقيقة واحدة أكثر من المريض السابق له مباشرة . حدد متوسط الزمن الذي يقضيه المريض في عيادة الطبيب ، سواء في الانتظار أم في الكشف . على افتراض أن كل مريض يصل العيادة في الوقت المخصص له بالضبط .
- ٢٢ - ١٧ كم عدد العملاء الذين لا يُسمح لهم بالدخول في نظام الخدمة $D/D/1/3$ في الساعة الأولى ؟ إذا كان العملاء يصلون كل 4 دقائق لمكان خدمته التي تُنظف إلى ١١ دقائق لكي تتم ؟ بافتراض أن أول عميل يصل إلى مكان الخدمة بمجرد فتح نظام الخدمة .

الفصل الثالث والعشرون

نظم م / م / ١ M/M/1 Systems

خصائص النظام SYSTEM CHARACTERISTICS

نظام الخدمة M/M/1 هو نظام صفوف له زمن بين الوصول بتوزيع أسي ذي بارامتر λ ، وزمن خدمة بتوزيع أسي ذي بارامتر μ وله مقدم خدمة واحد وليس له حدود لطاقة النظام ، ونظام الخدمة من النوع من يحضر أولاً يتخدم أولاً . والثابت λ هو متوسط معدل وصول العملاء ، والثابت μ هو متوسط معدل الخدمة للعملاء . وكلاهما لوحداث العملاء لكل وحدة زمن . والزمن المتوقع بين الوصول وزمن الخدمة المتوقع لعميل واحد هما $1/\lambda$ ، $1/\mu$ على التوالي .

وحيث إن الزمن بين الوصول ذي التوزيع الأسي بمتوسط $1/\lambda$ يكافئ خلال فترة زمنية τ نمط الوصول ذي توزيع بواسون بمتوسط $\lambda\tau$ (انظر النظرية ٢١ - ١) ، فإن النظام M/M/1 يطلق عليه أحادي الخدمة ، ذو الطاقة غير المحدودة ، ذات مدخلات بواسون وزمن خدمة أسي .

نموذج ماركوف MARKOVIAN MODEL

النظام M/M/1 هو عملية ميلاد وموت لبواسون (انظر الفصل ٢١) . واحتمال $p_n(t)$ أن النظام يكون فيه n عميل بالضبط ، سواء منتظري الخدمة أم في الخدمة في الزمن t يحقق معادلات كولموجوروف (٢١ - ١) عند $\lambda_n = \lambda$ ، $\mu_n = \mu$ لكل قيم n . وحل هذه المعادلات ، إذا كان ممكناً ، غير ضروري بالمرّة . وكما في الفصل ١٩ ، فإن التوزيع المحدود هو الأكثر أهمية .

حلول الحالة الساكنة (المستقرة) STEADY-STATE SOLUTIONS

احتمالات حالات الاستقرار (السكون) لنظام الصفوف هي

$$(٢٣ - ١) \quad p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

إذا وجدت نهاية . للنظام M/M/1 تُعرف « معامل الاستخدام » (أو كثافة المواصلات) كما يلي :

$$(٢٣ - ٢) \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

أي أن ρ هي عدد مرات الوصول المتوقع لكل زمن خدمة . إذا كانت $\rho < 1$ ، فإنه توجد احتمالات حالة السكون (المسألة ٢٣ - ٧) وتعطى بـ :

$$(٢٣ - ٣) \quad p_n = \rho^n (1 - \rho)$$

وإذا كانت $\rho > 1$ ، فإن مرات الوصول تكون بمعدل أسرع من تقديم الخدمة ، وبالتالي طول صف الانتظار المتوقع يزيد دون حدود . ولا تحدث حالة سكون أو استقرار . ويحدث نفس الموقف إذا كانت $\rho = 1$

مقاييس الفاعلية : MEASURES OF EFFECTIVENESS

عندما يكون النظام في حالة الاستقرار ، فإن المقاييس الهامة تكون

$L =$	متوسط عدد العملاء في النظام
$L_q =$	متوسط طول الصف
$W =$	متوسط الزمن الذي يقضيه العميل في النظام
$W_q =$	متوسط الزمن الذي يقضيه (ينتظره) العميل في الصف
$W(t) =$	احتمال أن يقضى العميل أكثر من وحدة زمنية في النظام
$W_q(t) =$	احتمال أن يقضى العميل أكثر من وحدة زمنية في الصف

والأربعة مقاييس الأولى ترتبط ببعضها في كثير من نظم الصفوف كالتالي :

$$(٤ - ٢٣) \quad W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

ومن صيغة ليتل (المسألة ٢٣ - ١٠) ، فإن

$$(٥ - ٢٣) \quad L = \bar{\lambda} W$$

$$(٦ - ٢٣) \quad L_q = \bar{\lambda} W_q$$

تنطبق صيغة زمن الانتظار (٤ - ٢٣) عندما يكون هناك زمن خدمة واحد متوقع (كما في النظام M/M/1) ، $1/\mu$ لكل العملاء . وتنطبق صيغة ليتل للنظم العامة ، على أساس أن $\bar{\lambda}$ ترمز إلى متوسط معدل وصول العملاء إلى مكان الخدمة .

للنظام M/M/1 ، فإن $\bar{\lambda} = \lambda$ ، وتكون المقاييس الستة بوضوح هي :

$$(٧ - ٢٣) \quad L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$(٨ - ٢٣) \quad L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$(٩ - ٢٣) \quad W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$(١٠ - ٢٣) \quad W_q = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

$$(١١ - ٢٣) \quad W(t) = e^{-\mu t} \quad (t \geq 0)$$

$$(١٢ - ٢٣) \quad W_q(t) = \rho e^{-\mu t} \quad (t \geq 0)$$

لاحظ من (١٢ - ٢٣) أنه بالرغم من أن الزمن المستغرق في النظام له توزيع أسى (١١ - ٢٣) ، والزمن المستغرق في الخدمة له أيضاً توزيع أسى . فإن الفرق بين هذين الزمنين « وهو الزمن المستغرق في صف الانتظار ، لا يكون ذا توزيع أسى .

مسائل محلولة

Solved Problems

- ٢٣ - ١ بين أن « معظم » قيم المتغير العشوائى ذى التوزيع الأسى تكون أصغر من القيمة المتوسطة .
إذا كان للمتغير توزيع أسى ببارامتر β ، تكون القيمة المتوسطة له هي β . من (٢١ - ١٣)

$$P(T \leq 1/\beta) = 1 - e^{-1} \approx 0.632$$

$$P(T \leq 1/2\beta) = 1 - e^{-1/2} \approx 0.393$$

لذلك من الممكن القول أن 63 في المئة من القيم تكون أصغر من المتوسط ، وبعض من الـ 63 في المئة من هذه القيم تكون أصغر من نصف المتوسط .

- ٢٣ - ٢ ناقش ما يتضمنه أن يكون كل من زمن الخدمة والزمن بين الوصول ذا توزيع أسى .
من المسألة (٢٣ - ١) نلاحظ أن أزمنة الخدمة ذات التوزيع الأسى تعنى أكثرية عدد أزمنة خدمة أقل من المتوسط ، بالاشتراك مع أزمنة خدمة طويلة قليلة العدد ، وتكون هذه هي الحالة ، مثلاً ، في البنوك عندما يضع عملاء كثيرون أموالاً بسيطة في البنك تتطلب أزمنة قليلة ، وقليل منهم يحتاج إلى إجراءات معقدة تحتاج إلى أوقات طويلة . وهذه التوزيعات لا تصور بدقة المواقف التي تكون فيها الخدمة متائلة لكل عميل ، مثل العمل على خط تجميع .

تعنى أزمنة بين الوصول ذات التوزيع الأسى أكثرية في عدد أزمنة بين الوصول الأقل من المتوسط ، مع قليل من أزمنة بين الوصول الطويلة . وتكون النتيجة هي أن عدد من العملاء يصلون في فترة زمنية قصيرة ، لذلك يخلقون صف انتظار ، تتبعه في النهاية فترة طويلة لا يصل خلالها أى عميل ، وهذا يسمح لمقدم الخدمة بتخفيض طول صف الانتظار .
كما هو مبين في المسألة (٢١ - ٨) ، فإن التوزيع الأسى تكون له خاصية ماركوف (أو أقل ذاكرة) :

$$P(T \leq a + b | T > a) = P(T \leq b)$$

عندما تقيس T أزمنة بين الوصول ، فمعنى هذا أن الزمن حتى الوصول التالي لا يعتمد على الزمن منذ آخر وصول . بالنسبة لأزمنة الخدمة ، فإن هذا يعنى أن الزمن اللازم لاستكمال الخدمة للعميل لا يمكن توقعه بمعرفة الزمن الذى قضاه العميل مسبقاً في الخدمة (بمعنى أنه لا يعتمد على ذلك) .

- ٢٣ - ٣ يستخدم أحد أقسام ملابس الرجال في أحد المحلات ترزياً لإصلاح الملابس . ويتبع عدد العملاء الذين يحتاجون لإصلاح ملابس لتوزيع بواسون بمعدل وصول 24 في الساعة . ويخدم العملاء على أساس من يحضر أولاً يخدم أولاً ، ويرغبون دائماً في انتظار الترزى لإجراء التصليلات . ويظهر أن الوقت اللازم لإصلاح ملابس العملاء يتبع توزيعاً أسياً بمتوسط دقيقتين .
(أ) ما هو متوسط عدد العملاء في غرفة إصلاح الملابس ؟
(ب) ما هو الزمن الذى يتوقعه العميل ليقضيه في غرفة الملابس ؟
(ج) ما هي النسبة المئوية من الزمن الذى يقضى فيه الترزى بدون عمل ؟
(د) ما هو احتمال أن ينتظر العميل أكثر من 10 دقائق للحصول على خدمة من الترزى ؟

هذا النظام هو نظام $M/M/1$ ، وفيه $\lambda = 24$ كل ساعة

$$\mu = \frac{1}{2} \text{ min}^{-1} = 30 \text{ h}^{-1}$$

$$\rho = 24/30 = 0.8$$

$$L = \frac{0.8}{1-0.8} = 4 \text{ عملاء} \quad (أ) \text{ من } (٧-٢٣)$$

$$W = \frac{1}{30-24} = \frac{1}{6} \text{ س} = 10 \text{ ق} \quad (ب) \text{ من } (٩-٢٣)$$

وتنتج هذه النتيجة من (٢٣ - ١١) :

$$W = \frac{1}{\lambda} L = \frac{1}{24} (4) = \frac{1}{6} \text{ ساعة}$$

(ج) يكون التزى بدون عمل فقط إذا لم يكن هناك أى عميل في غرفة إصلاح الملابس . وهذا الاحتمال يعطى بـ
(٢٣ - ٣) كالتالى :

$$p_0 = \rho^0 (1 - \rho) = 1(1 - 0.8) = 0.2$$

ويكون التزى بدون عمل 20 في المئة من الوقت .

$$I = 10 \text{ ق} \quad (د) \text{ من } (١٢-٢٣) \text{ عند } W = \frac{1}{6} \text{ س} = 10 \text{ ق}$$

$$W_q(\frac{1}{2}) = (0.8)e^{-1} = 0.2943$$

٢٣ - ٤ في النظام بالمسألة (٢٣ - ٣) حدد (أ) متوسط الانتظار لخدمة التزى لكل العملاء ، (ب) متوسط الانتظار لخدمة التزى للعملاء الذين سينتظرون كلية .

(أ) من (١٠ - ٢٣)

$$W_q = \frac{\rho}{\mu - \lambda} = \frac{0.8}{30 - 24} = 0.133 \text{ h} = 8 \text{ دقيقة}$$

(ب) ارمز إلى متوسط الانتظار المطلوب بالرمز W_q' . ونسبة العملاء الذين يصلون ولا ينتظرون هي $1 - \rho$ وهي احتمال أن أى عميل يصل يجد نظام الخدمة فارغاً - انظر المسألة ٢٣ - ٣ (ج) . ومن ثم يكون متوسط الانتظار لكل العملاء الذين يصلون هو

$$W_q = (1 - \rho)(0) + \rho W_q'$$

لذلك

$$W_q' = \frac{1}{\rho} W_q = \frac{1}{\mu - \lambda} = W = 10 \text{ دقيقة}$$

٢٣ - ٥ يعمل أحد محلات المأكولات بواسطة شخص واحد هو صاحبه . وغط الوصول للعملاء أيام السبت يتبع توزيع بواسون ، بمعدل وصول 10 أشخاص في الساعة . ويخدم العملاء بأسلوب FIFO (من يصل أولاً يخدم أولاً) ، وبسبب السمعة الحسنة للمحل . فإن العملاء يرغبون الانتظار للخدمة عندما يصلون إلى المحل . وقدر زمن تقديم الخدمة للعملاء بالتوزيع الأسى بمتوسط زمن خدمة 4 دقائق . حدد (أ) احتمال أن يكون هناك صف انتظار ، (ب) متوسط طول صف الانتظار ، (ج) الزمن المتوقع

الذى يقضيه العميل في الصف « (د) احتمال أن يقضى العميل أقل من 12 دقيقة في المحل .
هذا النظام هو M/M/1 فيه

$$\lambda = 10 \text{ س}^{-1} = \frac{1}{6} \text{ دقيقة}^{-1} \quad \mu = \frac{1}{4} \text{ دقيقة}^{-1} \quad \rho = \frac{1/6}{1/4} = \frac{2}{3}$$

(أ) احتمال وجود صف هو احتمال وجود شخصين أو أكثر في النظام . من (٢٣ - ٢) :

$$p_0 = \rho^0(1-\rho) = 1(1-\frac{2}{3}) = \frac{1}{3} \quad p_1 = \rho(1-\rho) = \frac{2}{3}(1-\frac{2}{3}) = \frac{2}{9}$$

لذلك « احتمال وجود صف هو

$$1 - p_0 - p_1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

(ب) من (٢٣ - ٨)

$$L_q = \frac{(2/3)^2}{1 - (2/3)} = \frac{4}{3} \text{ عميل}$$

(ج) من (٢٣ - ١٠)

$$W_q = \frac{2/3}{(1/4) - (1/6)} = \text{دقائق} \blacksquare$$

(د) من (٢٣ - ٤) ، (٢٣ - ١١)

$$W = 8 + 4 = 12 \text{ دقيقة}$$

$$1 - W(12) = 1 - e^{-12/12} = 1 - 0.3679 = 0.6321$$

٢٣ - ٦ حاك العملية الموضحة في المسألة ٢٣ - ٥ .

يوضح جدول ٢٣ - ١ مجموعتين من الأرقام العشوائية موزعتين توزيعاً أسياً ، الأولى ذات بارامتر $1/6$ (زمن بين الوصول) والثانية ذات بارامتر $1/4$ (زمن الخدمة) وكل القيم محولة إلى أزمنة بالدقائق والثواني . وكما هو متوقع للتوزيع الأسى « فإن معظم القيم في كل مجموعة (10 من 16 أو 62.5 في المئة) أصغر من المتوسط النظري 6 دقائق لزمن بين الوصول ، و 12 دقيقة لزمن الخدمة . ومتوسط الزمن للعينة في جدول ٢٣ - ١ هو ١٢ دقائق ، و 10 ثواني لزمن بين الوصول ، و 4 دقائق ، و 12 ثانية لزمن الخدمة .

جدول ٢٣ - ١

زمن بين الوصول	زمن الخدمة
0:16	3:30
0:01	3:30
2:37	6:36
10:19	11:45
11:53	5:32
2:57	4:27
1:02	8:17
4:03	15:24
0:59	3:29
0:09	3:12
9:57	2:01
3:44	13:37
7:12	0:40
0:10	0:12
11:51	2:42
0:04	13:43

صف الانتظار	عدد العملاء في الخدمة	زمن المحاكاة
00:00
3:30	#1 (0:16)	...
3:46
7:00	#2 (0:01)	...
7:01
13:36	#3 (2:37)	...
16:13
25:21	#4 (10:19)	...
30:53	#4 (4:47)	#5 (11:53)
35:20	#4 (0:20)	#5 (11:53), #6 (2:57)
35:40	#5 (11:53)	#6 (2:57)
43:37	#5 (3:56)	#6 (2:57), #7 (1:02)
47:33	#6 (2:57)	#7 (1:02)
50:30	#7 (1:02)	...
51:32
59:01	#8 (4:03)	...
62:30	#8 (0:34)	#9 (0:59)
63:04	#9 (0:59)	...
64:03
65:42	#10 (0:09)	...
65:51
67:43	#11 (9:57)	...
77:40
81:20	#12 (3:44)	...
82:00	#12 (3:04)	#13 (7:12)
82:12	#12 (2:52)	#13 (7:12), #14 (0:10)
84:54	#12 (0:10)	#13 (7:12), #14 (0:10), #15 (11:51)
85:04	#13 (7:12)	#14 (0:10), #15 (11:15)
92:16	#14 (0:10)	#15 (11:51)
92:26	#15 (11:51)	...
98:37	#15 (5:40)	#16 (0:04)

نحدد أول زمن وصول وزمن خدمة للعميل رقم 1 ، وزمن الوصول والخدمة للعميل رقم 2 ، وهكذا . تبين عملية الصفوف بعد ذلك في جدول ٢٣ - ٢ . حيث تبين أزمدة المحاكاة بالجدول الأزمنة التي يصل فيها عميل جديد ، أو يغادر فيها عميل ثم تقديم الخدمة له . والأزمدة بين قوسين هي كمية أزمدة الخدمة اللازمة للعملاء المناظرين .

لاحظ كيف يطول الصف عندما يكون زمن الخدمة طويلاً ، بالمقارنة بزمن الوصول القصير ، وكيف يقصر عندما يطول زمن بين الوصول ليمسح لتقديم الخدمة باستيعاب العملاء في النظام . هذا القصر والطول في صف الانتظار هو خاصية مميزة لنظام M/M/1 ، عندما يكون متوسط زمن الخدمة أقصر من متوسط زمن الوصول .

٢٣ ٧ اشتق (٢٣ - ٣) التي تعطي احتمالات حالة الاستقرار لنظام M/M/1 فيه $\rho < 1$.

المعادلات (٢١ - ٢) عند $dp_n/dt = 0$ (حالة مستقرة) ، $\mu_n = \mu$ ، $\lambda_n = \lambda$. تصبح معادلات الاقتران .

$$(١) \quad p_{n+1} = (\rho + 1)p_n - \rho p_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$(٢) \quad p_1 = \rho p_0$$

تعطي المعادلة (٢) p_1 بدلالة p_0 ، كل احتمالات الحالة المستقرة الأخرى يمكن الحصول عليها بدلالة p_0 بحل (١) عكساً

$$\begin{aligned}
n=1: & \quad p_2 = (\rho + 1)p_1 - \rho p_0 = (\rho + 1)(\rho p_0) - \rho p_0 = \rho^2 p_0 \\
n=2: & \quad p_3 = (\rho + 1)p_2 - \rho p_1 = (\rho + 1)(\rho^2 p_0) - \rho(\rho p_0) = \rho^3 p_0 \\
n=3: & \quad p_4 = (\rho + 1)p_3 - \rho p_2 = (\rho + 1)(\rho^3 p_0) - \rho(\rho^2 p_0) = \rho^4 p_0
\end{aligned}$$

وبوجه عام

$$(3) \quad p_n = \rho^n p_0$$

وحيث إن مجموع الاحتمالات يجب أن يساوى واحداً ، $0 < \rho < 1$ ،

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = p_0 \left(\frac{1}{1-\rho} \right)$$

لذلك ، $p_0 = 1 - \rho$ ، وتصبح (3) هي (23-3) .

٢٣ - ٨ اشتق (23-٧)

باستخدام تعريف القيم المتوقعة ونتائج المسألة ٢٣ - ٧ ، نحسب عدد العملاء المتوقع في نظام M/M/1 كالتالي

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n (1-\rho) \rho^n = (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^{n-1} = (1-\rho) \frac{d}{d\rho} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right) \\
&= (1-\rho) \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{1-\rho} \right) = (1-\rho) \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}
\end{aligned}$$

٢٣ - ٩ اشتق (23-٤)

ارمز للزمن الذي يقضيه العميل في النظام بالرمز T ، والزمن الذي يقضيه في الصف بالرمز T_q ، وزمن الخدمة بالرمز T_s . وكل هذه الرموز متغيرات عشوائية فيها

$$T = T_q + T_s$$

لذلك

$$E(T) = E(T_q) + E(T_s)$$

زمن الخدمة المتوقع هو $E(T_s) = 1/\mu$. نرمز لـ $E(T)$ بالرمز W ، $E(T_q)$ بالرمز W_q ، لذلك تنطبق (١) مع (23-٤) .

٢٣ - ١٠ استنتج صيغة ليتل بالاجتهاد الشخصي

أثناء متوسط زمن بقاء العميل في النظام ، W يصل عملاء جدد بمعدل λ ، لذلك ، في نهاية وحدات زمنية W ، يتوقع عملاء جدد λW في النظام . بمعنى أنه عندما يغادر العميل الأصلي النظام ، فإن هذا العميل يتوقع أن يجد λW عميل باقون في النظام . وحيث إن إحصائيات صف الانتظار لا تعتمد على الزمن في الحالة المستقرة ، فإن $L = \lambda W$ دائماً .

ونستنتج (23-٦) بالمثل بإحلال W, L ، وكلمة « نظام » بالرموز W_q, L_q ، والكلمة « صف انتظار » على التوالي ، في الفقرة السابقة .

٢٣ - ١١ في نظام M/M/1 هل $L_q = L - 1$ ؟
لا .

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=1}^{\infty} np_n \quad L_q = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)p_n = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)p_n$$

ولذلك

$$L - L_q = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1 - p_0 = \rho$$

٢٣ - ١٢ بين أن $S_k = T_1 + T_2 + \dots + T_k$ مجموع عدد ■ من المتغيرات العشوائية المستقلة بالتبادل ذات التوزيع الأسى ، ولكل منها بارامتر μ يكون لها نوع إرلانج k ، أو توزيع جاما

$$(٢٣ - ١٢) \quad P(S_k \leq t) = \int_0^t \frac{\mu^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu t} dt \quad (t \geq 0)$$

ترجم المتغيرات T على أنها أول عدد مرات وصول ■ في عملية ميلان ليواسون لها مجموع أول صغير . عندئذ يكون المجتمع عند الزمن t هو k أو أكثر ، فقط إذا $S_k \leq t$ ، بمعنى

$$(١) \quad P(S_k \leq t) = P(N(t) \geq k) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t}$$

حيث إننا قد استخدمنا (٢١ - ٩) بإحلال λ بدلاً من μ .

وكطريقة لإثبات التكافؤ بين (١) ، (٢٣ - ١٢) هو أن نبين أن لهما نفس المشتقة الأولى (حالة كثافة الاحتمال لـ ■) ، ونفس القيمة عند $t=0$ (وواضح أنهما كذلك) بتفاضل (٢٣ - ١٢) .

$$f_k(t) = \frac{\mu^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu t}$$

بتفاضل (١)

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} (n t^{n-1} e^{-\mu t} - \mu t^n e^{-\mu t}) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\mu^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu t} - \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\mu^{n+1} t^n}{n!} e^{-\mu t} \\ &= \frac{\mu^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu t} \end{aligned}$$

وبذلك يستكمل البرهان

٢٣ - ١٢ استج (٢٣ - ١٢)

للحصول على توزيع T_k ، وهو الزمن الذي يقضيه العميل في الصف لنظام M/M/1 ، استخدم الاحتمالات المشروطة (المسألة ١٧ - ٥) . إذا وصل عميل ، ووجد أن النظام في الحالة 0 ، فإن $T_k = 0$ وإذا وجد العميل أن النظام في الحالة k ($k=1,2,\dots$) فإنه ، بسبب خاصية الذاكرة (المسألة ٢٣ - ٢) لزمن الخدمة الحالي $T_k = S_k$ (انظر المسألة ٢٣ - ١٢) . وبالتالي ، عند $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
W_0(t) &= P(T_0 > t) = 1 - P(T_0 \leq t) = 1 - \left[p_0 P(0 \leq t) + \sum_{k=1}^{\infty} p_k P(S_k \leq t) \right] \\
&= 1 - \left[(1-\rho)(1) + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (1-\rho) \int_0^t \frac{\mu^k \tau^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu\tau} d\tau \right] \\
&= \rho - \rho\mu(1-\rho) \int_0^t \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu\rho\tau)^{k-1}}{(k-1)!} \right] e^{-\mu\tau} d\tau = \rho - \rho\mu(1-\rho) \int_0^t e^{\mu\rho\tau} e^{-\mu\tau} d\tau \\
&= \rho - \rho\mu(1-\rho) \int_0^t e^{-\mu(1-\rho)\tau} d\tau = \rho e^{-\mu(1-\rho)t} = \rho e^{-\mu W}
\end{aligned}$$

مسائل مكملية

Supplementary Problems

٢٣ - ١٤ يعمل موظف واحد بمحل آيس كريم . يصل العملاء طبقاً لتوزيع بواسون بمتوسط معدل وصول 30 في الساعة . يخدم العملاء بأسلوب FIFO (من يحضر أولاً يُخدم أولاً) ، وبسبب جودة الأيس كريم ، فإنهم يرغبون البقاء حتى الحصول على الخدمة . وزمن الخدمة للعميل يظهر أنه يتبع التوزيع الأسّي بمتوسط 1 1/2 دقيقة . حدد (أ) متوسط عدد العملاء المنتظرين للخدمة . (ب) الزمن الذي يتوقّع العميل لانتظار الخدمة . (ج) احتمال أن يقضى العميل أكثر من 15 دقيقة في الصف . (د) احتمال أن يكون بائع الآيس كريم بدون عمل .

٢٣ - ١٥ محل الحلالة به عامل واحد . لا يعطى المحل مواعيد ، ولكن العملاء يُخدمون بأسلوب من يحضر أولاً يُخدم أولاً . وبسبب سمعة المحل ، فإن العملاء عندما يذهبون إلى المحل يرغبون في البقاء به للحصول على الخدمة . يتبع الوصول نمط بواسون ، بمتوسط معدل وصول اثنين في الساعة . وزمن الخدمة للحلالة ذو توزيع أسّي بمتوسط 20 . حدد (أ) عدد العملاء المتوقع في المحل . (ب) العدد المتوقع للعملاء منتظرين الخدمة . (ج) متوسط الزمن الذي يقضيه العميل في المحل . (د) احتمال أن يقضى العميل أكثر من متوسط الزمن في المحل .

٢٣ - ١٦ يخدم نمط الوصول لعربات في حارة واحدة لشباك أحد البنوك بعمليّة بواسون ، بمعدل واحدة لكل دقيقة . يظهر أن زمن الخدمة للموظف يتبع التوزيع الأسّي بمتوسط 45 ثانية . بافتراض أن العربة التي تصل تنتظر حسب الضرورة ، حدد : (أ) العدد المتوقع للعربات المنتظرة للخدمة . (ب) متوسط الزمن الذي تنتظره العربة للخدمة . (ج) متوسط الزمن الذي تقضيه العربة في النظام . (د) احتمال أن تكون هناك عربات منتظرة بالشارع إذا كانت أرض البنك لا تمتلئ أكثر من خمس عربات .

٢٣ - ١٧ تطلب الطائرات السماح بالهبوط على مهبط واحد في أحد المطارات بمعدل طائرة واحدة كل ١٥ دقائق ، وتتبع توزيع بواسون . مهبط الطائرات بأسلوب من يحضر أولاً يُخدم أولاً ، والزمن اللازم لمراقب الحركة لهبوط طائرة يختلف طبقاً لمهارة كابتن الطائرة . وله توزيع أسّي بمتوسط 3 دقائق . حدد (أ) متوسط عدد الطائرات في الجو . (ب) متوسط عدد الطائرات التي طلبت السماح بالهبوط ، وما زالت في الجو . (ج) احتمال أن الطائرة التي تصل تكون على الأرض في زمن أقل من 10 دقائق بعد أول طلب سماح بالنزول . (د) احتمال أن يكون هناك أكثر من ثلاث طائرات في الجو .

٢٣ - ١٨ يتلقى أحد كاتبى الآلة الكاتبة عمله طبقاً لتوزيع بواسون ، بمعدل متوسط أربعة طلبات في الساعة . تُخدم الأعمال بأسلوب من يحضر أولاً يُخدم أولاً بمتوسط زمن خدمة (كتابة) 12 دقيقة ، وزمن الكتابة للأعمال يتبع التوزيع الأسى . حدد .
(أ) احتمال أن الطلب الذى يصل سينتهى في أقل من 45 دقيقة . (ب) احتمال أن كل الأعمال التى ستُطلب من الكاتب سينتهى قبل نهاية يوم العمل . (ج) احتمال أن يأخذ الطلب أقل من 12 دقيقة لالتهاء بمجرد أن يبدأ فيه الكاتب .

٢٣ - ١٩ يقوم الميكانيكيون بطلب قطع غيار للسيارات التى يقومون بإصلاحها بإحدى الورش ، ويذهبون إلى المخزن لطلبها . ويُخدم الميكانيكيون بأسلوب من يحضر أولاً يُخدم أولاً بواسطة عامل المخزن . يصل الميكانيكيون بتوزيع بواسون بمعدل متوسط 35 في الساعة ، ويتظفرون دورهم إذا كان عامل المخزن مشغولاً مع أحد العمال الآخرين . وفي المتوسط ، يحتاج عامل المخزن 1 دقيقة لخدمة الميكانيكي الواحد ، بزمن خدمة موزع أسياً حول متوسطه . ما هى تكلفة الساعة المتوقعة لورشة الإصلاح حتى يحصل الميكانيكيون على طلباتهم من قطع الغيار إذا كان أجر الميكانيكي الواحد 12 دولاراً في الساعة .

٢٣ - ٢٠ تصل السيارات إلى مكان الخدمة طبقاً لتوزيع بواسون بمعدل 10 في اليوم . ومكان الخدمة يستطيع خدمة سيارة واحدة في الوقت الواحد . ويوزع زمن الخدمة أسياً حول متوسط 12 / 1 يوم . وتتكلف شركة السيارات 200 دولار في اليوم لتشغيل مكان الخدمة ، و 50 دولاراً لكل يوم إذا بقيت السيارة بمكان الخدمة . بشراء معدة جديدة ترفع التكلفة اليومية لمكان الخدمة إلى 245 دولار يمكن لشركة السيارات تخفيض زمن الخدمة إلى 15 / 1 يوم . هل هذا التعديل مناسب إقتصادياً ؟

٢٣ - ٢١ تصل المشغولات إلى مكان التفتيش بعملية بواسون بمعدل متوسط اثنين في الساعة . ويتم تفتيشها على أساس FIFO . يقوم مهندس الجودة بالتفتيش والإصلاحات البسيطة معاً إذا كان هذا هو المطلوب لقبول الشغلة . زمن الخدمة الإجمالى للشغلة يتبع التوزيع الأسى بمتوسط 25 دقيقة . والمشغولات التى تصل ، ولا يمكن تفتيشها بسبب انشغال المهندس تبقى حتى يفرغ المهندس من عمله . تحتاج كل شغلة 10 قدم مربع للبقاء بمكان التفتيش . ما هى مساحة الأرض التى يجب أن تتوفر إذا كان الهدف هو توفير مساحة كافية بمكان التفتيش 90 في المئة من الوقت ؟

٢٣ - ٢٢ حدد تأثير مضاعفة كل من λ ، μ على L ، L_q ، W في نظام $M/M/1$.

٢٣ - ٢٣ أوجد الاحتمال المشروط بأن يوجد $n \geq 2$ عميل في نظام $M/M/1$ ، علماً بأن هناك صف انتظار .

٢٣ - ٢٤ حدد عدد العملاء المتوقع في الصف في النظام $M/M/1$ عندما يكون هناك صف . (ملحوظة : استخدم نتائج المسألة ٢٣ - ٢٣) .

٢٣ - ٢٥ استنتج (٢٣ - ٨) بدون استخدام صيغة ليتل ، بحساب عدد العملاء المتوقع في الصف مباشرة .

٢٣ - ٢٦ استنتج معادلة الاتزان (انظر المسألة ٢٣ - ٧) مباشرة باستخدام حقيقة أنه في الحالة المستقرة يكون المعدل المتوقع لانتقال النظام إلى الحالة n يساوى المعدل المتوقع للانتقال من الحالة n . (لاحظ أن المعدل المتوقع للعملاء إلى n ، ومن الحالة n . $\lambda_n = \lambda$ ، $\mu_n = \mu$ ، يكون متساوياً بوجه عام) .

٢٣ - ٢٧ استخدم طريقة دالة التوليد المقترحة في المسألة ٢١ - ٧ لحل معادلات الاتزان لنظام $M/M/1$.

٢٣ - ٢٨ بدون استخدام المسألة ٢٣ - ٢٦ تحقق أن معدل متوسط المغادرة من الحالة المستقرة لنظام $M/M/1$ يساوى معدل متوسط الوصول إلى النظام .

النظم الأخرى بعمليات من نوع بواسون

Other Systems with Poisson-Type Input and Exponential-Type Service Times

عمليات الحالة المعتمدة STATE-DEPENDENT PROCESSES

في كثير من مواقف صفوف الانتظار نجد أن عدد مرات وصول العملاء لا يكون عملية بواسون بالتحديد ذات بارامتر ثابت λ ، وبدلاً من ذلك ، فإن عدد مرات الوصول يكون عملية شبيهة ببواسون ذات بارامتر λ يتغير طبقاً لعدد العملاء في النظام . وقد يحدث أيضاً أن تكون المغادرة من النظام ليست ذات معدل ثابت μ ، كما في حالة مقدم الخدمة الأحمدي ، ذات زمن خدمة موزع أسياً . وفضلاً عن ذلك .. فإن المغادرة تكون ، في حالة مقدم خدمة أحادي ، ذات توزيع شبيه بالأسى ، وفيه تتغير μ طبقاً لحالة النظام . يمكن تمثيل عملية الصفوف هذه كعملية ميلاد وموت عامة لماركوف (فصل ٢١) فيها كل من λ_n ، μ_n تعطى على التوالي عدد مرات الوصول والمغادرة المتوقعين في فترة زمنية قصيرة Δt ، إذا كان النظام في الحالة n في بداية الفترة الزمنية . واحتمالات الحالة المستقرة لهذه العمليات تحقق :

$$(٢٤ - ١) \quad p_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} p_{n-1} \quad \text{أو} \quad p_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \cdots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \cdots \mu_1} p_0$$

وفيها تعتمد p_0 تحت شرط أن مجموع كل الاحتمالات يساوي واحداً . وهذا المجموع يقترب من الواحد ، على أساس أن λ لا تكون كبيرة بالنسبة لـ μ . وعلى الأخص ، فإن الحالة المستقرة تتأكد إذا كان

$$\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \leq \rho < 1$$

لكل قيم n .

صيغ ليتل LITTLE'S FORMULAS

تتحقق صيغ ليتل (٢٣ - ٥) ، (٢٣ - ٦) للعمليات المشروحة أعلاه ، حيث إن

$$(٢٤ - ٢) \quad \bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n$$

وهو متوسط معدل وصول العملاء الى نظام الخدمة .

وفي أي نظام صفوف ، يكون عدد العملاء المتوقع في النظام هو :

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n$$

وعدد العملاء المتوقع في الصف هو :

$$L_q = \sum_{n=0}^{\infty} [n - s_n, 0] p_n$$

حيث إن s_n هو عدد مقدمي الخدمة المتاحة في الحالة n . إذا أمكن تحديد قيم $L_q = L$ ، فإنه بمعرفة $\bar{\lambda}$ يمكن مباشرة إيجاد قيم W_q ، W من صيغ ليتل.

التراجع والتخلف BALKING AND RENEGING

يحدث التراجع عندما يصل عميل إلى مكان الخدمة، ويرفض الدخول إليه بسبب طول صف الانتظار. ارمز إلى احتمال أن أحد العملاء سيتراجع عندما يجد n عميلاً في النظام باسم دالة التراجع $b(n)$. فيكون احتمال ألا يتراجع العميل هو $1 - b(n)$. إذا كان نمط الوصول إلى مكان الخدمة ذا حالة مستقلة بمتوسط معدل وصول λ ، فإن معدل وصول العملاء المتوقع إلى مكان الخدمة يكون

$$\lambda_n = [1 - b(n)]\lambda \quad (٢٤ - ٣)$$

وهي حالة معتمدة. (انظر المسألة ٢٤ - ٤).

يحدث التخلف عندما يترك أحد العملاء الصف بعد أن ينضم إليه بسبب طول وقت الانتظار. والنتيجة النهائية لذلك هي زيادة معدل خدمة العملاء بالنظام. ويمكن تمثيل نظام $M/M/1$ فيه تخلف بعملية حالة معتمدة فيها :

$$\mu_n = \mu + r(n) \quad (٢٤ - ٤)$$

وهنا، $r(n)$ تكون دالة تخلف تعرف بـ

$$r(n) = \frac{P}{\Delta t} \quad \text{عندما } n \text{ عميل يكون في النظام} \quad \Delta t$$

وحيث إنه لا يحدث تخلف عندما لا يكون هناك صف انتظار، فإن $r(0) = r(1) = 0$. انظر المسألة (٢٤ - ١٠).

نظم م / م / م M/M/s SYSTEMS

نظام $M/M/s$ هو عملية صفوف لها نمط وصول بواسون ذات s مقدم خدمة، من زمن خدمة مستقل، موزعين بالتساوية بتوزيع أسي (لا يعتمد على حالة النظام)، ذات طاقة غير محدودة، وبنظام $FIFO$ ونمط الوصول يكون حالة مستقلة فيها $\lambda_n = \lambda$ لكل قيم n . وزمن الخدمة المرتبط بكل مقدم خدمة يكون حالة مستقلة، ولكن حيث إن عدد مقدمي الخدمة الذين يتعاملون مع العملاء (أي غير العاطلين) يعتمد على عدد العملاء بالنظام، فإن الزمن الفعلي الذي يأخذه النظام للتعامل مع العملاء من خلال إمكانيات النظام يكون أيضاً معتمداً على الحالة. وعلى الأخص إذا كان $1/\mu$ متوسط زمن الخدمة لتقديم خدمة واحد للتعامل مع عميل واحد، فإن متوسط معدل الخدمة عندما يكون هناك n عميل في النظام يكون

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & (n = 0, 1, \dots, s) \\ s\mu & (n = s + 1, s + 2, \dots) \end{cases}$$

وتتحقق حالة الاستقرار عندما يكون

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$$

وتعطي احتمالات حالة الاستقرار بالمعادلة (٢٤ - ١) كالتالي :

$$p_0 = \left[\frac{s^s \rho^{s+1}}{s!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^s \frac{(s\rho)^n}{n!} \right]^{-1} \quad (٢٤ - ٥)$$

$$p_n = \begin{cases} \frac{(s\rho)^n}{n!} p_0 & (n = 1, \dots, s) \\ \frac{s^s \rho^n}{s!} p_0 & (n = s+1, s+2, \dots) \end{cases} \quad (٢٤ - ٦)$$

انظر المسألة (٢٤ - ٥) . عندما تعطى p_0 بالمعادلة (٢٤ - ٥)

$$L_q = \frac{s^s \rho^{s+1} p_0}{s!(1-\rho)^2} \quad (٢٤ - ٧)$$

وبمجرد أن نتحدد L_q ، نحصل على W_q ، W ، L من (٢٣ - ٦) ، (٢٣ - ١١) ، (٢٣ - ٥) على التوالي عند $\lambda = \bar{\lambda}$ تنطبق هنا المعادلة (٢٣ - ٤) . بسبب أنه بصرف النظر عن حالة النظام ، فإن زمن الخدمة المتوقع لكل عميل له القيمة الثابتة $1/\mu$ وأكثر من ذلك ..

$$W(t) = e^{-st} \left\{ 1 + \frac{(s\rho)^s p_0 [1 - e^{-st(s-1-s\rho)}]}{s!(1-\rho)(s-1-s\rho)} \right\} \quad (t \geq 0) \quad (٢٤ - ٨)$$

$$W_q(t) = \frac{(s\rho)^s p_0}{s!(1-\rho)} e^{-st(1-\rho)} \quad (t \geq 0) \quad (٢٤ - ٩)$$

انظر المسألة (٢٤ - ٥ ، ٢٤ - ٦)

نظم م / م / ١ / ك M/M/1/K SYSTEMS

يستطيع نظام م / م / ١ / ك إستيعاب عدد من العملاء K بحد أقصى في نظام الخدمة في نفس الوقت . ولا يسمح للعملاء الذين يصلون إلى مكان الخدمة وهو مملوء أن ينظروا خارجة للدخول في وقت لاحق . فإذا كانت λ تعبر عن متوسط معدل وصول العملاء إلى مكان الخدمة ، فإن متوسط معدل الوصول والدخول في الخدمة إذا كان النظام في حالة ■ هو

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & (n = 0, 1, \dots, K-1) \\ 0 & (n = K, K+1, \dots) \end{cases}$$

ونصل دائما إلى حالة الثبات ، مهما كانت قيمة $\rho \equiv \lambda/\mu$ ، وذلك باحتمالات معطاه في المعادلة (٢٤ - ١) . مثل $p_n = 0 \ (n > K)$ و $n = 0, 1, \dots, K$

$$p_n = \begin{cases} \frac{\rho^n (1-\rho)}{1-\rho^{K+1}} & (\rho \neq 1) \\ \frac{1}{K+1} & (\rho = 1) \end{cases} \quad (٢٤ - ١٠)$$

وتكون مقاييس الفعالية هي

$$(11-24) \quad L = \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} & (\rho \neq 1) \\ \frac{K}{2} & (\rho = 1) \end{cases}$$

حيث تحدد W_q ، W ، L_q من المعادلات (5-23) ، (4-23) و (6-23) على التوالي . وهنا تكون

$$(12-24) \quad \bar{\lambda} = \lambda(1-p_K)$$

انظر المسألة (7-24)

نظم م / م / س / ك M/M/s/K SYSTEMS

نظام M/M/s/K هو نظام ذو طاقة محدودة ذات ■ مقدم خدمة لهم أزيمة خدمة مستقلة ، موزعين بالتفاضل بالتوزيع الأسى (لا يعتمد على حالة النظام) ، حيث إن طاقة النظام يجب أن تكون على الأقل بنفس عدد مقدمي الخدمة ، $s \leq K$. لهذا النظام :

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & (n = 0, 1, \dots, K-1) \\ 0 & (n = K, K+1, \dots) \end{cases} \quad \mu_n = \begin{cases} n\mu & (n = 0, 1, \dots, s) \\ s\mu & (n = s+1, s+2, \dots) \end{cases}$$

وتوجد احتمالات الحالة المستقرة لكل قيم $\rho \equiv \lambda/s\mu$ ، وتعطى بالمعادلة (1-24) كما في

$$(13-24) \quad p_0 = \begin{cases} \left[\frac{s^s \rho^{s+1} (1-\rho^{K-s})}{s! (1-\rho)} + \sum_{n=0}^s \frac{(s\rho)^n}{n!} \right]^{-1} & (\rho \neq 1) \\ \left[\frac{s^s}{s!} (K-s) + \sum_{n=0}^s \frac{s^n}{n!} \right]^{-1} & (\rho = 1) \end{cases}$$

$$(14-24) \quad p_n = \begin{cases} \frac{(s\rho)^n}{n!} p_0 & (n = 1, 2, \dots, s) \\ \frac{s^s \rho^n}{s!} p_0 & (n = s+1, \dots, K) \\ 0 & (n = K+1, K+2, \dots) \end{cases}$$

وتكون مقاييس الفعالية هي

$$(15-24) \quad L_q = \frac{s^s \rho^{s+1}}{s! (1-\rho)^2} [1 - \rho^{K-s} - (1-\rho)(K-s)\rho^{K-s}] p_0$$

ونحصل على W_q ، W ، L من المعادلة (6-23) ، (4-23) ، (5-23) على التوالي : وتعطى $\bar{\lambda}$ مرة أخرى بالمعادلة (12-24) . (انظر المسألة 8-24) . والنظام M/M/1/K هو حالة خاصة من النظام M/M/s/K وفيه $s=1$ (انظر المسألة 24-28) .

مسائل محلولة Solved Problems

٢٤ - ١

في أحد محلات البقالة يعمل موظف واحد على الخزينة « ويعمل كعامل تعبئة عندما يكون المحل غير مزدحم . يصل العملاء إلى مكان الخزينة بتوزيع بواسون بمعدل متوسط 30 في الساعة . والوقت اللازم من الموظف لحساب مشتريات العميل وتعبئة المشتريات واستلام النقود يوزع أسياً بمتوسط 2 دقيقة . عندما يوجد ثلاثة أو أكثر من العملاء عند الخزينة (بما فيهم العميل الذي يكون في الخدمة فعلاً) ، يطلب موظف آخر من العمل لمساعدة موظف الخزينة في التعبئة . عندما يعمل الموظفان معاً يظل زمن الخدمة للعملاء بالتوزيع الأسى ، ولكن بمعدل دقيقة واحدة . حدد : (أ) متوسط عدد العملاء عند الخزينة في نفس الوقت . (ب) الفترة الزمنية التي يتوقعها العميل للانتظار عند الخزينة . (ج) الفترة الزمنية التي يتوقعها العميل للانتظار قبل بدء إنهاء حسابه مع الخزينة .

خلال عملية الوصول يظل معدل الوصول حالة مستقلة عند $\lambda_n = \lambda = 30 \text{ h}^{-1}$ في الساعة ، ومع ذلك تكون أزمدة الخدمة حالة معتمدة . وعندما يكون هناك أقل من ثلاثة عملاء أو أكثر عند الخزينة ، يكون متوسط زمن الخدمة دقيقتين « لذلك يكون متوسط معدل الخدمة 30 في الساعة . وعندما يكون هناك ثلاثة عملاء أو أكثر عند الخزينة ، يكون متوسط زمن الخدمة دقيقة واحدة ، لذلك يزيد متوسط معدل الخدمة إلى 60 في الساعة . لذلك ..

$$\mu_n = \begin{cases} 30 \text{ h}^{-1} & (n = 1, 2) \\ 60 \text{ h}^{-1} & (n = 3, 4, \dots) \end{cases}$$

لاحظ أنه إذا أدى أى وصول جديد إلى تغيير النظام من 2 إلى 3 ، فإن العميل الذى في الخدمة يتعرض فوراً إلى توزيع أسى جديد (خاصية الذاكرة) .

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 = \frac{30}{30} p_0 = p_0 & p_2 &= \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_1 = \frac{30}{30} (p_0) = p_0 \\ p_3 &= \frac{\lambda_2}{\mu_3} p_2 = \frac{30}{60} (p_0) = \frac{1}{2} p_0 & p_4 &= \frac{\lambda_3}{\mu_4} p_3 = \frac{30}{60} (\frac{1}{2} p_0) = (\frac{1}{2})^2 p_0 \end{aligned}$$

وبوجه عام ..

$$p_n = (\frac{1}{2})^{n-2} p_0 \quad (n \geq 2)$$

لإيجاد p_0 ، نحل :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 + p_1 + \sum_{n=2}^{\infty} p_n = 2p_0 + \sum_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n-2} p_0 \\ &= 2p_0 + 2p_0 = 4p_0 \end{aligned}$$

ونحصل على $p_0 = 1/4$. لذلك ..

$$p_n = \begin{cases} \frac{1}{4} & (n = 0, 1) \\ (\frac{1}{2})^n & (n = 2, 3, \dots) \end{cases}$$

وتكون دالة التوليد لهذه الاحتمالات هي :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{2+z+z^2}{8-4z}$$

(أ)

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \left. \frac{dF}{dz} \right|_{z=1} = \frac{28}{16} = 1.75 \text{ عميل}$$

(ب) حيث إن $\bar{\lambda} = \lambda = 30$ في الساعة

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{1.75}{30} = 0.05833 \text{ ساعة} = 3.5 \text{ دقيقة}$$

(ج) بسبب أن موظف الخزينة وعامل التعبئة يعملان معاً ، فيكون عدد مقدمي الخدمة حالة مستقلة عند $s_n = 1$

$$L_q = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)p_n = L - (1-p_0) = 1.75 - 0.75 = 1.00 \text{ عميل}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1.00}{30} = 0.0333 \text{ دقيقة} = \frac{1}{30} \text{ ساعة}$$

لاحظ أن متوسط زمن الخدمة للعميل هو

$$W - W_q = 1.5 \text{ دقيقة}$$

٢ - ٢٤ أعد حل المسألة (٢٤ - ١) إذا حضر الموظف الآخر مستقلاً ، ويعمل كعامل خزينة وتعبئة على التوازي مع الآخر . عندما يبقى عميلان فقط ، يترك الموظف الثاني مكان الخزينة ، ويعود إذا وصل عدد العملاء إلى ثلاثة . هل يُفضل هذا الوضع من وجهة نظر العملاء ؟

λ_n ، μ_n هي نفسها كما في المسألة (٢٤ - ١) ؛ لذلك تبقى احتمالات الحالات ، L ، W بدون تغيير . مع ذلك .. يكون عدد مقدمي الخدمة الآن حالة مختلطة . فيها

$$s_n = \begin{cases} 1 & (n = 0, 1, 2) \\ 2 & (n = 3, 4, \dots) \end{cases}$$

وكذلك

$$\begin{aligned} L_q &= 1p_2 + \sum_{n=3}^{\infty} (n-2)p_n = p_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n-2)p_n + p_1 \\ &= p_2 + L - 2(1-p_0) + p_1 = \frac{1}{4} + 1.75 - 2(\frac{3}{4}) + \frac{1}{4} = 0.75 \text{ عميل} \\ W_q &= \frac{0.75}{30} = 0.025 \text{ h} = 1.5 \text{ دقيقة} \end{aligned}$$

بالمقارنة بالموقف في المسألة ٢٤ - ١ ينتظر العملاء الخدمة متوسط 0.5 دقيقة أقل ، ويقضون بالخدمة متوسط 0.5 دقيقة أكثر . ربما يفضلون هذا البديل .

٢ - ٢٤ اشتق (٢٤ - ١) .

بوضع $dp_n/dt = 0$ (شرط حالة الاستقرار) ، فمن معادلات كوليجوروف لعملية الميلاد والموت العامة للماركوف (٢١ - ١) نحصل على الآتي بعد الترتيب

$$(1) \quad p_{n+1} = \frac{\lambda_n + \mu_n}{\mu_{n+1}} p_n - \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n+1}} p_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$(2) \quad p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0$$

تمضي المعادلة (2) بدلالة p_0 . وبحل (1) بالتكرار نجد أن

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\mu_2} p_1 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} p_0 = \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\mu_2} \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 \right) - \frac{\lambda_0}{\mu_2} p_0 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0 \\ p_3 &= \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\mu_3} p_2 - \frac{\lambda_1}{\mu_3} p_1 \\ &= \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\mu_3} \left(\frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0 \right) - \frac{\lambda_1}{\mu_3} \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 \right) = \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} p_0 \end{aligned}$$

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1} p_0 \quad \text{أو} \quad p_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} p_{n-1} \quad \dots \text{وبوجه عام} \dots$$

٢٤ - ٤ يقوم أحد أصحاب محلات بيع الجرائد والسجائر بخدمة عملائه بمتوسط عميل واحد كل ٣ ثانية ، والتوزيع الفعلي هو التوزيع الأسّي . يصل العملاء طبقاً لعملية بواسون بمعدل متوسط ثلاثة في الدقيقة . ويتظرون الخدمة إذا كان صاحب المحل مشغولاً بخدمة عميل آخر . يختار بعض العملاء ألا ينتظر ويذهب إلى مكان آخر لتلقى الخدمة . واحتمال ألا ينتظر العميل بسبب طول الصف هو $n/3$ ، حيث إن n هو عدد العملاء أصلاً في المحل . ما هو الربح الذي يتوقع أن يحصله صاحب المحل من العملاء الذين يذهبون إلى مكان آخر ، إذا كان متوسط الربح للعميل هو ٣ سناً .

حيث إن احتمال رفض الانتظار هو ١ عندما يكون هناك ثلاثة عملاء في المحل ، فإن المحل لن يتعامل مع أكثر من ثلاثة عملاء في نفس الوقت ، وتكون الحالات الممكنة هي ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ . ونأخذ دالة التراجع لتكون

$$b(n) = \begin{cases} n/3 & (n = 0, 1, 2, 3) \\ 1 & (n = 4, 5, \dots) \end{cases}$$

متوسط معدل وصول العملاء إلى المحل هو $\lambda = 3$. حيث إنه من (٢٤ - ٣) يكون معدل الوصول إلى المحل هو

$$\lambda_0 = (1 - \frac{1}{3})(3) = 3 \quad \lambda_1 = (1 - \frac{1}{3})(3) = 2 \quad \lambda_2 = (1 - \frac{1}{3})(3) = 1$$

و $\lambda_n = (1 - \frac{1}{3})(3) = 0$ عندما $n = 3, 4, \dots$ ، ومعدل الخدمة يكون حالة مستقلة عند $\mu_n = \mu = 2$ عميل في الدقيقة . من (٢٤ - ١) :

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 = \frac{3}{2} p_0$$

$$p_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_1 = \frac{3}{2} (\frac{3}{2} p_0) = \frac{9}{4} p_0$$

$$p_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} p_2 = \frac{1}{2} (\frac{9}{4} p_0) = \frac{9}{8} p_0$$

و : $p_n = 0$ ($n = 4, 5, \dots$) . وشرط أن مجموع الاحتمالات هو ١ يعطى $p_0 = 4/19$. ومن ثم ..

$$p_1 = \frac{6}{19} \quad p_2 = \frac{6}{19} \quad p_3 = \frac{3}{19} \quad p_n = 0 \quad (n > 3)$$

والمعدل المتوقع الذي يرفض فيه العملاء الانتظار هو

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_n) p_n = (3 - 3) \frac{4}{19} + (3 - 2) \frac{6}{19} + (3 - 1) \frac{6}{19} + (3 - 0) \frac{3}{19} + 0 + 0 + \dots$$

= 1.4211 عميل في الدقيقة

٢٤ - ٤ عند بنك صغير موظفان الثان ذوا كفاءة متساوية . ويستطيع كل منهما التعامل مع العملاء وانتهاء اجراءاتهم بمعدل 60 كل ساعة برمن خدمة فعلي موزع أسياً . يصل العملاء إلى البنك طبقاً لعملية بواسون بمعدل متوسط 100 في الساعة . حدد : (أ) احتمال أن يكون بالبنك أكثر من ثلاثة عملاء في نفس الوقت . (ب) احتمال أن يكون أحد الموظفين بدون عمل . (ج) احتمال أن يقضى العميل أكثر من ثلاث دقائق في البنك .

هذا النظام هو $M/M/2$ فيه $\lambda = 100$ ، $\mu = 60$. حيث إن

$$\rho = \frac{100}{2(60)} = \frac{5}{6} < 1$$

وتظهر حالة الاستقرار أخيراً . باستخدام (٢٤ - ٥) نحسب

$$\frac{1}{p_0} = \frac{2^2(5/6)^3}{2! [1 - (5/6)]} + \sum_{n=0}^2 \frac{(5/3)^n}{n!} = \frac{125}{18} + \frac{1}{0!} \left(\frac{5}{3}\right)^0 + \frac{1}{1!} \left(\frac{5}{3}\right)^1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 11$$

أو $p_0 = 1/11 = 0.0909$. وتحدد باقي احتمالات الحالة المستقرة بعد ذلك من (٢٤ - ٦)

$$p_1 = \frac{(5/3)^1}{1!} \left(\frac{1}{11}\right) = 0.1515$$

$$p_2 = \frac{(5/3)^2}{2!} \left(\frac{1}{11}\right) = 0.1263$$

$$p_3 = \frac{2^2(5/6)^3}{2!} \left(\frac{1}{11}\right) = 0.1052$$

$$p_4 = \rho p_3 = \frac{5}{6} (0.1052) = 0.0877$$

وهكذا

$$1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3) = 1 - (0.0909 + 0.1515 + 0.1263 + 0.1052) = 0.5261 \quad (١)$$

(ب) يكون الموظف بدون عمل إذا لم يكن هناك عملاء في البنك ، أو إذا كان هناك عميل واحد في البنك ، وهذا العميل يجري خدمته بواسطة الموظف الآخر .

$$p_0 + \frac{1}{2}p_1 = 0.0909 + \frac{1}{2}(0.1515) = 0.1667$$

(جـ) باستخدام (٢٤ - ٨) نجد احتمال أن يقضي العميل أكثر من ثلاث دقائق أو $1/20$ ساعة في البنك هو

$$W\left(\frac{1}{20}\right) = e^{-60(1/20)} \left\{ 1 + \frac{(5/3)^2(1/11)[1 - e^{-60(1/20)(2 - 1 - (5/3))}]}{2! [1 - (5/6)][2 - 1 - (5/3)]} \right\} = 0.4113$$

٢٤ - ٦ لدى إحدى إدارات النقل الرسمية ثلاثة أطقم للتفتيش يكونون دائماً تحت الطلب ، وعملهم هو تحليل ظروف الطريق بعد أى حادث خطر يحدث على الطريق . والأطقم الثلاثة متساوية في الكفاءة ، ويأخذ كل منها في المتوسط يومين لفحص الطريق وكتابة التقرير عن الحادث بزم من موزع أسياً . وعدد الحوادث الخطيرة على الطريق يتبع عملية بواسون بمعدل متوسط 300 في السنة . حدد L ، L_q ، W ، W_q لهذه العملية ، ووضح معنى كل من هذه القيم .

هذه العملية هي M/M/3 فيها $\lambda = 300$ حادث في السنة ، $\mu = 365/2 = 182.5$ تقرير لكل طاقم تفتيش لكل سنة و

$$\rho = \frac{300}{3(182.5)} = \frac{40}{73}$$

لإيجاد قيمة L_q من (٢٤ - ٧) يجب أن نحدد p_0 أولاً . من (٢٤ - ٨)

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_0} &= \frac{3^3(40/73)^3}{3! [1 - (40/73)]} + \sum_{n=0}^2 \frac{1}{n!} \left(\frac{300}{182.5}\right)^n \\ &= 0.89737 + \frac{1}{0!} \left(\frac{300}{182.5}\right)^0 + \frac{1}{1!} \left(\frac{300}{182.5}\right)^1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{300}{182.5}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{300}{182.5}\right)^3 = 5.63263 \end{aligned}$$

حيث إن $p_0 = 1/5.63263 = 0.177537$ فإن

$$L_q = \frac{3^3(40/73)^3(0.177537)}{3! [1 - (40/73)]^2} = 0.3524$$

وفي المتوسط ، فإن الإدارة تكون عندما حوادث متأخرة 0.3524 .

باستخدام (٢٣ - ٦) عند $\bar{\lambda} = \lambda = 300$ نحصل على

$$W_e = \frac{1}{300} (0.3524) = 0.001175 \text{ year} = 0.429 \text{ يوم}$$

والوقت المستغرق ، في المتوسط ، أقل قليلاً من 1/2 يوم بين الحادث الخطير وبدء الفحص .

وينتج من (٢٣ - ٤) أن

$$W = 0.001175 + \frac{1}{182.5} = 0.006654 \text{ year} = 2.429 \text{ يوما}$$

وفي المتوسط ، تأخذ الإدارة أقل قليلاً من 2 1/2 يوم لإنهاء العمل بمجرد حدوث حادث خطر .
وأخيراً ، من (٢٣ - ٥) نجد أن

$$L = 300(0.006654) = 1.996 \text{ حادث}$$

في المتوسط ، تكون لدى الإدارة حالتان تقريباً تحت الحكم منتظرتان القرار النهائي .

٢٤ - ٧ في إحدى محطات الخدمة على طريق زراعي طلمية واحدة للبنزين . تصل العربات للمحطة بتوزيع بواسون بمعدل متوسط 10 في الساعة . والزمن اللازم لخدمة العربة موزع أسياً بمتوسط دقيقتين . تستطيع المحطة استيعاب أربع عربات بحد أقصى ، وتمنع فوائين المرور العربات من الانتظار خارج المحطة . حدد : (أ) متوسط عدد العربات في الوقت الواحد بالمحطة . (ب) متوسط الزمن الذي ينتظره العميل بالمحطة منتظراً الخدمة . (ج) متوسط العائد الذي تفقده المحطة بسبب ذهاب العميل إلى مكان آخر للحصول على الخدمة إذا كانت المحطة ممتلئة ، وكان متوسط البيع للعميل 15.00 دولار .

هذا النظام هو : $M/M/1/4$ فيه

$$\mu_n = \mu = \frac{1}{2} \text{ دقيقة} = 30 \text{ في الساعة}$$

معدل الوصول إلى المحطة في الساعة هو : الساعة $\lambda = 10$ ؛ لذلك تكون معدلات الوصول داخل المحطة هي :

$$\lambda_n = \begin{cases} 10 \text{ الساعة} & (n = 0, 1, 2, 3) \\ 0 \text{ الساعة} & (n = 4, 5, \dots) \end{cases}$$

وكثافة المرور إلى داخل النظام هي $\rho = \lambda/\mu = 1/3$

(أ) من (٢٤ - ١١)

$$L = \frac{1}{2} - \frac{5(1/3)^5}{1 - (1/3)^5} = 0.4793 \text{ عربة}$$

(ب) للحصول على W_e نستخدم (٢٣ - ٤) بعد تحديد $p_n, \bar{\lambda}, W$ من (٢٤ - ١٠) ، (٢٤ - ١٢) ،
(٢٣ - ٥) على التوالي . وهنا

$$p_4 = \frac{(1/3)^4(2/3)}{1 - (1/3)^5} = 0.008264$$

وحيث إن الساعة $\bar{\lambda} = 10(1 - 0.008264) = 9.917$ في الساعة ، حيث تمثل متوسط معدل دخول العربات إلى المحطة ، فإن

$$W = \frac{0.4793}{9.917} = 0.04833 \text{ ساعة}$$

$$W_0 = 0.04833 - \frac{1}{30} = 0.015 \text{ ساعة} = 54 \text{ ثانية}$$

(ج) ترفض العربات الدخول إلى المحطة بمعدل

$$\lambda - \bar{\lambda} = 10 - 9.917 = 0.083 \text{ في الساعة}$$

لذلك يكون متوسط معدل العائد المفقود هو $1.25 = (15)(0.083)$ دولار في الساعة

٢٤ - ٨

محطة خدمة سيارات من نوع « اخدم نفسك » توجد أربعة أجهزة يمكن للعملاء بواسطتها تنظيف وتلميع سياراتهم « بجانب غرفة تستوعب ثلاث سيارات إضافية عندما تكون كل الأجهزة ممتلئة . يصل العملاء إلى مكان غسيل السيارات بتوزيع بواسون بمعدل متوسط 15 في الساعة . وإذا لم يكن هناك مكان للعملاء ، فإنهم يذهبون إلى أي مكان آخر . الزمن اللازم لخدمة السيارة يتبع التوزيع الأسي بمتوسط 12 دقيقة . حدد : (أ) متوسط عدد السيارات بمحطة غسيل السيارات في أي وقت . (ب) معدل رفض السيارات الزائدة عن إمكانيات المحطة .

هذا النظام هو نظام M/M/4/7 فيه

$$\mu = 5 \text{ في الساعة} \quad \lambda = 15 \text{ في الساعة} \quad \rho = \frac{15}{4(5)} = \frac{3}{4}$$

(أ) لتحديد L نستخدم (٢٣ - ٥) بعد حساب $p_0, L_0, p_1, \bar{\lambda}, W_0, W$ على التوالي .

من (٢٤ - ١٢) .

$$p_0 = \left[\frac{(4^4)(3/4)^4 [1 - (3/4)^3]}{4! (1/4)} + \sum_{n=0}^4 \frac{3^n}{n!} \right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{2997}{512} + \frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} \right]^{-1} = (22.2285)^{-1} = 0.04499$$

من (٢٤ - ١٥) .

$$L_0 = \frac{(4^4)(3/4)^5}{4! (1/4)^2} [1 - (3/4)^3 - (1/4)(3)(3/4)^3](0.04499) = 0.4768 \text{ عربة}$$

باستخدام (٢٤ - ١٤) نجد أن

$$p_1 = \frac{(4^4)(3/4)^5}{4!} (0.04499) = 0.06406$$

ومن (٢٤ - ١٢)

$$\bar{\lambda} = 15(1 - 0.06406) = 14.04 \text{ في الساعة}$$

وأخيراً

$$W_0 = \frac{L_0}{\bar{\lambda}} = \frac{0.4768}{14.04} = 0.03396 \text{ ساعة}$$

$$W = W_0 + \frac{1}{\mu} = 0.03396 + 0.2 = 0.23396 \text{ ساعة}$$

$$L = \bar{\lambda} W = (14.04)(0.23396) = 3.285 \text{ عربة}$$

$$\lambda - \bar{\lambda} = 15 - 14.04 = 0.96 \text{ عربة في الساعة}$$

(ب)

يصل العملاء إلى محل حلالة بمعدل خمسة في الساعة . ومعدل الوصول الفعلي يتبع توزيع بواسون . يوجد حلاق واحد فقط في كل الأوقات وأربعة كراسي للعملاء الذين يصلون أثناء انشغال الحلاق . وتحدد تعليمات الحريق أكبر عدد ممكن من العملاء بالمحل بخمسة عملاء فقط . والعملاء الذين يصلون عندما يكون الصالون كاملاً لا يدخلون ، ويعتبر دخلهم خسارة على المحل . وزمن الخدمة للحلاق موزع أسياً ، ولكن يتغير متوسط زمن الخدمة بتغير عدد العملاء في المحل . فعندما يمتلئ المحل يحاول الحلاق الإسراع بالحلقة ، وبذلك يصبح أقل كفاءة . كما هو موضح بالجدول المرفق

العدد بالمحل	1	2	3	4	5
متوسط زمن الخدمة بالدقيقة	■	■	12	15	■

حدد : (أ) متوسط عدد الأشخاص بالمحل في نفس الوقت . (ب) الوقت المتوقع الذي تنتظرة العميل للحصول على الخدمة . (ج) نسبة الوقت الذي يكون فيه الحلاق بدون عمل .

هذا النظام ذو طاقة محدودة ، ولكن ليس نظام م / م / ١ ، لأن زمن الخدمة معتمد على الحالة . وبالرغم من ذلك .. فإن مقاييس الفعالية يمكن أن تحسب مباشرة بمجرد معرفة احتمالات الحالة المستقرة . يكون معدل الوصول إلى المحل لهذا النظام هو : في الساعة 5 = في الدقيقة (1/12) = λ لذلك يكون معدل الدخول إلى المحل في الدقيقة هو :

$$\lambda_n = \begin{cases} 1/12 & (n = 0, 1, 2, 3, 4) \\ 0 & (n = 5, 6, \dots) \end{cases}$$

ويكون متوسط معدل الخدمة في الدقيقة هو : $\mu_1 = 1/9, \mu_2 = 1/10, \mu_3 = 1/12, \mu_4 = 1/15, \mu_5 = 1/20$ وتعطى احتمالات الحالة المستقرة بالمعادلة (٢٤ - ١) ، كما في

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 = \frac{3}{4} p_0 & p_4 &= \frac{\lambda_3}{\mu_4} p_3 = \frac{25}{32} p_0 \\ p_2 &= \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_1 = \frac{5}{8} p_0 & p_5 &= \frac{\lambda_4}{\mu_5} p_4 = \frac{125}{96} p_0 \\ p_3 &= \frac{\lambda_2}{\mu_3} p_2 = \frac{5}{8} p_0 & p_n &= 0 \quad (n > 5) \end{aligned}$$

وبالتعديل نجد أن

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 5.0833 p_0 \quad \text{أو} \quad p_0 = 0.1967$$

ومن ثم $p_1 = 0.1475, p_2 = 0.1230, p_3 = 0.1230, p_4 = 0.1537, \text{ and } p_5 = 0.2561$.

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = 1(0.1475) + 2(0.1230) + 3(0.1230) + 4(0.1537) + 5(0.2561) = 2.658 \text{ عميل (أ)}$$

(ب) نستخدم (٢٣ - ٦) لتحديد W_0 بعد حساب $\bar{\lambda}$ ، L_q من (٢٤ - ٢)

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n = \frac{1}{12} (1 - p_5) = 0.06199 \text{ في الدقيقة}$$

and

$$(s_n = 1)$$

$$L_q = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) p_n = (1)(0.1230) + (2)(0.1230) + (3)(0.1537) + (4)(0.2561) = 1.8545 \text{ عميل}$$

لذلك

$$W_0 = \frac{1.8545}{0.06119} = 30.31 \text{ دقيقة}$$

(ج) يكون الحلاق بدون عمل عندما لا يكون هناك عملاء بالمحل . وهذا يحدث باحتمال $p_0 = 0.1967$. أو أقل من 20 في المئة من الزمن .

٢٤ - ١٠ محطة الخدمة المذكورة في المسألة (٢٤ - ٧) لها شعبية كبيرة ، لأنها تبيع البنزين بثمن أقل قليلاً من المنافسين . والتمن مع ذلك ليس قليلاً بشكل يتناسب مع طول فترة الانتظار في الصف ، لذلك فإن العملاء يخرجون من الصف طبقاً لدالة التخطي :

$$r(n) = \begin{cases} 0 & (n = 0, 1) \\ e^{n/2} & (n = 2, 3, 4) \end{cases}$$

حدد : (أ) متوسط عدد العربات في المحطة في أى وقت . (ب) عدد العربات المتوقع الذى يترك الصف في كل ساعة .
هذا النظام هو M/M/1/4 وفيه تخطي . بالتبادل .. يمكن النظر إليه على أنه نظام M/M/1 ، وفيه تخطي ، وفيه تراحم إجبارى عندما تصل حالة النظام إلى أربعة عملاء . ومن هذا المدخل الأخير ، تكون دالة التراحم هي :

$$b(n) = \begin{cases} 0 & (n = 0, 1, 2, 3) \\ 1 & (n = 4, 5, \dots) \end{cases}$$

وفي أى الطريقتين يكون معدل الوصول إلى المحطة هو $\lambda = 10 \text{ h}^{-1}$ في الساعة ، ومعدل خدمة العملاء هو $\mu = 30 \text{ h}^{-1}$ في الساعة ، كما في المسألة ٢٤ - ٧ . ويتبع ذلك أن معدل الوصول للعملاء داخل المحطة هو

$$\lambda_n = \begin{cases} 10 & (n = 0, 1, 2, 3) \\ 0 & (n = 4, 5, \dots) \end{cases}$$

ويكون متوسط معدل خدمة العملاء خلال النظام ، سواء بخدمتهم فعلاً أم تركهم يتركون الصف هو

$$\mu_1 = \mu + r(1) = 30 + 0 = 30$$

$$\mu_2 = \mu + r(2) = 30 + 2.718 = 32.718$$

$$\mu_3 = \mu + r(3) = 30 + 4.482 = 34.482$$

$$\mu_4 = \mu + r(4) = 30 + 7.389 = 37.389$$

لتحديد احتمالات الحالة المستقرة نستخدم (٢٤ - ١) ، ومنها نحسب مقاييس الفعالية المطلوبة مباشرة . لاحظ أن (٢٤ - ١٠) حتى (٢٤ - ١٢) ، والتي تفترض أزمنة خدمة أسية لكل العملاء ، لا تنطبق على هذه العملية .

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 = \frac{10}{30} p_0 = (0.3333) p_0$$

$$p_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_1 = \frac{10}{32.718} (0.3333) p_0 = (0.1019) p_0$$

$$p_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} p_2 = \frac{10}{34.482} (0.1019) p_0 = (0.02955) p_0$$

$$p_4 = \frac{\lambda_3}{\mu_4} p_3 = \frac{10}{37.389} (0.02955) p_0 = (0.007903) p_0$$

و $p_n = 0$ لكل قيم $n = 5, 6, \dots$ بالتعديل .

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = (1.473) p_0 \quad \text{أو} \quad p_0 = 0.6789$$

وبالتالى $p_1 = 0.2263$, $p_2 = 0.0692$, $p_3 = 0.0201$, and $p_4 = 0.0054$.

$$L = \sum_{n=1}^4 n p_n = 1(0.2263) + 2(0.0692) + 3(0.0201) + 4(0.0054) = 0.4466 \text{ عربة (أ)}$$

(ب) معدل ترك الصف ، بالعربة في كل ساعة هو دالة لحالة النظام ، ويكون $r(n)$. لذلك .. يكون العدد المتوقع للسيارات N التى يترك الصف في الساعة هو

$$N = \sum_{n=0}^4 r(n) p_n = (0)(0.6789) + (0)(0.2263) + (2.718)(0.0692) + (4.482)(0.0201) + (7.389)(0.0054) = 0.3181 \text{ عربة في الساعة}$$

مسائل مكاملة Supplementary Problems

٢٤ - ١١ يعمل موظفان في أحد المخازن ، ويمكن لكل منها التعامل مع 30 عميل في الساعة « بأزمة خدمة موزعة أسياً » . يصل العملاء إلى المخزن طبقاً لعملية بواسون بمعدل متوسط 40 في الساعة . حدد : (أ) نسبة الزمن التي يكون فيها الموظف بدون عمل . (ب) احتمال أن يكون هناك أكثر من عميلين منتظرين الخدمة في أي وقت .

٢٤ - ١٢ محطة مترو أنفاق بها خمسة تليفونات عامة . وخلال ساعات الذروة ، بعد الظهر ، يصل الأفراد الذين يرغبون في عمل المكالمات التليفونية إلى التليفونات بعملية بواسون ، بمعدل 100 في الساعة . متوسط المكالمات الواحدة هو دقيقتان وبزمن فعل موزع أسياً . حدد : (أ) الزمن المتوقع للفرد للانتظار لعمل المكالمات التليفونية بمجرد أن يصل إلى التليفون ، (ب) احتمال أن يزيد هذا الزمن عن دقيقة واحدة . (ج) عدد الأشخاص المتوقع أن يستخدموا أو ينتظروا التليفونات .

٢٤ - ١٣ في أحد البنوك موظفان إثنان ، أحدهما للإيداع ، والآخر للسحب . وزمن الخدمة لكل موظف موزع أسياً بمتوسط دقيقة واحدة . يصل العملاء إلى البنك بعملية بواسون ، بمعدل متوسط 40 في الساعة ؛ ومن المفترض (انظر المسألة ٢١ - ٢٦) أن كل من المودعين أو الساجين يشكلون صفوفاً منفصلة بعملية بواسون ، كل منهم بمعدل متوسط 20 في الساعة « ولا يوجد عميل مودع وساج في نفس الوقت » . يفكر البنك في تغيير النظام ، بحيث يعمل كل موظف للتعامل بالإيداع والسحب معاً . يتوقع البنك أن يزيد متوسط زمن الخدمة للموظف الواحد إلى 1.2 دقيقة ، ولكن يأمل أن هذا التنظيم سيمنع الصفوف الطويلة من أمام أحد الموظفين ، بينما يظل الآخر بدون عمل « وهو الوضع الذي يحدث من وقت لآخر في الحالة الحالية » . حلل النظامين بالنسبة لمتوسط الوقت العاطل للموظف ، وبالنسبة لعدد العملاء المتوقع في البنك في أي وقت .

٢٤ - ١٤ إحدى الشركات تعين خدمة تليفونية للإجابة على المكالمات التليفونية الواردة . يعمل بهذه الخدمة عامل واحد له القدرة على الاحتفاظ بمكالمتين على الخط إذا كان العامل مشغولاً بمكالمة أخرى . إذا كانت الخطوط الثلاثة مشغولة (واحد مع العامل ، واثنان للاحتفاظ بالعميلين على الخط) يتلقى العميل إشارة « مشغول » . تصل المكالمات إلى الشركة طبقاً لعملية بواسون بمعدل متوسط 20 في الساعة . وبمجرد الاتصال بالعامل يكون زمن المكالمات موزع أسياً بمتوسط دقيقة واحدة . حدد : (أ) احتمال أن طالب المكالمات يتلقى إشارة « مشغول » . (ب) احتمال أن طالب المكالمات يبقى منتظراً على الخط . (ج) احتمال أن طالب المكالمات يتحدث مع العامل بمجرد الاتصال .

٢٤ - ١٥ أحد محلات الأكل الصينية به مكان لاستيعاب خمسة عملاء على الأكثر . وخلال أشهر الشتاء يلاحظ أنه عندما يصل العملاء ويكون المحل ممتلئاً ، فإنه لا يقف أحد خارج المحل في الطقس البارد ، ويذهبون إلى محل آخر . يصل العملاء إلى المحل بعملية بواسون بمعدل متوسط 15 في الساعة . يخدم المحل العملاء بمعدل متوسط 15 في الساعة بزمن خدمة موزع أسياً . يعمل بالمحل صاحبه فقط الذي يخدم العملاء بأسلوب من يحضر أولاً يُخدم أولاً . حدد : (أ) متوسط عدد العملاء في المحل في أي وقت . (ب) الزمن المتوقع الذي يقضيه العميل لانتظار الخدمة . (ج) المعدل المتوقع لخسارة العائد نتيجة ضيق المكان بالمحل إذا كان متوسط فاتورة العميل 10.00 دولارات .

٢٤ - ١٦ توجه إحدى شركات الأوتوبيسات عربتها إلى مكان الخدمة لإجراء الصيانة كل 25000 ميل . تفتح محطة الخدمة لمدة 24 ساعة كل يوم ، وبها طاقم خدمة واحد يستطيع العمل بأوتوبيس واحد في الوقت الواحد . وزمن خدمة الأوتوبيس الواحد موزع أسياً بمعدل متوسط 12 في اليوم . وعند السائقين تعليمات بعدم دخول محطة الخدمة إذا كان هناك أربعة أوتوبيسات أو أكثر ، ويعودون إلى مكان آخر للضبط . حدد : (أ) الزمن المتوقع الذي يقضيه الأوتوبيس بمكان الخدمة إذا بقي هناك . (ب) الخسارة التقديرية المتوقعة للشركة من ضيق مكان الخدمة إذا كانت تكلفة إرسال العربة لمكان الخدمة وعودتها بدون إجراء الخدمة هي 80 دولاراً .

٢٤ - ١٧ شركة السيارات المذكورة في المسألة ٢٤ - ١٦ تفكر في زيادة الأطقم إلى طاقمى خدمة ذى كفاءة متساوية . تكلفة إضافية طاقم زيادة هي 300 دولار في اليوم . هل توصي بعمل هذا التعديل ؟

٢٤ - ١٨ في أحد أقسام مستشفى خمس غرف . يصل مرضى هذا القسم إلى المستشفى بعملية بواسون بمعدل متوسط 12 في اليوم . ويقومون بغرف القسم إذا كانت متاحة ، وإلا يُوجهون إلى مستشفى آخر . يشغل المريض الغرفة لمدة 6 ساعات في المتوسط . ويوزع الزمن أسياً حول هذا المتوسط . حدد : (أ) معدل اشغال الغرف (النسبة المئوية للغرف المشغولة في المدى الطويل) . (ب) معدل توجيه المرضى إلى مستشفيات أخرى .

٢٤ - ١٩ في أحد المخازن موظفان اثنان ، يستطيع كل منهما خدمة العملاء بمعدل متوسط 60 في الساعة ، ويوزع زمن الخدمة أسياً . طاقة المخزن خمسة عملاء ، دون السماح بالانتظار بالخارج . يصل العملاء إلى المخزن بعملية بواسون ، حيث يعتمد معدل الوصول على عدد الأشخاص بالمخزن كما يلي :

العدد بالمخزن	0	1	2	3	4	5
معدل الوصول بالساعة	100	110	120	140	170	200

حدد : (أ) عدد العملاء المتوقع أن يكونوا معاً بالمخزن . (ب) الزمن المتوقع الذي يجب أن ينتظره العميل لانتظار الخدمة . (ج) المعدل المتوقع الذي يُفقد به العملاء نتيجة ضيق المكان .

٢٤ - ٢٥ بإحدى محطات غسل العربات غرفة غسل لثلاث عربات ، وممران لفصل عربتين . كل ممر يستوعب عربة واحدة في الوقت الواحد . تصل العربات بعملية بواسون بمعدل متوسط 20 في الساعة ، ولا يسمح لهم بالدخول إذا كانت المحطة ممتلئة . يتم الفسيل والتنظيف يدوياً . ويصح التوزيع الأسى . وفي الظروف العادية يخدم كل ممر العربة في 5 دقائق . ومع ذلك .. إذا كانت عربتان أو أكثر منتظرتي الخدمة ، فإن عملية الفسيل تم بالخير لتقليل زمن الخدمة إلى 4 دقائق . حدد : (أ) العدد المتوقع للعربات بمكان الفسيل . (ب) الزمن المتوقع الذي تقضيه العربة بمكان الفسيل إذا سُمح لها بالدخول .

٢٤ - ٢٦ يصل العملاء إلى محل أكل صغير بعملية بواسون بمعدل متوسط 30 في الساعة . يستطيع المحل استيعاب أربعة عملاء على الأكثر ، وعندما يكون ممتلئاً لا يُسمح للعملاء بالدخول ، ويفقد المحل التعامل معهم ، وصاحب المحل هو مقدم الخدمة الوحيد ، ويوزع زمن خدمته أسياً طالما يوجد ولو عميل واحد في المحل . ومتوسط زمن الخدمة هو 5 دقائق . ويصبح صاحب المحل « مع ذلك ، أكثر كفاءة إذا امتلأ المحل ، ويقلل محادثاته مع العملاء » ويخفض متوسط زمن الخدمة دقيقة واحدة لكل عميل في صف الانتظار للخدمة . حدد : (أ) عدد العملاء المتوقع أن يكونوا معاً بالمحل (دون صاحب المحل) . (ب) متوسط زمن الخدمة لصاحب المحل .

٢٢ - ٢٤ حدد احتمالات حالة الاستقرار لنظام $M/M/1$ وفيه تراحم « إذا كان هناك 20 في المئة فرصة تخطي عندما يكون هناك عميل أو أكثر في النظام .

٢٣ - ٢٤ حل المسألة ٢٤ - ٢١ إذا كان احتمال الزبائن الذين لا ينتظرون بالصف (التراحم) هو $1 - (\frac{1}{2})^n$ عندما تكون حالة النظام $n = 0, 1, 2, 3$

٢٤ - ٢٤ حل المسألة ٢٤ - ١٥ إذا ترك العملاء الصف طبقاً لدالة التخطي

$$r(n) = \begin{cases} 0 & \text{في الساعة } (n = 0, 1) \\ n^2 & \text{في الساعة } (n = 2, 3, 4, 5) \end{cases}$$

٢٥ - ٢٤ ترجم (٢٤ - ١) $\mu_n p_n = \lambda_{n-1} p_{n-1}$ بدلالة معدلات الانتقال .

٢٦ - ٢٤ بين أن $L = L_q + sp$ لنظام $M/M/s$

٢٧ - ٢٤ اشتق (٢٤ - ١٣) ، (٢٤ - ١٤) .

٢٨ - ٢٤ بين أن احتمالات الحالة المستقرة لنظام $M/M/s/K$ تنخفض إلى احتمالات نظام $M/M/1/K$ إذا كانت $s = 1$

٢٩ - ٢٤ استنتج أنه لنظام $M/M/s/K$

$$L = L_q + s - \sum_{n=0}^{s-1} (s-n)p_n$$

٣٠ - ٢٤ في عملية الصفوف المشروحة في المسألة (٢٤ - ٨) حدد : أولاً احتمالات الحالة المستقرة مباشرة من (٢٤ - ١) واستخدمها في حساب L . قارن إجابتك بنتائج المسألة ٢٤ - ٨ (أ) .

٣١ - ٢٤ في نظام $M/M/\infty$ عملية صفوف لها نمط وصول بواسون بمعدل متوسط λ ؛ وبه عدد مقدمي الخدمة يستطيعون استيعاب كل العملاء الذين يصلون إلى النظام ؛ ومقدمي الخدمة لهم أزمدة خدمة مستقلة وموزعة أسياً ببارامتر μ ؛ وكذلك طاقة خدمة غير محدودة . ينطبق هذا النموذج دائماً على المنشآت ذات الخدمة الذاتية (اخدم نفسك) . بين أنه لنظام $M/M/\infty$ ، فإن احتمالات الحالة المستقرة تكون توزيع بواسون ذات بارامتر $\rho = \lambda/\mu$ ، ثم حدد L, W, W_q, L_q

٣٢ - ٢٤ يُقبل الطلاب في دورة تدريبية بالمراسلة في الدوائر الكهربائية بمجرد التسجيل ، ثم يستكملون الدراسة في أماكنهم . زمن استكمال الدراسة يتبع التوزيع الأسّي بمتوسط 7 أسابيع . والتسجيلات الجديدة للدورة تتبع توزيع بواسون بمعدل متوسط 50 كل أسبوع . حدد : (أ) عدد الطلبة المتوقع تسجيلهم للدراسة . (ب) احتمال أن يأخذ الطالب أكثر من 7 أسابيع لاستكمال الدورة . (ملحوظة : استخدم نتائج المسألة ٢٤ - ٣١) .

٣٣ - ٢٤ نظام صفوف ذا مصدر محدود هو نظام له عدد عملاء محدود . هذا العدد يجب أن يكون صغيراً بدرجة كافية ، بحيث ، إنه لا يكون من المناسب تقريب عدد العملاء بواسطة المصادر المختلطة . كما هو الحال في كل نظم الصفوف الأخرى بالكتاب . افترض أن المصدر يتكون أصلاً من N_0 عميل . وأزمدة وصولهم إلى نظام الخدمة هي عدد N_0 زمن تمثل متغيرات عشوائية مستقلة موزعة أسياً كل منها ببارامتر λ . وعند لحظة استكمال الخدمة ، يعود العميل إلى المصدر كتحميل جديد . لذلك .. عندما تكون حالة النظام n ، تكون حالة المصدر $N_0 - n$ ، وهذا يعطى :

$$\lambda_n = (N_0 - n)\lambda \quad (n = 0, 1, \dots, N_0)$$

وأكثر من ذلك .. وعند $s < N_0$ مقدم خدمة لهم أزمات خدمة مستقلة موزعة أسياً لهم بارامتر μ ، فإن

$$(Y) \quad \mu_n = \begin{cases} n\mu & (n = 1, 2, \dots, s) \\ s\mu & (n = s+1, s+2, \dots, N_0) \end{cases}$$

أوجد احتمالات الحالة المستقرة بحرفة $\rho = \lambda / s\mu$ ، وقارن بحالة المصدر المحدود (٢٤ - ٥) ، (٢٤ - ٦) .

$$٢٤ - ٢٤ \quad \text{استنتج مباشرة من (١) في المبالغة (٢٤ - ٣٣) أن } \bar{\lambda} = (N_0 - L)\lambda$$

٢٤ - ٢٥ شركة تمتلك خمس ماكينات ضعيفة تلف بسرعة ، وتستخدم موظفين اثنين لإصلاح هذه الماكينات . كل موظف يستطيع إصلاح الماكينة في ساعتين في المتوسط ، ويوزع زمن الخدمة أسياً حول متوسط . والماكينة التي يتم إصلاحها تعمل في المتوسط 12 ساعة قبل أن تلف مرة أخرى . وزمن التشغيل موزع أسياً حول هذا المتوسط . حدد : (أ) عدد الماكينات المتوقع أن يكون تحت التشغيل في أي وقت . (ب) نسبة الوقت الذي لا تكون فيه أي ماكينة تحت التشغيل . (ملحوظة : استخدم نتائج المسائل ٢٤ - ٣٣ ، ٢٤ - ٢٤) .

٢٤ - ٢٦ في عملية صفوف عامة « ارمز إلى متوسط عدد العملاء في الخدمة بالرمز S (وهو نفسه متوسط عدد مقدمي الخدمة المنشغلين) في كل الفترات التي لا يكون فيها النظام فارغاً . استنتج من صيغ ليتل أن متوسط زمن الخدمة لكل العملاء تحت الخدمة : $1/\bar{\mu}$ يمكن التعبير عنه كالتالي :

$$\frac{1}{\bar{\mu}} = \frac{(1 - \rho_0)S}{\lambda}$$

إجابات المسائل المكملية

Answers to Supplementary Problems

CHAPTER 1 الفصل الأول

$$\begin{aligned} z &= 28x_1 + 31x_2 && \text{تعظيم} \\ 3.5x_1 + 4x_2 &\leq 50 && \text{علمياً بأن} \end{aligned} \quad ١٦ - ١$$

عند كلاً من المتغيرين لا سلبى

لاحظ أن : قيود الأعداد الصحيحة للمتغيرات غير مطلوبة ، حيث يمكن إنهاء المماريات المستكملة جزئياً في الأسابيع التالية .

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 8x_5 + 8x_6 && \text{تصغير} \\ 20x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 40x_4 + 45x_5 + 30x_6 &\geq 70 && \text{علمياً بأن} \\ 50x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 25x_4 + 50x_5 + 20x_6 &\geq 100 \\ 4x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 10x_4 + 9x_5 + 10x_6 &\geq 20 \end{aligned} \quad ١٧ - ١$$

عند كل المتغيرات لا سلبية

لاحظ أن : حيث أن الغذاء F ليس أحسن من الغذاء C الأخص ثمناً ، فإن لن يستخدم الغذاء F في الخلطة المثلى . لذلك ، فإن البرنامج يمكن أن يبسط بالتعويض $x_6 = 0$

$$\begin{aligned} z &= 6x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 && \text{تعظيم} \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 &\leq 480 && \text{علمياً بأن} \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &\leq 400 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &\leq 400 \\ x_1 &\geq 50 \\ x_2 + x_3 &\geq 100 \\ x_4 &\leq 25 \end{aligned} \quad ١٨ - ١$$

كل المتغيرات لا سلبية

$$\begin{aligned} z &= 1.50x_1 + 0.75x_2 + 2.00x_3 + 1.75x_4 + 0.25x_5 && \text{تصغير} \\ 0.2x_1 - 0.15x_2 + 0.8x_3 - 0.2x_4 - 0.2x_5 &\geq 0 && \text{علمياً بأن} \\ 0.3x_1 &- 0.1x_3 + 0.9x_4 - 0.1x_5 &\geq 0 \\ -0.05x_1 + 0.15x_2 - 0.05x_3 - 0.05x_4 - 0.05x_5 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 500 \\ x_1 &\leq 200 \\ x_2 &\leq 400 \\ x_3 &\leq 100 \\ x_4 &\leq 50 \\ &\leq 900 \end{aligned} \quad ١٩ - ١$$

كل المتغيرات لا سلبية

$$z = 20x_1 + 17x_2 + 15x_3 + 15x_4 + 10x_5 + 8x_6 + 5x_7 \quad \text{تعظيم}$$

$$145x_1 + 92x_2 + 70x_3 + 70x_4 + 84x_5 + 14x_6 + 47x_7 \leq 250 \quad \text{علمياً بأن}$$

$$x_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, 7)$$

٢٠ - ١

عند كل المتغيرات صحيحة ولا سلبية

٢١ - ١ تكاليف تسليم الموديل من المصنع إلى الصانع هي تكلفة الإنتاج بالإضافة إلى تكلفة الشحن

$$z = (1.10 + 0.11)x_{11} + (1.10 + 0.13)x_{12} + \dots + (1.03 + 0.15)x_{34} \quad \text{تصغير}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 7500 \quad \text{علمياً بأن}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 10000$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 8100$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 4200$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 8300$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 6300$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 2700$$

كل المتغيرات صحيحة ولا سلبية

٢٢ - ١ حيث أن الاصناف الأخرى ليست غالية الثمن ، فإنه لن يضاف أى لحم أكثر من المطلوب دغ x_1, x_2, x_3 على التوالى تمثل الكمية بالرطل من الماسبورجر ، فطائر التزعة ، أرغفة اللحم .

$$(200 - 0.2x_1 - 0.1x_3) + (800 - 0.5x_1 - 0.5x_2 + 0.4x_3) + (150 - 0.2x_2 - 0.3x_3) \quad \text{تصغير}$$

$$0.2x_1 + 0.1x_3 \leq 200 \quad \text{علمياً بأن}$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 + 0.4x_3 \leq 800$$

$$0.2x_2 + 0.3x_3 \leq 150$$

كل المتغيرات لا سلبية

$$\text{يكافئ الهدف} \quad z = 0.7x_1 + 0.7x_2 + 0.8x_3$$

$$z = 145x_{11} + 122x_{12} + 130x_{13} + \dots + 80x_{54} + 111x_{55} \quad \text{تصغير}$$

٢٣ - ١

$$\sum_{j=1}^5 x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5) \quad \text{علمياً بأن}$$

$$\sum_{i=1}^5 x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

عند كل المتغيرات صحيحة ولا سلبية

$$z = 210000x_1 + 190000x_2 + 182000x_3 \quad \text{تصغير}$$

٢٤ - ١

$$40x_1 + 65x_2 \geq 1500 \quad \text{علمياً بأن}$$

$$35x_1 + 53x_3 \geq 1100$$

$$x_1 \leq 30$$

$$x_2 \leq 30$$

$$x_3 \leq 30$$

كل المتغيرات صحيحة ولا سلبية

$$z = 250x_1 + (600 - x_2)x_2 \quad \text{تعظيم}$$

٢٥ - ١

$$0.25x_1 + 0.40x_2 \leq 500 \quad \text{علماً بأن}$$

$$0.75x_1 + 0.60x_2 \leq 1200$$

عند كلاً من المتغيرين لا سلبى

٢٦ - ١ الطاقة الوضعية للنظام (مستوى مناسب) تتناسب مع $c_1 + c_2 + c_3$ وهذه الطاقة حد أدنى عند الاتزان .

CHAPTER ■ : الفصل التالي :

٧ - ٢ د ع . $x_2 = x_4 - x_3$ and $x_3 = x_6 - x_7$ ، عند كل متغير جديد لا سلبى .
اضرب القيد الأول في -1 .

$$X = [x_1, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9]^T \quad C = [2, -1, 1, 4, -4, 0, 0]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 2 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} x_8 \\ x_9 \end{bmatrix}$$

$$X = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \quad C = [10, 11, 0, 0, 0]^T \quad A - ٢$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 150 \\ 200 \\ 175 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$X = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]^T \quad C = [10, 11, 0, 0, 0, -M, -M, -M]^T \quad ٩ - ٢$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 150 \\ 200 \\ 175 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix}$$

$$X = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]^T \quad C = [3, 2, 4, 6, 0, 0, M, M]^T \quad ١٠ - ٢$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1500 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \end{bmatrix}$$

$$X = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \quad C = [6, 3, 4, M, M]^T \quad ١١ - ٢$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

١٢ - ٢ د ع . $x_4 = x_5 - x_6$ ، عند كل متغير جديد لا سلبى . لذلك يمكن استخدام x_5 و x_3 كجزء من الحل المبدئى بمجرد قسمة القيد الثانى على 2 .

$$X = [x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7]^T \quad C = [7, 2, 3, 1, -1, -M]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2.5 & 4 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} x_7 \\ x_5 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$X = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}]^T \quad C = [10, 2, -1, 0, 0, 0, 0, M, M, M]^T \quad ١٣ - ٢$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 50 \\ 10 \\ 30 \\ 7 \\ 60 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_8 \\ x_6 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix}$$

الفصل الثالث :

١٦ - ٣ لا $[1, 2]^T$ ليست على خط الشريحة بين النقطتين الأخريتين .

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad ١٧ - ٣$$

١٨ - ٣ (ب) ، (ج) هما حلان ممكنان أساسيان ؛ (ب) تتعرف .

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_7 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ١٩ - ٣$$

٢٠ - ٣ (ا) ، (ج) ، (د) هم حلول ممكنة أساسية متفرقة .

٢١ - ٣ دع $(X) = C^T X$ والترض الحد الأدنى لها ، m ، عند P_1 and P_2 فإنه عند $\beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0, \beta_1 + \beta_2 = 1$ ،

$$f(\beta_1 P_1 + \beta_2 P_2) = \beta_1 f(P_1) + \beta_2 f(P_2) = \beta_1 m + \beta_2 m = m$$

٢٢ - ٣ إذا كانت المجموعة الفرعية معتمدة خطياً ، فإن الثوابت اللاصفرية التي حققت (١ - ٣) لهذه المجموعة الفرعية ستحقق أيضاً (١ - ٣) لكل المجموعة بأخذ كل الثوابت الأخرى أصفاراً . وهذا سيتضمن أن المجموعة معتمدة خطياً وهي ليست كذلك .

٢٣ - ٣ في (١ - ٣) خذ الثابت أمام المتجه المنصري ليكون لاصفري وكل الثوابت الأخرى أصفاراً .

الفصل الرابع :

$$x_1^* = \frac{16}{5}, \quad x_2^* = \frac{13}{5}, \quad z^* = \frac{42}{5} \quad ١١ - ٤$$

$$x_1^* = \frac{5}{3}, \quad x_2^* = \frac{2}{3}, \quad z^* = \frac{7}{3} \quad ٩ - ٤$$

$$x_1^* = 1285.7, \quad x_2^* = 1857.1; \quad z^* = -3142.8 \quad ١٢ - ٤$$

$$x_1^* = \frac{9}{4}, \quad x_2^* = \frac{3}{2}, \quad z^* = \frac{51}{4} \quad ١٠ - ٤$$

١٣ - ٤ لا يوجد حل ممكن

$$x_1^* = 0, x_2^* = 700, x_3^* = 500, x_4^* = 1000, x_5^* = 0, x_6^* = 0; z^* = 27600. \quad ١٤ - ٤$$

(لا ينحرف الحل فحسب بل يحتوى الحل على متغير صناعى صفرى ضمن المتغيرات الأساسية . هذا يمكن أن يحدث عندما يكون واحد أو أكثر من القيود غير مطلوب (زيادة) . وهنا يكون القيد الأخير هو مجموع القيدين الأولين ناقص مجموع الاثنين التاليين) .

$$x_1^* = 23.8095, x_2^* = 32.1429; z^* = 591.667. \quad ١٥ - ٤$$

$$x_1^* = 0, x_2^* = 423.077, x_3^* = 0, x_4^* = 153.846; z^* = 1769.23. \quad ١٦ - ٤$$

١٧ - ٤ لا يوجد حد أعلى

$$x_1^* = 6.66667, x_2^* = 0.555556, x_3^* = 0; z^* = 41.6667. \quad ١٨ - ٤$$

$$x_1^* = 30, x_2^* = 0, x_3^* = 30; z^* = 270. \quad ١٩ - ٤$$

$$x_1^* = 69090.9 \text{ bbl}, x_2^* = 17272.7 \text{ bbl}, x_3^* = 2272.73 \text{ bbl}, x_4^* = 2727.27 \text{ bbl}; z^* = \$235454. \quad ٢٠ - ٤$$

$$x_1^* = 0.90909 \text{ oz}, x_2^* = 1.81818 \text{ oz}, x_3^* = x_4^* = x_5^* = x_6^* = 0; z^* = 7.27273\$. \quad ٢١ - ٤$$

$$x_1^* = 50, x_2^* = 0, x_3^* = 145, x_4^* = 10; z^* = \$1250. \quad ٢٢ - ٤$$

$$x_1^* = 93.75 \text{ gal}, x_2^* = 125 \text{ gal}, x_3^* = 56.25 \text{ gal}, x_4^* = 0, x_5^* = 225 \text{ gal}; z^* = \$403.125. \quad ٢٣ - ٤$$

$$x_1^* = 937.5 \text{ lb}, x_2^* = 562.5 \text{ lb}, x_3^* = 125 \text{ lb}; z^* = 0 \text{ lb}. \quad ٢٤ - ٤$$

الفصل الخامس : CHAPTER 5

$$z = 4w_1 + 10w_2 + 6w_3 \quad \text{تعظيم} \quad ١٣ - ٥$$

$$2w_1 + 4w_2 + w_3 \leq 12 \quad \text{علماً بأن}$$

$$6w_1 + 2w_2 + w_3 \leq 26$$

$$5w_1 + w_2 + 2w_3 \leq 80$$

عند كل المتغيرات لا سلبية

١٤ - ٥ اضرب القيد الأخير في الحل الأول في -1 .

$$z = 6w_1 + 5w_2 - 7w_3 \quad \text{تعظيم}$$

$$2w_1 - w_3 \leq 3 \quad \text{علماً بأن}$$

$$5w_1 + 4w_2 + 6w_3 \leq 2$$

$$-2w_2 - 3w_3 \leq 1$$

$$w_1 + 2w_2 - 7w_3 \leq 1$$

$$w_1 + 3w_2 - 5w_3 \leq 3$$

عند : كل المتغيرات لا سلبية

$$z = 25w_1 + 30w_2 + 35w_3 \quad \text{تصغير}$$

١٥ - ٥

$$7w_1 + 2w_2 + 6w_3 \geq 6 \quad \text{علمياً بأن}$$

$$-11w_1 - 8w_2 - w_3 \leq 1$$

$$3w_1 + 6w_2 + 7w_3 \geq 3$$

عند كل المتغيرات لا سلبية

(الطرف الأيمن للقيود التالي آلى موجب)

١٦ - ٥ إدخال متغير زائد w_4 فى القيد الأول

$$z = 16w_1 + 20w_2 \quad \text{تصغير}$$

$$8w_1 + 3w_2 = 10 \quad \text{علمياً بأن}$$

$$6w_1 \geq 15$$

$$-w_1 + 2w_2 \geq 20$$

$$w_1 - w_2 \geq 25$$

$$-w_1 = 11$$

(لاحظ أن هذا البرنامج ليس له حل ممكن) .

$$z = w_1 + 4w_2 \quad \text{تعظيم}$$

١٧ - ٥

$$3w_2 \leq 1 \quad \text{علمياً بأن}$$

$$w_1 + w_2 \leq 2$$

$$w_1 + 3w_2 \leq 1$$

١٨ - ٥ فى كلا الحالتين $z^* = 72$

١٩ - ٥ $x_3 = 1.25, x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0; z^* = 2.5$

٢٠ - ٥ اضرب كل قيد فى 1- فيكون الازدواج المتماثل هو

$$z = -6w_1 - 12w_2 - 4w_3 \quad \text{تصغير}$$

$$-6w_1 - 4w_2 - w_3 \geq 5 \quad \text{علمياً بأن}$$

$$-w_1 - 3w_2 - 2w_3 \geq 2$$

عند : كل المتغيرات لا سلبية

البرنامج ليس له حل ممكن .

$$z = 5w_1 - 5w_2 \quad \text{تعظيم}$$

٢١ - ٥

$$w_1 + w_2 \leq -1 \quad \text{علمياً بأن}$$

$$-w_1 - w_2 \leq -1$$

٢٢ - ٥ المتغير المساعد الثانى فى الحل الأمثل للبرنامج الأول . x_3 يكون موجباً ، لذلك w_3 يجب أن يكون صفراً (كما هو فى الصف الأخير من جدول 2)

$$x_1^* = 1/3, x_2^* = 0, x_3^* = 2/3; w_1^* = 0, w_2^* = 1/3. \quad ٢٢ - ٥$$

٢٤ - ٥ من نتائج المسألة ■ - ٩

$$B^T W_0 = C^T X_0 \geq B^T W$$

و

$$C^T X_0 = B^T W_0 \leq C^T X$$

لذلك ، W_0 تكون مثل ، X_0 تكون مثل .

CHAPTER 6 الفصل السادس

$$x_1^* = 1, x_2^* = 3, x_3^* = 0; z^* = 7. \quad ٩ - ٦$$

$$x_1^* = x_2^* = x_3^* = 0, x_4^* = 2; z^* = 6. \quad ١٠ - ٦$$

$$x_1^* = 0, x_2^* = 7, x_3^* = 1; z^* = 71. \quad ١١ - ٦$$

١٢ - ٦ غير ممكن

١٣ - ٦ عدل المواقع ■ , C , D , F لساعات 55 طن / اسبوع

CHAPTER 7 : الفصل السابع

$$x_1^* = 1, x_2^* = 4, x_3^* = 0; z^* = 37. \quad ٨ - ٧$$

$$x_1^* = 3, x_2^* = 0; z^* = \$360. \quad ٩ - ٧$$

$$x_1^* = 1, x_2^* = 3, x_3^* = 0; z^* = 7. \quad ١٠ - ٧$$

$$x_1^* = x_2^* = x_3^* = 0, x_4^* = 2; z^* = 6. \quad ١١ - ٧$$

$$x_1^* = 0, x_2^* = 7, x_3^* = 1; z^* = 71. \quad ١٢ - ٧$$

$$x_1^* = 1, x_2^* = 3, x_3^* = 0; z^* = 7. \quad ١٣ - ٧$$

CHAPTER 8 الفصل الثامن

٩ - ٨ تكلفة النقل تساوى تكلفة الانتاج زائد تكلفة الشحن .

	I	II	III	IV	V رمي	الإمداد	u_i
A	1.21	1.23	1.19	1.29	0	7500	0
	3200	200	(0)	(0.06)	4100		
B	1.07	1.11	1.05	1.09	0	10 000	-0.14
	1000	(0.02)	6300	2700	(0.14)		
C	1.17	1.16	1.15	1.18	0	8100	-0.07
	(0.03)	8100	(0.03)	(0.02)	(0.07)		
الاحتياج	4200	8300	6300	2700	4100		
u_j	1.21	1.23	1.19	1.23	0		

يُنتج المصنع A 3200 وحدة للعميل I ، 200 للعميل II ، ويبقى بطاقة غير مشغولة . وينتج المصنع B 1000 وحدة للعميل I ، 6300 للعميل III ، 2700 للعميل IV ؛ وينتج المصنع C 8100 وحدة للعميل II

٩٠ - ٨

	1	2	3	4	5	الاحتياج	u_i
1	145	122	130	95	115	1	95
	(18)	(17)	(11)	0	1		
2	80	63	85	48	78	1	48
	0	(5)	(13)	1	(10)		
3	121	107	93	69	95	1	69
	(20)	(28)	1	0	(6)		
4	118	83	116	80	105	1	73
	(13)	1	(19)	(7)	(12)		
5	97	75	120	80	111	1	65
	1	0	(31)	(15)	(26)		
الاحتياج	1	1	1	1	1		
u_j	32	10	24	0	20		

المحامي 1 للحالة 5 ، المحامي 2 للحالة 4 ، المحامي 3 للحالة 3 ، المحامي 4 للحالة 2 ، المحامي 5 للحالة 1

	1	2	3	4 وهي	الإمداد	u_i
1	92 (7)	89 (1)	90 320 000	0 (3)	320 000	88
2	91 (3)	91 120 000	95 (2)	0 150 000	270 000	91
3	87 100 000	90 60 000	92 30 000	0 (1)	190 000	90
الاحتياج	100 000	180 000	350 000	150 000		
v_j	-3	0	2	-91		

البائع 1 التسليم 320000 جالون إلى المطار 3 ، البائع 2 لتسليم 120000 جالون للمطار 2 ويبقى عنده 150000 جالون ؛ البائع 3 تسليم 100000 جالون ، 60000 جالون ، 30000 جالون ، على التوالي للمطارات 1 ، 2 ، 3 .

١٢ - ٨ تعظيم الربح يكافئ تصغير الربح السالب .

	1	2	3	4	الإمداد	u_i
A	-10 1800	-6 700	-6 (1)	-4 (2)	2500	0
B	-2 (8)	-6 (0)	-7 550	-6 1550	2100	0
وهي	0 (4)	0 1600	0 (1)	0 200	1800	6
الاحتياج	1800	2300	550	1750		
v_j	-10	-6	-7	-6		

المصنع A لإمداد المحلات 1 ، 2 ، 1800 ، 7000 رغيف على التوالي ؛ المصنع B لإمداد المحلات 3 ، 4 ، 550 ، 1550 رغيف على التوالي .

٤	الامداد	المدينة 3 الأخمين	المدينة 3 الأكبر	المدينة 2 الأخمين	المدينة 2 الأكبر	المدينة 1 الأخمين	المدينة 1 الأكبر	
0	1.100	6	6	3	3	3	3	1
		(3)	0.195	0.470	0.260	0.175	(0)	
-2	0.900	7	7	4	4	1	1	2
		(6)	(3)	(3)	(3)	0.575	0.325	
-3	0.980	0	100	0	100	0	100	3 وهي
		0.650	(97)	0.330	(100)	(0)	(100)	
		0.650	0.195	0.800	0.260	0.750	0.325	الامداد
		3	6	3	3	3	3	٥

١٤ - ٨ إذا كانت C مطروحة من كل عنصر في الصف رقم d ، من كل عنصر في العمود رقم 1 فإن الهدف الجديد Z^1 يرتبط بالهدف القديم ، Z ، كما : $Z^1 = Z - ca_1 - db_1$ ، لذلك $z^1 - z$ يكون ثابتا ، وأي تخصيص يصغر الهدف الواحد يصغر الهدف الآخر .

٩ - الفصل التاسع :

١٠ - ٩

٤	الامداد	4 وهي	3	2	1	
-5	1	0	41	38	35	شهر 1 عادي
		(5)	(6)	(0)	1	
-1	2	0	45	42	39	شهر 1 إضافي
		(1)	(6)	1	1	
0	2	0	46	43	1000	شهر 2 عادي
		1	(6)	1	(960)	
0	2	0	50	47	1000	شهر 2 إضافي
		2	(10)	(4)	(960)	
0	3	0	40	1000	1000	شهر 3 عادي
		1	2	(957)	(960)	
0	2	0	45	1000	1000	شهر 3 إضافي
		2	(5)	(957)	(960)	
		6	2	2	2	الطلب
		0	40	43	40	٥

	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	يناير	فبراير	مارس	الإمداد	٢٤
أغسطس	73 (0)	83 (0)	93 4.5	103 2.2	113 3.1	0 2.7	12.5	0
سبتمبر	68 7.1	78 3.9	88 (0)	98 (0)	108 (0)	0 (5)	11.0	-3
أكتوبر	1000 (935)	75 9.3	85 6.2	95 (0)	105 (0)	0 (8)	9.5	-8
نوفمبر	1000 (968)	1000 (958)	52 8.1	62 (0)	72 (0)	0 (41)	8.1	-41
ديسمبر	1000 (982)	1000 (972)	1000 (962)	48 5.5	58 (0)	0 (55)	5.5	-55
الطلب	7.1	13.2	12.8	7.7	3.1	2.7		
٥٦	73	83	93	103	113	0		

	2	3	4	6	7 و ٧	الإمداد	٢٤
1	5 20	3 (11)	3 (1)	100 (91)	0 (8)	20	2
2	0 35	100 (113)	100 (103)	4 35	0 (13)	70	-3
3	14 (1)	0 70	10 10	100 (83)	0 10	90	10
4	3 40	100 (110)	0 30	8 (1)	0 (10)	70	0
5	100 (91)	100 (104)	6 30	15 (2)	0 (4)	30	6
الاحتياج	95	70	70	35	10		
٥٧	3	-10	0	7	-10		

جدول

	3	4	5	6	7	8. وهمي	الإمداد	٤
1	578 135	592 15	10 000 (7094)	10 000 (7101)	10 000 (7106)	0 (10)	150	578
2	615 (27)	602 65	10 000 (7084)	10 000 (7091)	10 000 (7096)	0 105	170	585
3	0 123	10 000 (9936)	2328 75	2321 68	2335 (19)	0 (588)	320	0
4	10 000 (10 014)	0 249	2320 (6)	2313 (6)	2302 80	0 (602)	320	-14
الإجمالي	320	320	75	60	80	105		
٥	0	14	2328	2321	2316	-588		

75 وحدة من الموقع || تمر خلال الموقع 3 إلى الموقع 5 || 60 وحدة من الموقع || تمر خلال الموقع 3 إلى الموقع 6 ،
 15 وحدة من الموقع ،
 1 تمر خلال الموقع 4 إلى الموقع 7 ، 65 وحدة من الموقع 2 تمر خلال الموقع 4 إلى الموقع 7 .

	1	2	3	4	5	الإمداد	٤
1	0 34	7 (7)	12 7	25 8	65 (25)	49	0
2	7 (7)	0 34	22 (10)	25 12	75 (35)	46	0
3	12 (24)	22 (34)	0 34	17 (4)	28 (0)	34	-12
4	25 (50)	25 (50)	17 (30)	0 32	15 2	34	-25
5	65 (105)	75 (115)	28 (56)	15 (30)	0 34	34	-40
6. وهمي	0 (40)	0 (40)	0 (28)	0 (15)	0 7	7	-40
الإجمالي	34	34	41	52	43		
٥	0	0	12	25	40		

تسلم المدينة 3 عربتها السبعة من المدينة || . وتسلم المدينة 4 مجموع 20 عربة من المدن 1 ، 2 ، تحتفظ بـ 18 منهم وتنشحن 2 إلى
 المدينة 5 . ويوجد عمير 7 عربات في المدينة || في الوضع النهائي .

٩ - ١٥ المخزن ١ إلى الشركة ٤ ، المخزن ٢ إلى الشركة ٣ ، المخزن ٣ إلى الشركة ٢ ، المخزن ٤ إلى الشركة ١ ؛
 $z^* = \$325\,400$ دولار

٩ - ١٦ المحامي ١ للحالة ٥ ، المحامي ٢ للحالة ٤ ، المحامي ٣ للحالة ٣ ، المحامي ٤ للحالة ٢ ، المحامي ٥ للحالة ١ ؛ ساعة
 $z^* = 436\text{ h}$.

٩ - ١٧ ١ → ٢ → ٤ → ٥ → ١ ، عند $z^* = 270$

٩ - ١٨ ١ → ٢ → ٥ → ٣ → ٤ → ١ عند $z^* = 14$ ، ١ → ٤ → ٣ → ٥ → ٢ → ١ عند $z^* = 14$

٩ - ٢١ المصفوفة التكلفة

$$\begin{bmatrix} 1000 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1000 & 1000 & 1000 & 1 \\ 1 & 1000 & 1000 & 1 & 1000 \\ 1 & 1000 & 1 & 1000 & 1000 \\ 1 & 1 & 1000 & 1000 & 1000 \end{bmatrix}$$

الطريق المغلق الذي يتقاطع مع نفسه ١ → ٢ → ١ → ٤ → ٣ → ١ أرخص من أى دائرة ذات طول ٥ .

الفصل العاشر ■ CHAPTER

٩٠ - ١٤ (أ) حد أعلى محلي وشامل عند $x = 1$ ، وحد أدنى محلي وشامل عند $x = 0$ ، حد أدنى محلي وشامل عند $x = 3$ ، (ب) حد أعلى محلي وشامل عند $x = 1$ ، حد أدنى محلي وشامل عند $x = 3$ ، حد أعلى محلي وشامل عند $x = 4$ ، (ج) حد أدنى محلي وشامل عند $x = -1$ ، حد أعلى محلي وشامل عند $x = 1$ ، حد أدنى محلي وشامل عند $x = 3$ ، حد أعلى محلي وشامل عند $x = 5$.

٩٠ - ١٥ (أ) حد أعلى محلي وشامل عند $x = 0$ ، حد أدنى محلي وشامل عند $x = 1$ ، حد أعلى محلي وشامل عند $x = 3$ ، (ب) حد أعلى محلي وشامل عند $x = 0$ ، حد أدنى محلي وشامل عند $x = 1$ ، حد أعلى محلي وشامل عند $x = 2$ ، (ج) حد أعلى محلي وشامل عند $x = 0$ ، حد أدنى محلي وشامل عند $x = 1$ لا يوجد حد أعلى شامل .

٩٠ - ١٦ (أ) حد أدنى محلي وشامل عند $x = 1$ ، (ب) حد أعلى محلي وشامل عند $x = -1$ ، (ج) حد أدنى محلي وشامل عند $x = 5$ ، حد أعلى محلي وشامل عند $x = 10$.

٩٠ - ١٧ $f''(x) = 6(x - 2)$ يكون سالباً عند $x < 2$ موجب عند $x > 2$

٩٠ - ١٨ مقعر بالتحديد عند $(0, \infty)$ ، محدب بالتحديد عند $(-\infty, 0)$.

٩٠ - ١٩ $x^* = 1.9375$ عند $z^* = 4.002$.

٩٠ - ٢٠ $x^* = 3\pi/4 = 2.356$ عند $\epsilon = \pi/8 = 0.393$ ، $z^* = 3.926$.

$$x^* = 1.905, \text{ عند } z^* = 4.005. \quad ٢١ - ١٠$$

$$x^* = 2.175, \text{ with } z^* = 3.893 \text{ و } \epsilon' = 0.242.$$

$$x^* = 1.931, \text{ عند } z^* = 4.002. \quad ٢٣ - ١٠$$

$$x^* = 2.225, \text{ عند } z^* = 3.928; \epsilon = 0.283. \quad ٢٤ - ١٠$$

CHAPTER 11 الفصل الحادى عشر

$$x_1^* = 2.5, x_2^* = 3, x_3^* = 0.4; z^* = 0 \quad ١٥ - ١١$$

$$x_1^* = x_2^* = 0 \text{ عند } z^* = 1 \text{ تحدث عند نقط كثيرة أحدها} \quad ١٦ - ١١$$

$$١٧ - ١١ \text{ يوجد حد أدنى محلى عند } x_1 = 12, x_2 = 24, \text{ عند } z = -0.001157 \text{ ولكن لا يوجد حد أدنى شامل (تقترب الدالة من } -\infty \text{ عندما } x_2, x_1 \text{ تقترب من الصفر من خلال قيم سالبة).}$$

$$x_1^* = \pi/3, x_2^* = \pi/3, \text{ عند } z^* = -0.6495 \text{ تحدث عند نقط كثيرة أحدها} \quad ١٨ - ١١$$

$$x_1^* = 0, x_2^* = \pm 1; z^* = 0.7358. \quad ١٩ - ١١$$

$$x_1^* = x_2^* = 1.496, x_3^* = 1; z^* = -1. \quad ٢٠ - ١١$$

$$x_1^* = 2, x_2^* = 3; z^* = -10.076. \quad ٢١ - ١١$$

$$x_1^* = x_2^* = 1; z^* = 0. \quad ٢٢ - ١١$$

$$A = 1.47 \times 10^{-20}, \epsilon = 0.04. \text{ في } 1980, N = 36597. \quad ٢٣ - ١١$$

$$H_2 = 2A. \quad ٢٤ - ١١$$

CHAPTER 12 الفصل الثانى عشر

$$z = x_1^4 e^{-0.001x_1 x_2^2} \quad \text{تعظيم} \quad ١٦ - ١٢$$

$$2x_1^2 + x_2^2 - 10 = 0 \quad \text{علمياً بأن}$$

$$z = -(x_1 - 1)^2 - x_2^2 \quad \text{تعظيم} \quad ١٧ - ١٢$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \quad \text{علمياً بأن}$$

$$z = 6x_1 - 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 \quad \text{تصغير} \quad ١٨ - ١٢$$

$$x_1 + x_2 - 2 \leq 0 \quad \text{علماً بأن}$$

عند : كل المتغيرات لا سلبية

$$z = -24x_1^2 - 14x_2^2 - 46x_3^2 + 28x_1x_2 + 24x_2x_3 - 34x_3x_1 \quad \text{تعظيم} \quad ١٩ - ١٢$$

$$-11x_1 - 9x_2 - 12x_3 + 1000 \leq 0 \quad \text{علماً بأن}$$

$$x_2 + x_3 - 40 \leq 0$$

$$-x_2 - x_3 + 40 \leq 0$$

عند : كل المتغيرات لا سلبية

$$z = 3x_1x_2 + 4x_2x_3 \quad \text{تعظيم} \quad ٢٠ - ١٢$$

$$x_2^2 + x_3^2 - 4 \leq 0 \quad \text{علماً بأن}$$

$$-x_2^2 - x_3^2 + 4 \leq 0$$

$$x_1x_2 - 3 \leq 0$$

$$-x_1x_2 + 3 \leq 0$$

عند كل المتغيرات لا سلبية

$$x_1^* = 2, x_2^* = 0; z^* = 1. \quad ٢١ - ١٢$$

$$x_1^* = x_2^* = 0, x_3^* = -1; z^* = -1. \quad ٢٢ - ١٢$$

$$x_1^* = 0, x_2^* = 4, x_3^* = 17/3; z^* = 68/3. \quad ٢٣ - ١٢$$

$$x_1^* = x_2^* = 0; z^* = 1. \quad ٢٤ - ١٢$$

$$x_1^* = \pm 3/\sqrt{2}, x_2^* = x_3^* = \pm \sqrt{2}; z^* = 17. \quad ٢٥ - ١٢$$

نخذ الإشارة الموجبة في كل حالة .

$$x_1^* = \pm \sqrt{5}, x_2^* = 0; z^* = 25 \quad ٢٦ - ١٢$$

$$x_1^* = x_2^* = 1.911, x_3^* = 0.822 \quad \text{عند عدد من النقط : أحدهم} \quad z^* = 7.980 \quad ٢٧ - ١٢$$

$$x_1^* = 3, x_2^* = x_3^* = 1 \quad \text{عند ستة نقط أحدها} \quad z^* = 11 \quad ٢٨ - ١٢$$

$$x_1^* = 3.512, x_2^* = 0.217, x_3^* = 3.552; z^* = 38.28 \quad ٢٩ - ١٢$$

$$x_1, x_2, x_3 \quad \text{مع الاحتفاظ بـ} \quad x_1 \rightarrow 0 \quad \text{عندما} \quad z \rightarrow 1 \quad \text{لا يوجد حد أدنى شامل} \quad ٣٠ - ١٢$$

$$x_1^* = 1.5, x_2^* = 0.5; z^* = 5.5. \quad ٣١ - ١٢$$

$$x_1^* = 58.18, x_2^* = 40, x_3^* = 0; z^* = 38476 \quad ٣٢ - ١٢$$

$$x_1^* = 1.4, x_2^* = 0.8; z^* = 1.8. \quad ٣٦ - ١٧$$

$$x_1^* = x_2^* = 5000, x_3^* = 0; z^* = 9 \times 10^7. \quad ٣٣ - ١٧$$

$$x_1^* = 1.07, x_2^* = 2.80; z^* = 9.47. \quad ٣٧ - ١٧$$

$$x_1^* = 0.823, x_2^* = 0.911; z^* = 1.393. \quad ٣٤ - ١٧$$

$$x_1^* = 1/3, x_2^* = 5/3; z^* = 2.249. \quad ٣٥ - ١٧$$

CHAPTER 13 : الفصل الثالث عشر :

$$z = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} -24 & 14 & \blacksquare \\ 14 & -14 & -17 \\ \blacksquare & -17 & -46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0, 0, \blacksquare] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \blacksquare \end{bmatrix} \quad \text{تعظيم} \quad ٩ - ١٣$$

$$\begin{bmatrix} -11 & -9 & -12 \\ 0 & \blacksquare & 1 \\ \blacksquare & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -1000 \\ 40 \\ -40 \end{bmatrix} \quad \text{علماً بأن}$$

عند x_3, x_1, x_2 لا سلبية .

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -11 & -9 & -12 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 48 & -28 & -24 & 0 & 0 & 0 & -1 & \blacksquare & \blacksquare & -11 & 0 & 0 \\ -28 & 28 & 34 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & -1 & 0 & -9 & 1 & -1 \\ -24 & 34 & 92 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -12 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} -1000 \\ \blacksquare \\ -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ١٠ - ١٣$$

$$Y = [x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3]^T$$

$$\bar{Y} = [u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3]^T$$

$$x_1^* = 58.18, x_2^* = 40, x_3^* = 0; z^* = 38476. \quad ١١ - ١٣$$

$$x_1^* = 1, x_2^* = 1; z^* = 3. \quad ١٢ - ١٣$$

$$x_1^* = 2.5, x_2^* = 2.882, x_3^* = 1.736; z^* = 332.9. \quad ١٣ - ١٣$$

$$z = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} \blacksquare & 302.1 & -209.0 \\ 302.1 & 197.9 & -114.6 \\ -209.0 & -114.6 & \blacksquare \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{تصغير}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6000000 \quad \text{علماً بأن}$$

$$1.75x_1 + 1.65x_2 + 1.45x_3 \leq 10000000$$

كل المتغيرات لاسلبية

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A = [1, 1] \quad B = [15\,000] = 15\,000$$

$$AQ^{-1}A^T = [1, 1] \begin{bmatrix} 1/100 & 0 \\ 0 & 1/200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3/200$$

$$z^* = \frac{\begin{vmatrix} 3/200 & -15000 \\ 15000 & 0 \end{vmatrix}}{3/200} = 1.5 \times 10^{10}$$

$$8 + z^* = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -(5-4) \\ (5-4) & 0 \end{vmatrix}}{-4} - (-4) = 3.75 \quad \text{و} \quad z^* = -4.25 \quad 17-17$$

الفصل الرابع عشر :

$$z^0 = 5700; x_1^0 = 3 \text{ р.к.} \quad x_2^0 = 0, x_3^0 = 2 \text{ р.к.} \quad \text{р.к. 1 - 18}$$

$z^* = \$675$; $x_1^* = 1$ μ $x_2^* = 1$ μ $x_3^* = 2$ μ ; or $x_1^* = 3$ days, $x_2^* = 1$ μ $x_3^* = 1$ day 17 - 18

$z^0 = \$150; x_1^1 = x_2^1 = 0, x_3^1 = 2, x_4^1 = 1.$ 17-18

$x^* = \$398$; $x_1^* = 12$, $x_2^* = 2$. 16 - 16

$$x^0 = 51; x^1 = 3, x^2 = 0, x^3 = 2.$$

$$z^* = 130; x_1^* = 0, x_2^* = 1, x_3^* = 1, x_4^* = 0, x_5^* = 0. \quad 17 - 18$$

$$x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2.$$

١٤ - ١٨ باستخدام الرموز في المسألة ١٤ - ٨ نحصل على القيم $j = 4, 3, 2, 1$

$$m_i(u) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \{I(x) - M(x) - R(u) + R(x) + m_{i+1}(x+1)\}$$

عند $m_s = 0$; $(0) = 0$ فإن دولار $z^* = \$33,600$ إما بشراء ماكينة ذات عمر سنة واحدة كل سنة أو : بشراء ماكينة ذات عمر سنة واحدة للسنوات الثلاث الأولى والاحتفاظ بهذه الماكينات للسنة الرابعة .

١٤ - ١٩ متغير الحالة للمرحلة z له القيمة $z = 1, 2, \dots$ وهي الأعمار الممكنة للعربة في الخدمة في بداية العام t . ع :

العائد المتوقع من الماكينة ذات عمر t سنة مشتراه في المرحلة k $E_k(u)$ ■

$R_k(u)$ = تكلفة احلال الماكينة ذات عمر u سنة مشتراه في المرحلة k بوحدة

نكففة صيانة الماكينة ذات عمر U سنة مشترى في المرحلة ■ جديده $M_2(u)$

د.ع. $I_f(3) = -M$ (عدد كبير سالب) . لذلك ، عند $j = 5, 4, 3, 2, 1$ عند $m_0(u) = 11$

يكون الحل دولاراً $x^* = \$26,000$ عند $x_1 =$ احتفظ $x_2 =$ اشترى $x_3 =$ احتفظ $x_4 =$ اشترى $x_5 =$ احتفظ $x_6 =$ اشترى $x_7 =$ احتفظ $x_8 =$ اشترى $x_9 =$ احتفظ $x_{10} =$ اشترى $x_{11} =$ احتفظ $x_{12} =$ اشترى $x_{13} =$ احتفظ $x_{14} =$ اشترى $x_{15} =$ احتفظ $x_{16} =$ اشترى $x_{17} =$ احتفظ $x_{18} =$ اشترى $x_{19} =$ احتفظ $x_{20} =$ اشترى $x_{21} =$ احتفظ $x_{22} =$ اشترى $x_{23} =$ احتفظ $x_{24} =$ اشترى $x_{25} =$ احتفظ $x_{26} =$ اشترى $x_{27} =$ احتفظ $x_{28} =$ اشترى $x_{29} =$ احتفظ $x_{30} =$ اشترى $x_{31} =$ احتفظ $x_{32} =$ اشترى $x_{33} =$ احتفظ $x_{34} =$ اشترى $x_{35} =$ احتفظ $x_{36} =$ اشترى $x_{37} =$ احتفظ $x_{38} =$ اشترى $x_{39} =$ احتفظ $x_{40} =$ اشترى $x_{41} =$ احتفظ $x_{42} =$ اشترى $x_{43} =$ احتفظ $x_{44} =$ اشترى $x_{45} =$ احتفظ $x_{46} =$ اشترى $x_{47} =$ احتفظ $x_{48} =$ اشترى $x_{49} =$ احتفظ $x_{50} =$ اشترى $x_{51} =$ احتفظ $x_{52} =$ اشترى $x_{53} =$ احتفظ $x_{54} =$ اشترى $x_{55} =$ احتفظ $x_{56} =$ اشترى $x_{57} =$ احتفظ $x_{58} =$ اشترى $x_{59} =$ احتفظ $x_{60} =$ اشترى $x_{61} =$ احتفظ $x_{62} =$ اشترى $x_{63} =$ احتفظ $x_{64} =$ اشترى $x_{65} =$ احتفظ $x_{66} =$ اشترى $x_{67} =$ احتفظ $x_{68} =$ اشترى $x_{69} =$ احتفظ $x_{70} =$ اشترى $x_{71} =$ احتفظ $x_{72} =$ اشترى $x_{73} =$ احتفظ $x_{74} =$ اشترى $x_{75} =$ احتفظ $x_{76} =$ اشترى $x_{77} =$ احتفظ $x_{78} =$ اشترى $x_{79} =$ احتفظ $x_{80} =$ اشترى $x_{81} =$ احتفظ $x_{82} =$ اشترى $x_{83} =$ احتفظ $x_{84} =$ اشترى $x_{85} =$ احتفظ $x_{86} =$ اشترى $x_{87} =$ احتفظ $x_{88} =$ اشترى $x_{89} =$ احتفظ $x_{90} =$ اشترى $x_{91} =$ احتفظ $x_{92} =$ اشترى $x_{93} =$ احتفظ $x_{94} =$ اشترى $x_{95} =$ احتفظ $x_{96} =$ اشترى $x_{97} =$ احتفظ $x_{98} =$ اشترى $x_{99} =$ احتفظ $x_{100} =$ اشترى

$$m_i(u) = \max \{I_{i-u}(u) - M_{i-u}(u) + m_{i+1}(u+1), I_i(0) - M_i(0) - R_{i-u}(u) + m_{i+1}(1)\}$$

١٤ - ٢٠ مع كل شغلة يتناظر مرحلة ، وحدد الحالة في المرحلة i بالرمز الثلاثي (a_1, a_2, a_3) حيث $(i_2 = 1, 2, 3)$ ، i_1, i_2, i_3 طبقاً لما يكون أولاً يكون العامل i جاهزاً للتصين للشغلة i . لذلك

$$z^* = \text{أقل} \{c_{11} + \text{أقل} \{c_{22} + c_{33}, c_{32} + c_{23}\}, c_{21} + \text{أقل} \{c_{12} + c_{33}, c_{32} + c_{13}\}, c_{31} + \text{أقل} \{c_{12} + c_{23}, c_{22} + c_{13}\}\}$$

تفضل الطريقة الجبرية أكثر بكثير لمسائل التعيين الكبيرة

١٤ - ٢١ دولار 4 985 980 بانتاج 2, 3, 3, 6 حاسب . (لاحظ أن الخصم قد غير السياسة المثل) .

١٤ - ٢٢ 30 047.62 نفس السياسة المثل كما في المسألة ١٤ - ١٨

الفصل الخامس عشر : CHAPTER 15

١٥ - ٨ $z^* = 13$ للشجرة $\{AD, BD, CE, DE, DG, EH, GF\}$

١٥ - ٩ $z^* = 55$ لعدد من الشجرات تحتوي $\{AD, AC, DG, BF, BE, FG, GH, HI, GJ, HK, KL\}$.

١٥ - ١٠ $z^* = 25$ للمسار $\{AD, DG, GH, HK, KL\}$ أو المسار $\{AB, BF, FG, GH, HK, KL\}$.

١٥ - ١١ وحدة $z^* = 14$

١٥ - ١٢ وحدة $z^* = 21$

١٥ - ١٣ وحدة $z^* = 123$

١٥ - ١٤ وحدة $z^* = 17$

١٥ - ١٥ دولار $2^* = 2400$ وحدة عند دولار 48 لكل منهم

١٥ - ١٦ مبدئياً : إما : احتفظ ، احتفظ ، احتفظ ، احتفظ ، اشترى ، اشترى ، لذلك اشترى غربة جديدة كل سنة .

١٥ - ١٧ (a) 22; (c) III

١٥ - ١٨ ١٩ وحدة .

١٥ - ١٩ يكون القطع $\{BG, EG, CG, FG, DG\}$ قيمة القطع 1 تمثل حد أعلى في المسار ، وحيث أن المسار لوحد واحد ممكن (من المسألة ١٥ - ١٤) فيكون أعلى مسار .

الفصل السادس عشر : CHAPTER 16

١٦ - ١١ (أ) B_1, B_2 تفضل عنها B_2 غير مستقرة

$$x^* = \left[\frac{10}{11}, \frac{1}{11} \right] \quad y^* = \left[0, \frac{10}{11}, \frac{1}{11}, 0 \right] \quad G^* = -\frac{12}{11}$$

(ب) B_3 تفضل عنها B_1 تفضل عنها B_2 . غير مستقرة

$$X^* = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \quad Y^* = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right] \quad G^* = 0$$

(ج) B_4, B_2, B_1 تفضل عنها B_3 . مستقرة عند $G^* = -1$ لاعب الصف يجب أن يستخدم A_2 فقط ؛ لاعب العمود يجب أن يستخدم B_3 فقط

(د) غير مستقرة .

$$X^* = Y^* = [2/7, 4/7, 1/7] \quad G^* = -4/7$$

(هـ) A_3 تفضل عنها A_2, A_1 تفضل عنها B_3

$$X^* = [2/7, 5/7, 0] \quad Y^* = [0, 5/7, 2/7] \quad G^* = 32/7$$

(و) A_4, A_3, A_1 تفضل عنهم A_2 . مستقرة عند $G^* = 11$. لاعب الصف يجب أن يستخدم A_2 فقط ، لاعب الصف يجب أن يستخدم B_1 فقط .

$$X^* = [1/4, 3/4], Y^* = [3/4, 1/4, 0]; G^* = 68.125 \quad 17 - 19$$

17 - 19 يجب أن يتركز المحلن في المدينة C ، المحل I يأخذ 65 في المائة من حجم العمل الكلي .

18 - 19 أكتب A_1 على ورقة صغيرة ، A_2 على ثلاث ورقات صغيرة ، A_3 على إحدى عشرة إسحب ورقه (بالاحلال) قبل كل لعبة .

19 - 19 يستخدم الجيش A طريق الغابة بإحتمال $1/4$ والأرض المنبسطة بإحتمال $3/4$ ، يهجم الجيش B في أي من الطريقين بإحتمال $1/2$ قيمة المباراة (للجيش B) هي ضربات $G^* = 5/2$.

19 - 19 يهجم الجيش الأزرق على المطار ذات 20 مليون دولار بالقوة الكاملة بإحتمال $4/9$ ويهجم على المطار الأحمر بالقوة الكاملة بإحتمال $5/9$. يدافع الجيش الأحمر عن المطار الأعلى بالقوة الكاملة بإحتمال $2/3$ ويقسم قوته على المطارين بإحتمال $1/3$. مليون دولار $G^* = 68$

17 - 19 كلاهما يجب أن يقدم 2 باردة .

18 - 19 I-95 بإحتمال 0.53 والطريق الخلفي بإحتمال 0.47 .

$$X = [5/12, 7/12, 0], Y^* = [4/9, 5/9, 0] \quad 19 - 19$$

20 - 19 من $(i, j = 1, 2, \dots, r)$ نتج أن $E(X, Y) = -E(Y, X)$ لأي متجهين إحتمال ذات أبعاد n لذلك .

$$M_i = \sum_{j=1}^r E(X, Y) = \sum_{j=1}^r (-E(Y, X))$$

$$= - \sum_{j=1}^r E(Y, X) = - \sum_{j=1}^r M_j = -M_n$$

بنظرية الأقل أكبر . لذلك . $M_i = M_n$

$$M_i = M_n = 0 = G^*$$

19 - 21 لا ، دولار $G^* = -\$0.25$

الفصل السابع عشر :

١٧ - ١٦ لأخذ العرض بأسلوب أقل الأعلى أما منتصف الطريق ، ليس فخذ العرض بأسلوب التفاضل .

١٧ - ١٩ لا يأخذ العرض

١٧ - ١٧ يمتد الضمان

١٧ - ٢٠ لا يمتد الضمان

١٧ - ١٨ يتحول

١٧ - ٢١ أنظر الشكل A-1 (العائد بالآلف دولار) . لاختبار مرحلة الوقوف منفرداً ، ثم التحول إلى عملية جديدة فقط إذا كانت مرحلة الوقوف منفرداً ذات كفاءة .

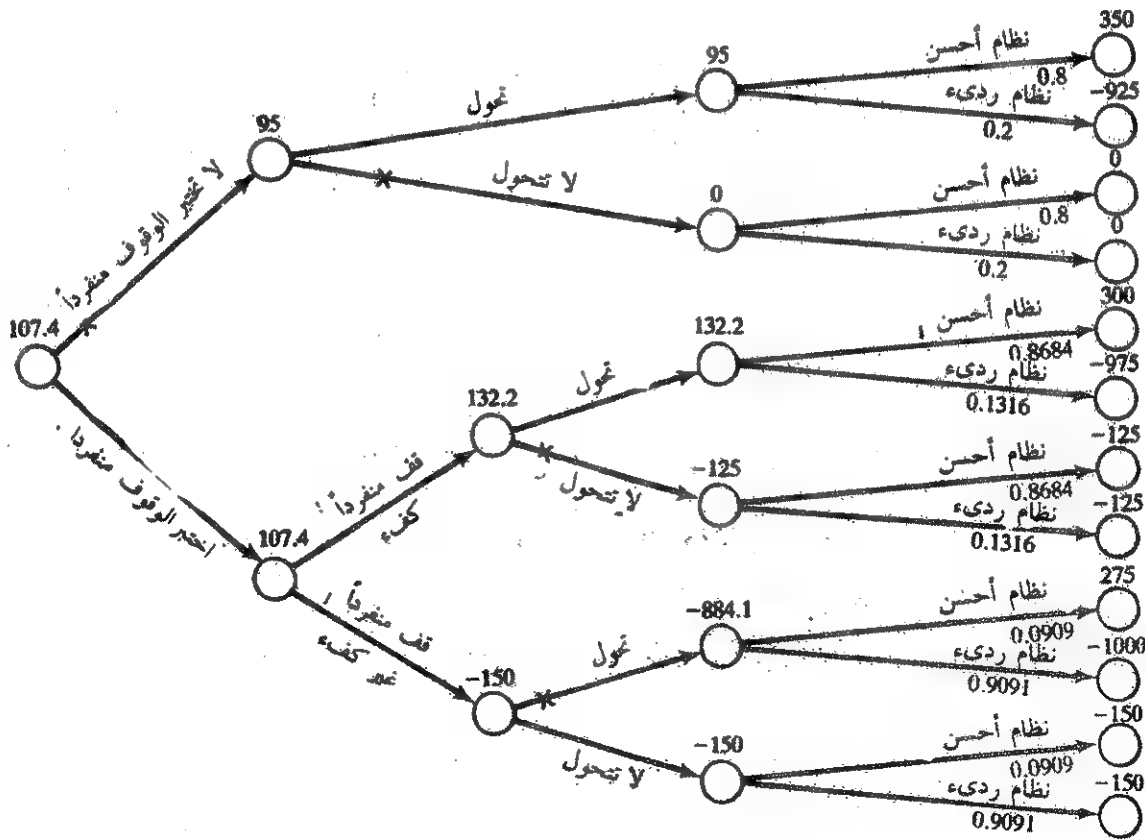
١٧ - ٢٢ لا تطلب اختبار الكذب وأفضل أمين الحرية .

١٧ - ٢٣ إختبر السوق ، ثم تعامل على المستوى القومي فقط إذا كانت نتائج الاختبار ناجحة جداً أو بدرجة معقولة .

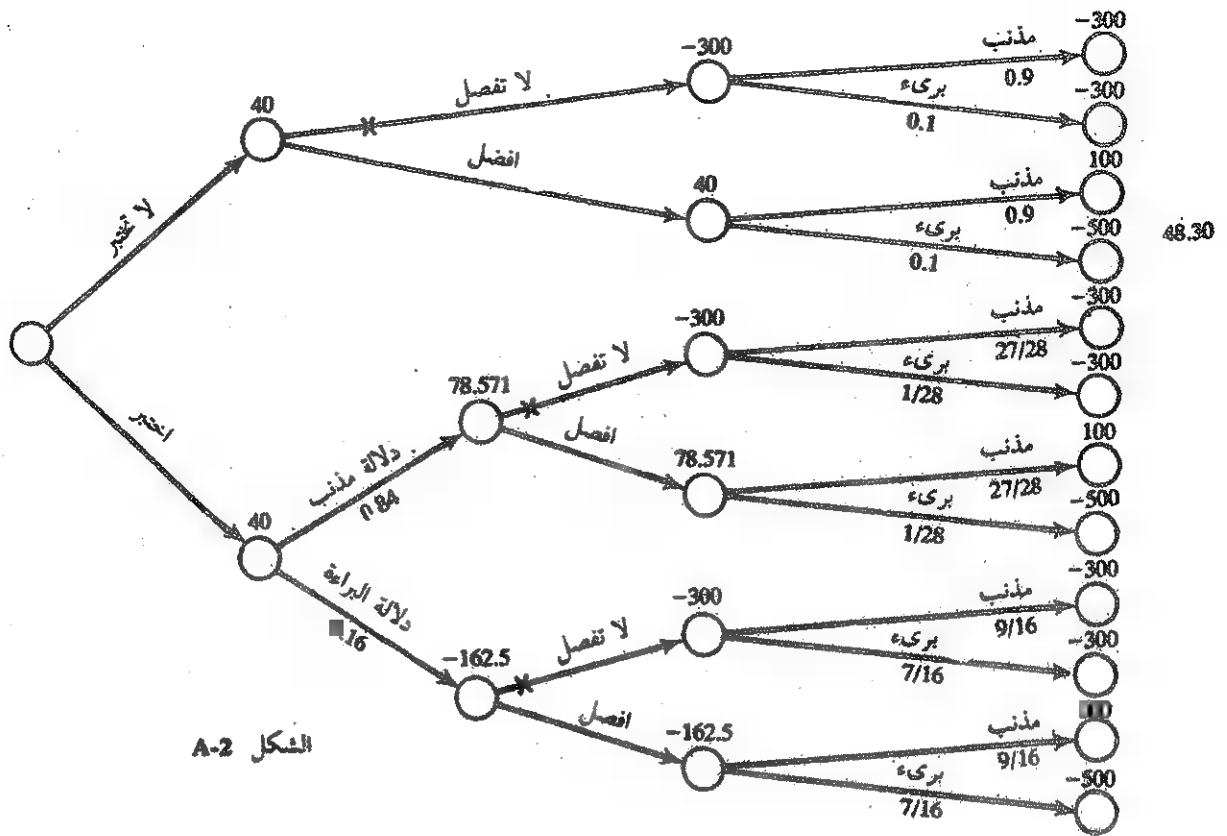
١٧ - ٢٤ 82 250 دولار .

١٧ - ٢٥ الاختبار له قيمة صفر ، أنظر الشكل A-2 (العائد بالآلف دولار) .

١٧ - ٢٦ قدره $u(-15)=0$, $u(-14)=0.07$, $u(-4)=0.31$, $u(-3)=0.32$, $u(19)=0.42$, $u(20)=0.425$, $u(49)=1$.
 $u(50)=1$, $u(14)=0.87$, نفس الأجابة مثل المسألة ١٧ - ٢٣ .



الشكل A-1



الشكل A-2

$$u_2 = 85, u_3 = 55, u_4 = -20 \quad ٢٧ - ١٧$$

$$C(0.34) = -\$2,000,000, R(0.34) = \$8,460,000 \quad ٢٨ - ١٧$$

٢٩ - ١٧ يبعد عن المغامرة عند (-15 , 10) ، لا أختلاف على المغامرة عند (10 , 31) ، يبحث عن المغامرة عند (31 , 50) .

٣٠ - ١٧ إعتبر موقف تجنب المغامرة . دع M_i تمثل العائد بالدولار المناظر لحالة الطبيعة رقم i ، S^i للقرار المحدد D . أرمز لمنفعة M^i بالرمز u^i واحتمال S^i بالرمز P^i . وحيث أن دالة المنفعة هي محدبة بالتحديد ، يكون معكوسها مقعراً بالتحديد . لذلك .

$$C = f(p_1u_1 + p_2u_2 + \dots + p_nu_n) \leq p_1f(u_1) + p_2f(u_2) + \dots + p_nf(u_n) = E(D)$$

وهو العائد بالدولار المتوقع من القرار ومن ثم ، وبالمثل تثبت حالة البحث عن المغامرة ، $R = E(D) - C \geq 0$

٣١ - ١٧

	S_1	S_2	S_3
D_1	-130	-45	■
D_2	-90	-15	-45
D_3	-20	0	-110
D_4	0	-5	-125

٣٢ - ١٧ باستخدام جدول - لا اعتد ، اختار D_2 بأسلوب أقل الأعلى ، إما D_1 أو D_2 بأسلوب التفاضل و D_2 بأسلوب منتصف الطريق .

الفصل الثامن عشر CHAPTER 18

١٨ - ٦ ' دولار $in(8) = 77,40$ عند سياسة 3, 2, 3

١٨ - ٧ ' دغ الحالة u لتكون العدد بالآلف دولار للوحدات في اليد . فإن دولار $in(2) = 2600$ في ظل السياسة المثلى .

$d \backslash u$	0	1	2	3	4	5	6
$d_1(u)$	A, B
$d_2(u)$...	A, B	A, B	A, B	A, B
$d_3(u)$	O	B	A, B	A, B	A, B	A, B	A, B

وهنا ■ تمثل قرار عدم عمل أى استثمار .

١٨ - ٨ ' $m_1(2) = 0.352$ للسياسة .

	0	1	2	3	4	5	6
$d_1(u)$	A
$d_2(u)$...	A	A	O, A, B	A
$d_3(u)$	A	A	O	O

١٨ - ٩ ' اجمل احتمال عدم وجود بترول حداً أدنى . فيكون اعلى احتمال لوجود الزيت هو $1 - m_1(8) = 1 - 0.6 = 0.4$ بتخصيص كل النفود للموقع ■ .

١٨ - ١٠ ' الحالة u هي عدد الوحدات من العمل التي لم تستكمل بعد . لذلك يكون $m_1(0) = 5.0368$ ويكون أحد السياسات المثلى هو .

$d \backslash u$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_1(u)$	2
$d_2(u)$	0	1	1	1	1	1	1	2	2	3	3
$d_3(u)$	0	1	1	1	1	2	2	3	3	4	4
$d_4(u)$	0	1	1	-4	-4	5	5	6

١٨ - ١١ ' نأخذ الحالة ■ تمثل عمر الماكينة الحالية . فإن دولار $m_1(1) = 3118.83$ في ظل السياسة أنه دائماً نحفظ بالماكينة الحالية (الشغالة) .

١٨ - ١٢ ' الحالة ■ هي عدد الحاسيات في المخزن . فإن دولار $m_1(0) = \$127110$ تحت السياسة .

$d \backslash u$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$d_1(u)$	3
$d_2(u)$...	4	4	4	3	3	0	0	0
$d_3(u)$	4	4	3	3	2	0	0	0	0	0	0	0
$d_4(u)$	4	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0
$d_5(u)$	1	0	0	0	0	0	0	0

١٨ - ١٣ : أعلى إعتادية هي 0.351 من 3 وحدات من العنصر 1، 2 وحدة من العنصر 2، 1 وحدة من العنصر 3 .

١٨ - ١٤ : المقاولون من الباطن 1، 2، 3، يخصص لهم العناصر 2، 1، 3 على التوالي .

١٨ - ١٥ : دع :

عدد وحدات المناعة المطلوبة لاستكمال المجموع (من 0 إلى 5 بالعملة)

الحد الأدنى لعدد الأيام المفقودة المتوقعة ابتداء من المرحلة (اليوم) في الحالة $m_j(u)$

عدد الأقراس المأخوذة في اليوم (من 0 إلى 5 ، لماذا ؟) x

عدد وحدات المناعة المتصلة من عدد أقراس X $f(x)$

احتمال فقد العمل في اليوم التالي (يكافئ عدد الأيام المفقودة من العمل) $p(x)$

لذلك لقيم $j = 1, 2, 3, 4$

$$m_j(u) = \min_{x=0, \dots, 5} [p(x) + m_{j+1}(u - f(x))]$$

عند $u < 0$ ($j = 2, 3$) $m_j(u) = 0$ with

$$m_5(u) = \begin{cases} 0 & u \leq 0 \\ 10000 & u > 0 \end{cases}$$

١٨ - ١٦ : دع :

عدد وحدات العمل المطلوبة لانتهاء المشروع 1 (من 0 إلى 16 بالعملة) u

عدد وحدات العمل المطلوبة لانتهاء مشروع 2 (0 إلى 23 بالعملة) v

الحد الأدنى المتوقع لتكلفة استكمال كلا المشروعين المتدينين عند الحالة (اليوم) $m_j(u, v)$ في الحالة (u, v) .

عدد وحدات العمل المستكملة بالأطقم z للمشروع i ($i = 1, 2$) $f_i(z)$

عدد أطقم المقاول المعينون للمشروع i ($i = 1, 2$) x_i

عدد أطقم المقاول من الباطن المعينون للمشروع i ($i = 1, 2$) y_i

لذلك عند $j = 1, \dots, 5$

$$m_j(u, v) = (0.9)(5000) + (0.1)(4000) + \min [1500(y_1 + y_2) + m_{j+1}(u - g_1(x_1, y_1), v - g_2(x_2, y_2))]$$

$$g_1(x_1, y_1) = \begin{cases} f_1(x_1 + y_1) & x_1 = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0.9f_1(5 + y_1) + 0.1f_1(4 + y_1) & x_1 = 5 \end{cases} \quad \text{حيث}$$

$$g_2(x_2, y_2) = \begin{cases} f_2(y_2) & x_2 = 0 \\ 0.9f_2(x_2 + y_2) + 0.1f_2(x_2 + y_2 - 1) & x_2 = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

ويؤخذ الحد الأدنى لكل القيم غير السالبة الصحيحة لـ x_1, x_2, y_1, y_2 بحيث يكون

$$x_1 + x_2 = 5 \quad x_1 + y_1 \leq 5 \quad x_2 + y_2 \leq 5$$

ويكون الشرط النهائي هو

$$m_6(u, v) = \begin{cases} 0 & u \leq 0 \text{ and } v \leq 0 \\ 1000000 & u > 0 \text{ or } v > 0 \end{cases}$$

١٧ - ١٨ عدد الوحدات النقدية المتبقية للتخصيص $u =$

عدد الأصوات المكتسبة مسبقاً $v =$

أعلى احتمال لكسب 100 صوت على الأقل ابتداء من المرحلة

(الأولى) z في الحالة (u, v) . $m_j(u, v) =$

عدد الأصوات في المرحلة z $V_j =$

إحتمال كسب V_j إذا أتفق X وحدات نقدية في المرحلة $p_j(x) =$

لذلك

$$m_j(u, v) = \max_{0 \leq x \leq \min(u, V_j)} \{ p_j(x) m_{j+1}(u-x, v+V_j) + [1-p_j(x)] m_{j+1}(u-x, v) \}$$

لقيم $j = 1, \dots, 5$

$$m_0(u, v) = \begin{cases} 0 & v < 100 \\ 1 & v \geq 100 \end{cases} \quad \text{عند}$$

القيم الممكنة لـ v هي $0, 1, 2, \dots, 69$ ، للحالة $u = 0$. وهكذا .

الفصل التاسع عشر : CHAPTER 19

١٩ - ١٥ تصادق ، غير عادي ، تصادفية نهائية $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

١٩ - ١٦ غير تصادق

١٩ - ١٧ غير تصادق

١٩ - ١٨ تصادق — غير عادي — غير تصادفية نهائية .

١٩ - ١٩ تصادق — غير عادي — وتصادفية نهائية

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/8 & 0 & 5/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/8 & 0 & 5/8 \end{bmatrix}$$

١٩ - ٢٠ تصادق ، عادي ، تصادفية نهائية

$$L = \frac{1}{45} \begin{bmatrix} 17 & 17 & 9 \\ 19 & 17 & 9 \\ 17 & 17 & 9 \end{bmatrix}$$

١٩ - ٢١ تصادق ، غير عادي ، تصادفية نهائية .

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

١٩ - ٢٢ 3 / 11

١٩ - ٢٣

١٩ - ٢٤ 4 / 13 أو تقريباً 31 في المائة من الزمن .

١٩ - ٢٥ 0.12162 , 0.151 , 0.154 , 0.14 , 0.2

١٩ - ٢٦ (أ) تقريباً 34 إعلاء ، 31 مسقفون ، 18 بالسراير ، 17 موت .
(ب) تقريباً 65 إعلاء ، 35 موت .

١٩ - ٢٧ 7 / 12 في حالة جيدة ، 5 / 12 في حالة متوسطة .

١٩ - ٢٨ (أ) 1 ، (ب) لا شيء ، (ج) 3 ، 1 ، (د) 1 .

١٩ - ٢٩ حدد أحد حالات الامتصاص مثل الحالة 1 فإن P لها 1 في الموضع (1 / 1) ، احذف في باقي الصف الأول . أي قوى ل P سيكون لها نفس الصف الأول .

١٩ - ٣٢ بسبب أن $\gamma = 1$ هي قيمة أيمن ل P^* ، تكون أيضاً قيمة أيمن في P ، للمصفوفتين نفس معادلة التميز) .

١٩ - ٣٣ أثبت أولاً بالحث ، أن متجه أيمن التابع لقيم أيمن المحددة في P هي عظمة مستقلة . ثم إنشئ M من متجهات أيمن N الخطية المستقلة .

١٩ - ٣٤ أنظر المسألة ١٩ - ١٥ .

الفصل العشرون CHAPTER 20

٢٠ - ١٣ أي ككوت يحفظ أكثر من ٥ أسابيع لا ينتج أكثر من 7 سنتاً أعلى من ككوت عمره ٥ أسابيع . وهذا أقل من ٥ سنت ربح تفاضلي ناتج من إحلال ككوت عمر 5 أسابيع بككوت مولود حديثاً ويخضع بعد أسبوع . والسياسة المثلى هي البيع عندما تكون الككوت ذات عمر ٥ أسابيع . هنا معدل الفائدة الأسبوعي نحصل عليه بحل $(1 + i)^{52} = 1.09$ ، ويكون $L' = 0.00$

$$\alpha = \frac{1}{1+i} = 0.998344109 \text{ ومن ثم}$$

٢٠ - ١٤

الحالة	2	3	4	5
القرار	0	3	4	5

- ٢٠ - ١٥ : الحالة 1 : أدخل السنة بماكينة عمرها 1 سنة
 الحالة 2 : أدخل السنة بماكينة عمرها 2 سنة
 الحالة 3 : أدخل السنة بتأجير ماكينة عمرها 1 سنة
 الحالة 4 : أدخل السنة بتأجير ماكينة عمرها 3 سنة

الحالة	1	2	3	4
القرار	أحتفظ	أجر	أحتفظ	أجر

٢٠ - ١٦ : إذا رمزت I إلى مصفوفة أحادية $N \times N$

$$Y = [PV(1), PV(2), \dots, PV(N)]^T$$

يمكن كتابة (٢٠ - ٢) كما

$$\left(\frac{1}{\alpha} I - P\right)Y = \frac{1}{\alpha} C$$

مصفوفة المعاملات بالطرف الأيسر يمكن أن تكون صفرية إذا كان $1/\alpha$ مساوية لـ λ ، وهي قيمة أيجن لـ P ولكن

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + i > 1$$

بينما (النظرية ١٩ - ١) $|\lambda| \leq 1 = 1 + i$

$$PV(1) = \$12,665, PV(2) = \$13,065, PV(3) = \$13,565, \quad ٢٠ - ١٧$$

٢٠ - ١٨

i	1	2	3
d_i	2	4	4

٢٠ - ١٩ : أضبط الماكينة عندما لا تكون في الحالة 1 .

٢٠ - ٢٠ : الحالات هي عدد الأجزاء المخزون يوم السبت مساءً، قبل طلب أي أجزاء جديدة

الحالة	0	1	2	3	4
القرار	3	0	0	0	0

٢٠ - ٢١

i	1	2	3
d_i	0	4	4

الحالة	0	1	2	3	4
القرار	3	0	0	0	0

٢٠ - ٢٣ يرقى الذين لهم تقديرات 16, 17, 18 فقط .

الفصل الواحد والعشرين : CHAPTER 21

- ٢١ - ١٨ 0.9000, 1.23
- ٢١ - ١٠ 0.5204, 8.166, 81.66
- ٢١ - ١٩ 0.0341, 4.30
- ٢١ - ١١ 0.9272, 66.69, 666.9
- ٢١ - ٢٠ $\mu = (2/3)$ في الحقيقة $1 - p_0(12) = 0.4530$
- ٢١ - ١٢ 0.0621, 3.1, 12.1
- ٢١ - ٢١ 0.1034
- ٢١ - ١٣ 20.25
- ٢١ - ١٤ 0.1815 عضو
- ٢١ - ١٤ 132 805 عربية
- ٢١ - ٢٣ $\lambda = 1/4, \mu = 2/7, 48.95$
- ٢١ - ١٥ 7 يوم
- ٢١ - ٢٥ n/λ (أ) n/λ (ب) نعم
- ٢١ - ١٦ 0.029
- ٢١ - ٢٦ $\lambda_1 \Delta t + \lambda_2 \Delta t = (\lambda_1 + \lambda_2) \Delta t$
- ٢١ - ١٧ 0.5064, 2.48

الفصل الثاني والعشرين : CHAPTER 22

- ٢٢ - ٩ (أ) الأفراد الباحثين عن الطعام ، (ب) مقدم الطعام والخزينة (ج) صف واحد بعد مقدمي خدمة على التوالي ، بنظام FIFO ، طاقة غير محدودة إذا سمح بالانتظار خارج الكافيتريا .
- ٢٢ - ٧ (أ) الأفراد الراغبين في الحلاقة ، (ب) الحلاقين ، (ج) اثنين مقدمي خدمة ، FIFO ، طاقة محدودة بسبعة .
- ٢٢ - ٨ (أ) الأفراد الراغبين البنزين ، (ب) العملاء بالمحطة ، (ج) ثلاثة مقدمي .
مقدمي خدمة ، FIFO ، طاقة محدودة إذا لم يسمح بالانتظار خارج المحطة .
- ٢٢ - ٩ (أ) الطائرات المتظرة المهبوط ، (ب) الممرات ، (ج) عموماً مقدم خدمة واحد ، بأسيقية للطائرات المضطرة للمهبوط ، (د) FIFO ، طاقة غير محدودة .

٢٢ - ١٠ (أ) عربات ، (ب) جامع العملات ، (ج) عدد مقدمى خدمة بعدد جامعى العملات ، FIFO ، طاقة غير محدودة .

٢٢ - ١١ (أ) الأعمال التى ستكتب ، (ب) عامل الآلات الكاتبة ، (ج) مقدمى خدمة بعدد كاتبى الآله ، يمكن أن يكون الصف FIFO أو PRI (بأسبقية: تعطى الأعمال بواسطة الإدارة أو بالتخصيص السريع) ، طاقة غير محددة .

٢٢ - ١٢ (أ) القوات ، (ب) أماكن الأفراد فى حامل الجنود ، (ج) مقدمى خدمة بعدد المحلات ، بأسبقية بالرتبة ، طاقة غير محدودة .

٢٢ - ١٣ (أ) المحلات ، (ب) القاضي ، (ج) مقدم خدمة واحد غالباً FIFO ، طاقة غير محدودة .

٢٢ - ١٤ (أ) 9:30 ، 10:18 ، (ب) 1.033 ، (ج) 2.533

٢٢ - ١٥ (أ) 4 ، (ب) 16 (لا تحتوي على الثلاثة أعمال التى تصل عند نهاية الدورة)

٢٢ - ١٦ 20 دقيقة

٢٢ - ١٧ خمسة (لا تتضمن المبل الذى لا يسمح له بالدخول فى 60 دقيقة)

الفصل الثالث والعشرين CHAPTER 23

٢٣ - ١٤ (a) 2.25, (b) 4.5 min, (c) 0.062, (d) 0.001

٢٣ - ١٥ (a) 2, (b) 1.33, (c) 1 h, (d) 0.001

٢٣ - ١٦ (a) 2.25, (b) 2.25 min, (c) 3 min, (d) 0.178

٢٣ - ١٧ (a) 0.9, (b) 1.5, (c) 0.7364, (d) 0.07776

٢٣ - ١٨ (a) 0.528, (b) 0.2, (c) 0.632

٢٣ - ١٩ \$16.80

٢٣ - ٢٠ نعم يوفر يومى متوقع 105 دولار

٢٣ - ٢١ 110 قدم مربع .

٢٣ - ٢٢ لا شيء على L أو W: L ينخفض ب $1/2$

٢٣ - ٢٣ $p^{n-2}(1-p)$

٢٣ - ٢٤ $(1-p)^{-1}$

٢٣ - ٢٦ المعدل المتوقع للانتقال إلى الحالة n هو $n = 0$ إذا كانت $\lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1}$ (or μp_1) المعدل المتوقع للانتقال من الحالة n هو $n = 0$ إذا كانت $\lambda p_n + \mu p_n$ (or λp_0) بمساواة هذه ، القسمة على μ تعطى $(1, 2)$ للمسألة ٢٣ - ٧ .

$$F(z) = \frac{p_0}{1 - \rho z} \quad ٢٣ - ٢٧$$

٢٣ - ٢٨ من نظرية ٢١ - ١ يكون مسار المغادرة عملية بواسون عندما يكون مقدم الخدمة مشغولاً . وهذه هي الحالة التي فيها النسبة ρ من الزمن ، ومن ثم ، العدد المتوقع للمغادرة في وحدة الزمن يكون

$$\rho\mu + (1 - \rho)(0) = \lambda$$

الفصل الرابع والعشرون CHAPTER 24

$$(a) 1/3, (b) 16/45 \quad ٢٤ - ١١$$

$$(a) 23.5 \text{ s}, (b) 0.1420, (c) 3.987 \quad ٢٤ - ١٢$$

٢٤ - ١٣ بالنظام الجديد ينقص الوقت الضائع للموظف من 66.67 إلى 60 في المائة ، L تنخفض من $1 = 2(4)$ إلى 0.9524 .

$$(a) 0.025, (b) 0.3, (c) 0.675 \quad ٢٤ - ١٤$$

$$(a) 2.5 \text{ (أ) } (b) 25 \text{ (ب) } (c) 25 \text{ (ج) } \text{ دولار في الساعة} . \quad ٢٤ - ١٥$$

$$(a) 13 \text{ ساعة } (b) 495.48 \text{ دولار في اليوم} . \quad ٢٤ - ١٦$$

٢٤ - ١٧ لا . التكلفة الجديدة ستكون 213.33 دولار من إعادة الأوتوبيس بدون خدمة ، بالإضافة إلى ٢٢٢ دولار للطاقم الجديد .

$$(a) 53 \text{ في المائة} , (b) 1.32 \text{ في اليوم} \quad ٢٤ - ١٨$$

$$(a) 2.90, (b) 46.4 \text{ s}, (c) 50.4 \text{ h}^{-1} \quad ٢٤ - ١٩$$

$$(a) 2.089, (b) 6 \text{ min } 48 \text{ s} . \quad ٢٤ - ٢٠$$

$$(a) 2.77, (b) 2.94 \text{ min} \quad ٢٤ - ٢١$$

$$p_0 = \frac{1 - 0.8\rho}{1 + 0.2\rho} \quad , \quad p_n = (0.8)^{n-1} \rho^n p_0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad ٢٤ - ٢٢$$

$$(a) 1.53, (b) 4.72 \text{ دقيقة} . \quad ٢٤ - ٢٣$$

$$(a) 1.51, (b) 14 \text{ دقيقة } 3 \text{ ث}, (c) \$3.72 \text{ في الساعة} \quad ٢٤ - ٢٤$$

٢٤ - ٢٥ طبقاً لـ (٢٤ - ١) تتحقق دلالة الحالة المستقرة (أنظر المسألة ٢٣ - ٢٦) إذا حدثت الخطوات لأعلى في الحالة n ولأسفل من الحالة \equiv بنفس المعدل المتوقع .

$$p_0 = 0.0450, p_1 = 0.1350, p_2 = p_3 = 0.2024, p_4 = 0.1518, p_5 = 0.1139, p_6 = 0.0854, p_7 = 0.0641, \dots \quad ٢٤ - ٣١$$

$$L = \rho, W = L/\lambda = 1/\mu, W_0 = 0, L_0 = 0. \quad ٢٤ - ٣١$$

$$(a) 350, (b) 0.368. \quad ٢٤ - ٣٢$$

$$p_0 = \left[\frac{s^s \rho^{s+1}}{s!} \sum_{n=s+1}^{N_0} \frac{N_0!}{(N_0-n)!} \rho^{n-(s+1)} + \sum_{n=0}^s \binom{N_0}{n} (s\rho)^n \right]^{-1} \quad ٢٤ - ٣٣$$

$$p_n = \begin{cases} \binom{N_0}{n} (s\rho)^n p_0 & (n = 1, \dots, s) \\ \frac{N_0!}{(N_0-n)!} \frac{s^s \rho^n}{s!} p_0 & (n = s+1, s+2, \dots, N_0) \end{cases}$$

عندما $N_0 \rightarrow \infty$ تقترب هذه الاصطلاحات من (٢٤ - ٥) ، (٢٤ - ٦) علماً بأن $\rho < 1$ ■

$$٢٤ - ٣٥ (أ) 5.87 (ب) \equiv \text{في المائة} .$$

$$٢٤ - ٣٦ \text{ دج } S_n \text{ عدد العملاء في الختمة عندما تكون الحالة } n (n = 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} &= W - W_0 = \frac{1}{\lambda} (L - L_0) = \frac{1}{\lambda} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n p_n - \sum_{n=1}^{\infty} (n - S_n) p_n \right] \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} S_n p_n = \frac{1}{\lambda} (1 - p_0) \sum_{n=1}^{\infty} S_n \frac{p_n}{1 - p_0} = \frac{1}{\lambda} (1 - p_0) S \end{aligned}$$

قائمة بأهم المصطلحات العلمية

(أ)

Duality	إزدواجية
Optimization	أمثلية
Steepest	أقصى ميل صعود
Penalty weight	أوزان جزائية
Feasible directions	اتجاهات ممكنة
Junction	أماكن شحن
Supply	إمداد
Demand	احتياجات
Unimodal	أحادي النموذج
Sequential search	أسلوب البحث التتابعى (التسلسلى)
Linear dependence	اعتماد خطى
Linear independence	استقلال خطى
Dual	إزدواج
Symmetric Dual	إزدواجات متماثلة
Primal	أولى
Destinations	أماكن وصول
Optimality test	اختبار الأمثلية
Minimax	أقل أعلى
Objects	أغراض
Unbounded horizons	أغراض محددة
Arrival patterns	أفاق غير محدودة
Service patterns	أنماط وصول
Arcs	أنماط خدمة
Strategy	أقواس
Pure strategy	استراتيجية
Mixed strategy	استراتيجية مطلقة
Maximum strategy	استراتيجية مختلطة
	أعلى استراتيجية

(ب)

Mathematical program	برنامج رياضى
Linear program	برنامج خطى
Nonlinear program	برنامج غير خطى
Integer program	برنامج أعداد صحيحة
Quadratic program	برنامج تربيعى
Pattern search	بحث النمط
Fibonacci search	بحث فيبوناكس
Three-point interval search	بحث فترة الثلاث
Golden section search	بحث المتوسط الذهبى
Risk seeking	باحث عن المجازفة
Systematically	بنسق

(ت)

Branch ■ Bounding	تفريع وتحديد
Minimization	تصغير
Maximization	تعظيم
Stochastic	تصادق
Quadratic	تربيعي
Prescribed tolerance	تفاوت محدد مسبقاً
Converge	تقرب
Exploratory moves	تحركات استكشافية
Perturbation	تشويش
Reasonable guess	تخمين مناسب
Allocation	تخصيص
Dominance	تفضيل (سيطرة)
Assignment	تعيين
Shadow Cost	تكلفة الظل
Penalty Cost	تكلفة جزائية
Convex Combination	تكوين محدب
Permutations	تبادليات
Limiting state distributions	توزيعات الحالات المحددة
Distribution	توزيع
Limiting distribution	توزيع نهائي
Initial ■ ■ ■ ■ ■	توزيع أول
Ergodic	تصادفية نهائية (أرجودية)
Balking	تراحم
Reneging	تخطي
Portfolio analysis	تحليل بورفوليو
Variance	تباين
Covariance	تباين مشترك
Network analysis	تحليل شبكات
Branches	تفرعات
Maximal flow	تدفق أعلى
Moves	تحركات
Counter moves	تحركات مضادة
Characterisation	توصيف ، تميز
Convergence	تقارب

(ث)

Deterministic	ثابتة (مؤكدة)
---------------	-----------------

(ج)

Table ■ ■ ■ ■ ■	جدول بيانات
Table ■ ■ ■ ■ ■	جدول زمني
Policy table	جدول السياسة

(ح)

Optimal solution
Feasible solution
Initial solution
Pattern move
Mathematical induction
Loop
Distinct values
Simulate
Steady State
State of nature

حل أمثل
حل ممكن
حل أولي
حركة نمط
حث رياضي
حلقة
حالات محدده (مميزه)
حاكي
حالة السكون (الاستقرار)
حالات الطبيعة

(خ)

Linear
Discounting
Itinerary
Lower bound

خطي
سعر الخصم
نمط الرحلة
حد أسفل

(د)

Function
Concave functions
Lagrange functions
Penalty functions
Probability generating function
Balking function
Reneging function
Minimax criterion
Middle of the road criterion
Optimistic criterion
Priori criterion
Posteriori criterion
Naive decision criterion

دالة
دوال مقعرة
دوال لاجرانج
دوال جزائية
دالة إيجاد الاحتمال
دالة التراجع
دالة التخلي
دلالة أقل الأعمال (مقياس)
دلالة نقطة منتصف الطريق (مقياس)
دلالة التفاضل
دلالة سابقة
دلالة لاحقة
دلالة القرارات البسيطة

(ز)

Interarrival time

زمن بين الوصول

(س)

Negative definite
Negative semi - definite
Finite Markov Chain

سالبة مؤكدة
سالبة نصف مؤكدة
سلاسل ماركوف المحدودة

Stationary	سكون (ساكن)
Policy	سياسة
Optimal Policy	سياسة مثلى
Dominance	سيطرة
Naive	ساذج
(ش)	
Limit condition	شروط نهائية
Net work .	شبكة
Decision	شجرة القرار
Global	شامل
Line segment	شريحة خطية
(ص)	
Significant	صادق (مؤكد)
Queue	صف
Waiting line	صف إنتظار
Row	صف
Geometrical significance	صدق الهندسة التحليلية
Standard form	صيغة قياسية
Formula	صيغة
Recursive formula	صيغة عكسية
(ض)	
Post multiply	ضرب لاحق
Premultiply	ضرب سابق
(ط)	
Nearest neighbour method	طريقة أقرب جار
Two-phase method	طريقة المرحلتين
Cut algorithm	طرق القطع
Transportation algorithm	طريقة النقل
System Capacity	طاقة النظام
Infinite Capacity	طاقة غير محدودة
Finite Capacity	طاقة محدودة
(ع)	
Integer	عدد صحيح
Random sampling	عينات عشوائية
Desirability	عامل الرغبة
Randomness	عشوائية
Markov processes	عمليات ماركوف
Deterministic processes	عمليات ثابتة (مؤكدة)
Discounted return	عائد
Birth-death processes	عمليات ميلاد وموت
Pure birth process	عمليات ميلاد مطلقة
Pure death Process	عمليات موت مطلقة

Linear Markovian birth process	عمليات الميلاء الخطية لماركوف
Linear Markovian death process	عمليات الموت الخطية لماركوف
Generalised Markovian birth death process	عمليات الميلاء والموت العامة لماركوف
State-dependent process	عملية الحالة المعتمدة
Multi-stage decision process	عمليات القرارات المتعددة المراحل
Recursive	عكس
Node	عقدة
Iterative relation	علاقة تكرارية
Customers	عملاء
	(غ)
Infinite	غير محدودة (لا نهائية)
	(ف)
Convex sets	مجموعات محدبة
	(ق)
Constrains	قيود
Hidden conditions	قيود غير واضحة
Powers	قوى مضاعفة
Decision	قرار
Recommended decision	قرار مفضل
	(ك)
Traffic intensity	كثافة المواصلات
Scalar	كمية مقياسية (غير متجهة)
	(ل)
Non negative	لا سلبى
Non degenerate	لا ينحرف
Lotteries	لعب الخط
IFF (IF and only IF)	لور (لو فقط لو)
	(م)
Slack variable	متغير مساعد (كاسد)
Surplus variable	متغير زائد
Feasible	ممكنة
Inequality	متباينة
Equality	متساوية
Artificial variable	متغير صناعى
Vector	متجه
Transposed	معكوس (للمصفوفة)
Identity matrix	مصفوفة أحادية
Updated	معدلة
Hypercube	مكعب زائد
Reversed inequalities	متباينات معكوسة
Directional derivatives	مشتقة توجيحية

Inverse matrix	مقلوب المصفوفة
Transposed matrix	معكوس المصفوفة
Exponential curve	منحنى أسي
Least squares	مربعات الصغرى
Lagrange multipliers	مضروبان لا جرانج
Jacobian matrix	مصفوفات جاكوب
Constraint qualifications	مؤهلات مقيدة
Approach	مدخل
Travelling salesman problem	مشكلة البحار المسافر
Single variable	متغير مفرد
Strictly concave	مقعرة بالتحديد
Strictly convex	محدبة بالتحديد
Multivariable	متعدد المتغيرات
Gradient vector	متجهة متلبرج
Hessian matrix	مصفوفة هس
Determinants	محددات
Bounded	محدد
Closed	مغلق
Partial derivative	مشتقة جزئية
Normalised utility	منفعة معدلة
Certainty equivalent	مكافئ مؤكد
Risk premium	مجازفة أولية
Risk indifferent	متساوى المجازفة
Regret matrix	مصفوفة الاعتذار
Transition matrix	مصفوفة الانتقال
Stochastic matrix	مصفوفة تصادفية
Distribution vector	متجهة التوزيع
Ergodic matrix	مصفوفة عشوائية نهائية (أرجودية)
Limit matrix	مصفوفة النهايات
Regular matrix	مصفوفة عادية
Characteristic equation	معادلة التمييز
Scalar multipliers	مضروبان مقياسية
Dominaled	مفضلة
Birth	ميلاد
Death	موت
Birth rate	معدل ميلاد
Death rate	معدل موت
Kolmogorov equations	معادلات كولموغوروف
Servers	من يقدمون الخدمة
FIFO	من يصل أولاً يخدم أولاً
LIFO	من يصل أخيراً يخدم أولاً
Simulation	محاكاة

Random number generator

M / M / 1

Utilisation factor

Balance equations

Stage

Oriented

Sink

Source

Zero-sum game

Two person game

Matrix game

Pay-off matrix

Probability vector

Stable game

Unstable game

Fair game

Symmetric game

Gain matrix

Utility

مولدات أرقام عشوائية

م / م / ١

معامل استخدام

معادلات اتزان

مرحلة

موجه

مصعب

مصدر

مباراة صفرية

مباراة بين شخصين

مباراة المصفوفات

مصفوفة الربحية (العائد)

متجه الاحتمال

مباراة مستقرة

مباراة غير مستقرة

مباراة عادله

مباراة متائلة

مصفوفة عائد

منفعة

(ن)

Junction

Unimodal

Stationary Points

Transshipment

Limit

Queuing system

Simulation models

Minimum span

Extreme points

Graph theory

نقطه اتصال

نموذج أحادي

نقطه ساكنة

نقل بالشحن

نهاية (نها)

نظم الصفوف

نماذج المحاكاة

نطاق أدنى

نقطه طرفية

نظرية الأشكال البيانية

(هـ)

Objective

هدف

(و)

Utility units (utilities)

وحدات منفعة

Dummy

وهي

Fictitious

وهي

Links

وصلات

Unique

وحيد

(ي)

Degenerate

ينحرف

Risk diverse

يتجنب المجازفة

رموز وحدات القياس

M	ميل
OZ	أونصة
Wk	أسبوع
Min	حد أدنى
Max	حد أعلى
ft^3	قدم مكعب
ft^2	قدم مربع
(in)	بوصة
C	سنت
\$	دولار
Gal	جالون
lb	رطل
Bl	برميل
Ton	طن
D	يوم
Mo	شهر
Y	سنة
Min	دقيقة
Hr	ساعة
Sec	ثانية
H^{-1}	في الساعة
M^{-1}	في الدقيقة
S^{-1}	في الثانية
ft^0	قدم

رقم الإيداع : ٢٥٦١ / ٨٨